

Теория вероятностей и математическая статистика

**Свойства выборочных
характеристик**

Свойства среднего выборочного

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- Пусть X – выборка объема n значений случайной величины, имеющей матожидание a , дисперсию σ^2 . Тогда

Доказательство.

$$\begin{aligned} M\bar{x} &= M\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_i Mx_i = \\ &= \frac{1}{n} \sum_i a = \frac{na}{n} = a. \end{aligned}$$

- 1.

$$M\bar{x} = a.$$

Свойства среднего выборочного

■ 2.

$$D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D\bar{x} &= D\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_i Dx_i = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Свойства среднего выборочного

■ 3.

$$\bar{x} \xrightarrow{p} a.$$

■ 4.

$$\bar{x} \rightarrow u \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Свойства начальных моментов

$$Ma_l = \alpha_l.$$

$$a^l \xrightarrow{p} \alpha^l.$$

$$Da_l = \frac{D\xi^l}{n}.$$

$$a_l \rightarrow u \in N\left(\alpha_l, \frac{\sqrt{D\xi^l}}{\sqrt{n}}\right).$$

Свойства выборочной дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

$$MS^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

$$S^2_X = S^2_{(X-c)}.$$

$$DS^2 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$S^2 \rightarrow u \in N\left(\sigma^2, O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

