Лекция 3

Теория вероятностей и математическая статистика

Основные теоремы исчисления вероятностей

Независимые события

<u>**Определение**</u>

События A и B называются *независимыми*, если

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

Пример

- Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекается карта. Будут ли события {извлекли даму} и {извлекли пику} независимы?
- **Решение.**

A = {дама}, B = {пика}, AB = {дама пик}.

$p(A) = 4/36 = 1/9$, $p(B) = 9/36 = 1/4$,

$p(AB) = 1/36$.

$p(A) \cdot p(B) = 1/9 \cdot 1/4 = 1/36$.

$p(A) \cdot p(B) = p(AB) \rightarrow$ A и B независимы.

Замечание

Если события А и В несовместны, то они независимы только если

Р(А) = 0 или Р(В) = 0. (ПОЧЕМУ?)

Потому что: $P(AB) = P(A)P(B)$,

$0 = P(A)P(B)$.

Условная вероятность

- **Вероятность события А, вычисленную в предположении, что событие В произошло, мы будем обозначать через**

$$P(A|B) \text{ или } P(A.\ B)$$

Определение

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Считают, что условная вероятность определена только в случае, когда P(B) > 0.

Пример

Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало более трех очков. Какова при этом вероятность того, что выпало четное число очков?

Решение.

Ω при одном подбрасывании кубика состоит из шести точек: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Слова «известно, что выпало более трех очков» означают, что в эксперименте произошло событие $B = \{4, 5, 6\}$.

- B = {4,5,6}, p(B) = 3/6 = 1/2,
- AB = {4,6}, p(AB) = 2/6 = 1/3.

$$\boxed{P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}.}$$

Свойства независимых событий

Если события *A* и *B* независимы, то:

- **P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)**

(если P(A) >0, P(B) > 0).

- **независимы и события**

$$\boxed{A \text{ и } \overline{B},\ \overline{A} \text{ и } B,\ \overline{A} \text{ и } \overline{B}.}$$

Независимость в совокупности

<u>Определение</u>

События A_1, A_2, …, A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любого набора событий вероятность произведения равна произведению вероятностей:

$$\boxed{P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_n}).}$$

Замечание

- Если события A_1, A_2, …, A_n независимы в совокупности, то они попарно независимы, т.е. любые два события A_i, A_j независимы. (ПОЧЕМУ?)
- Обратное неверно.

Если события попарно независимы, то в совокупности могут быть зависимы.

Теорема сложения

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Доказательство

$$A=A\Omega=A\left(B+\overline{B}\right)=AB+A\overline{B}$$

$$B=B\Omega=B\left(A+\overline{A}\right)=AB+\overline{A}B$$

$$A+B=\overline{A}B+AB+A\overline{B}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

$$P(A+B) = \underbrace{P(\bar{A}B) + P(AB)}_{P(B)} + \underbrace{P(A\bar{B})}_{P(A)-P(AB)}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \lozenge$$

Пример

- Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекается карта. Какова вероятность, что это дама или пика?
- **Решение.**

A = {дама}, B = {пика}, A+B = {дама или пика}, AB = {дама пик}.

$p(A) = 4/36$, $p(B) = 9/36$, $p(AB) = 1/36$.

$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) =$

$4/36 + 9/36 - 1/36 = 12/36 = 1/3$.

Теорема сложения для n событий

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)-\sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i A_j\right)+$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_i A_j A_k\right)-\ldots+\left(-1\right)^{n-1} P\left(A_1\ldots A_n\right)$$

Теорема умножения для двух событий

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B),$$

если соответствующие условные вероятности определены

(то есть если P(A) > 0, P(B) > 0).

Доказательство следует из определения условной вероятности.

Пример

Из букв слова "ВЕРОЯТНОСТЬ" случайно выбирают 2 буквы. Найти вероятность того, что выбраны 2 буквы "О".

<u>Решение.</u>

$$P\left(O_1O_2\right)=P\left(O_1\right)P\left(O_2|O_1\right)=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{55}.$$

Теорема умножения для n событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Доказательство проводится по индукции.

Пример

Из букв слова «МАТЕМАТИКА» случайно выбирают 4 буквы и выкладывают в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «ТЕМА».

$$P(\text{ТЕМА}) =$$

$$= P