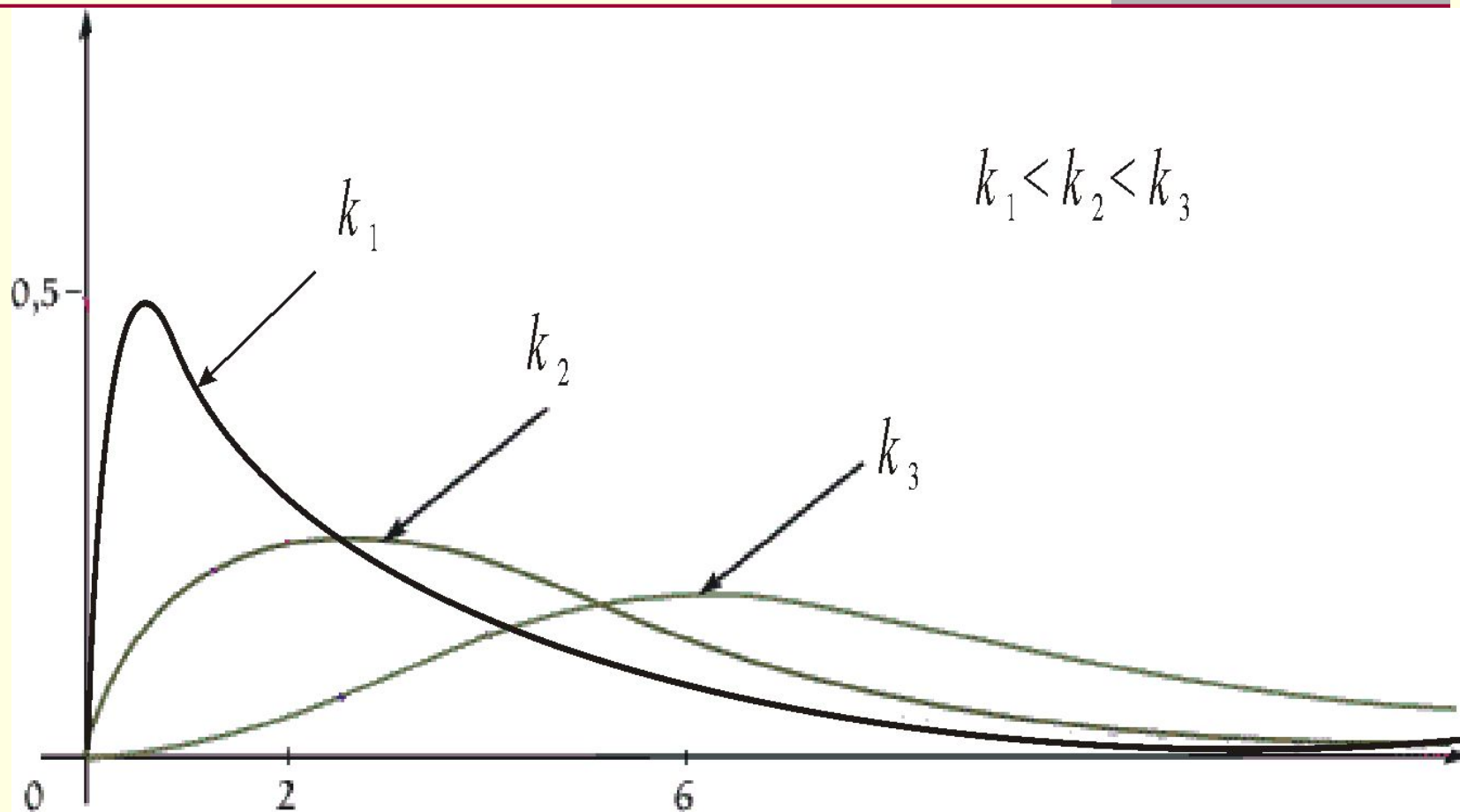
Распределение χ^2

- Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение случайной величины $\chi^2(k)$, равной сумме квадратов k независимых нормально распределенных по закону $N(0,1)$ случайных величин U_i $i=1,2,\dots,k$, т.е. распределение случайной величины

$$\chi^2(k) = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2$$

Плотность распределения χ^2 при $k=7$

Плотность распределения χ^2 при разных k



Плотность распределения $\chi^2(k)$

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$M[\chi^2(k)] = k$$

$$D[\chi^2(k)] = 2k$$

Замечание

Если $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с k_1 и k_2 степенями свободы соответственно, то сумма этих случайных величин имеет распределение χ^2 с $k_1 + k_2$ степенями свободы:

$$\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2)$$

Распределение $\chi^2(k)$ при больших значениях k ($k > 30$) с достаточной для практических расчетов точностью приближается нормальным распределением.

Распределение Стьюдента

Распределением Стьюдента с k степенями свободы называется распределение случайной величины $T(k)$, равной

$$T(k) = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}$$

где U имеет нормальное распределение $N_{(0, 1)}$.

Величина, имеющая распределение Стьюдента с k степенями свободы будет также обозначаться $t(k)$.

Замечание

Для приближенного выражения квантилей $\chi^2_p(k_1)$ распределения $\chi^2(k_1)$ через квантили u_p нормального распределения $N_{(0,1)}$ используют следующие две формулы:

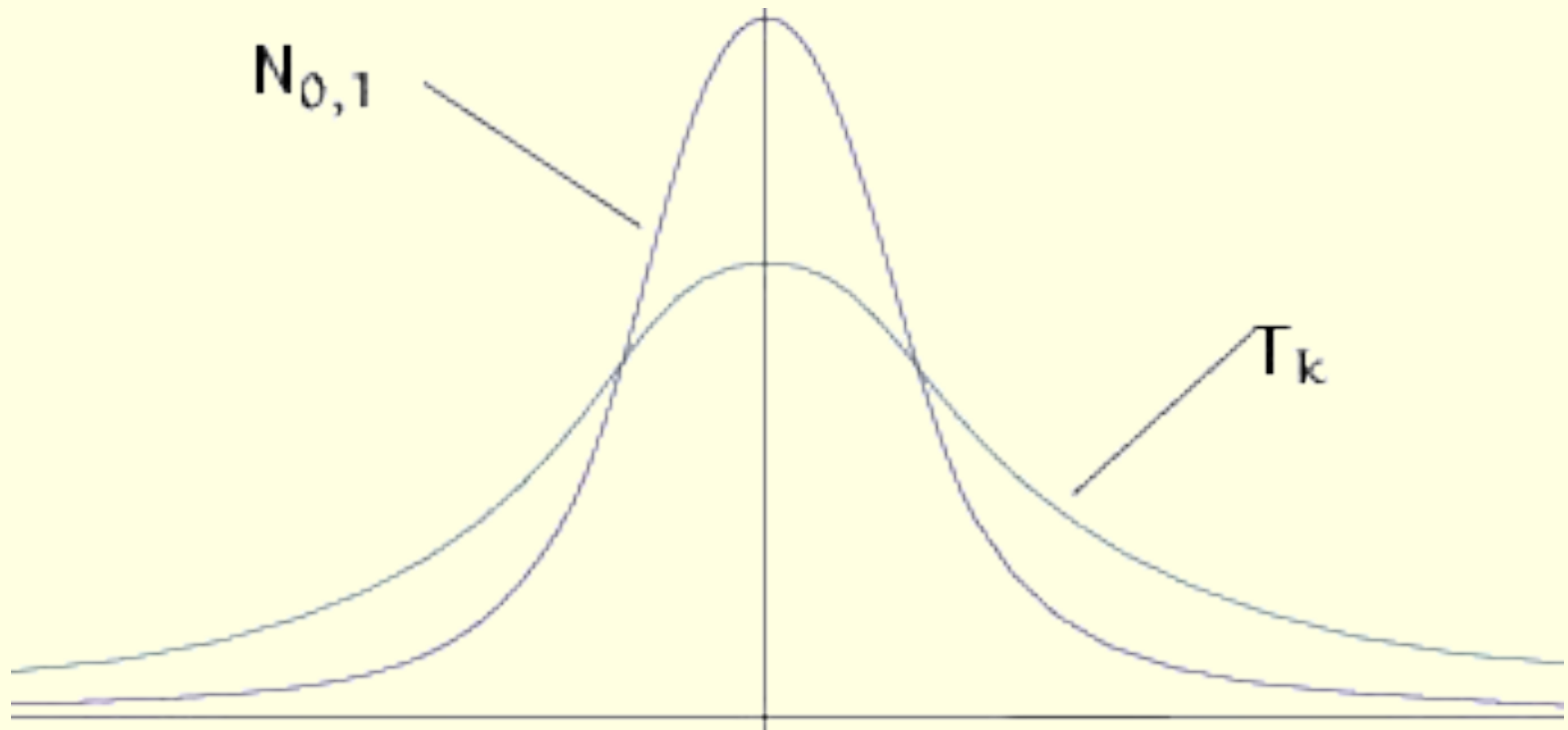
$$\chi^2_p(k) \approx \frac{1}{2} (u_p + \sqrt{2k-1})^2$$

– формула применяемая при $k \geq 30$ и $p \geq 0.5$

$$\chi^2_p(k) \approx k \left(1 - \frac{2}{9k} + u_p \sqrt{\frac{2}{9k}} \right)^3$$

– формула применяется для вычисления квантилей малого порядка.

Плотность распределения Стьюдента



$k = \infty$ — нормальное распределение

Плотность распределения Стьюдента

Распределение Стьюдента с k степенями свободы имеет плотность

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$M[T(k)] = 0$$

$$D[T(k)] = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2$$

Замечание

Плотность распределения Стьюдента симметрична относительно оси ординат, следовательно, для квантилей $t_p(k)$ имеет место соотношение

$$t_p(k) = -t_{1-p}(k).$$

При больших k ($k > 30$) для квантилей $t_p(k)$ распределения Стьюдента выполнено приближенное равенство

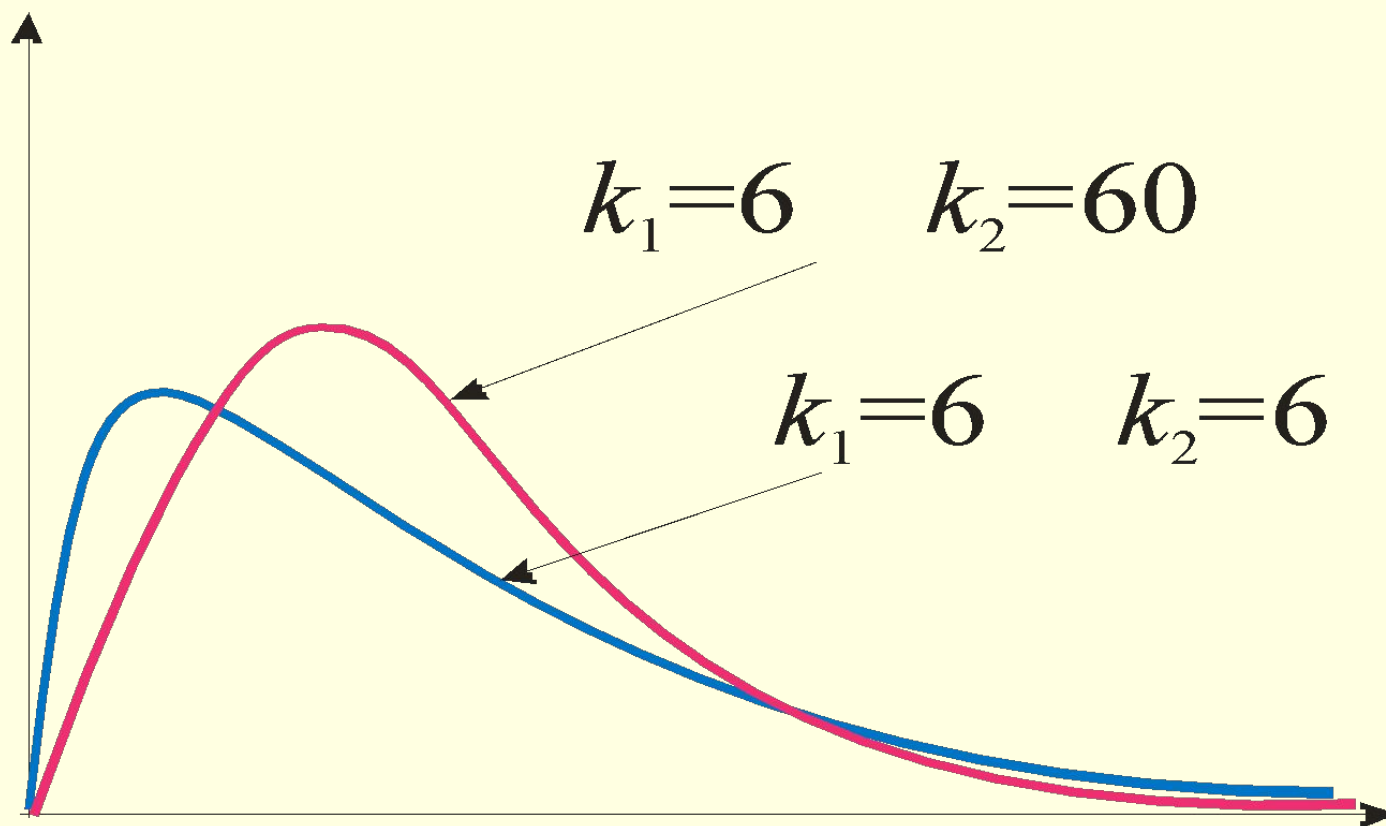
$$t_p(k) \approx u_p.$$

Распределение Фишера

Распределением Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы называется распределение случайной величины $F(k_1, k_2)$, равной

$$F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1) / k_1}{\chi^2(k_2) / k_2}.$$

Плотность распределения Фишера



Плотность распределения Фишера

Распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы имеет плотность распределения

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{k_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1 + k_2}{2}}}, & x > 0 \end{cases}$$

Матожидание распределения Фишера

$$M[F(k_1, k_2)] = \frac{k_2}{k_2 - 2}, \quad k_2 > 2$$

Замечание

Квантили распределения Фишера порядка p и $1-p$ связаны соотношением

$$F_{1-p}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_p(k_2, k_1)}$$

$$F_p(k_2, k_1) \approx \frac{k_2}{k_2 - 2} \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 4)}} u_p + \frac{k_2}{k_2 - 2}$$

Замечание

Между случайными величинами, имеющими нормальное распределение, распределение χ^2 , распределение Стюдента и распределением Фишера имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}T^2(k) &= F(1, k) \\ F(k, \infty) &= \frac{\chi^2(k)}{k} \\ \chi^2(1) &= U^2\end{aligned}$$

Теорема Фишера

Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – выборка из $N(a, \sigma)$.

Тогда:

$$1) \quad \bar{x} \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$2) \quad \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0; 1)$$

$$3) \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}$$

$$4) \quad \bar{X} \text{ и } S^2 \text{ независимы.}$$

Теорема 1

Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – выборка из $N(a, \sigma)$.

Тогда:

$$\frac{\frac{\bar{x} - a}{s}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} = T_{n-1}.$$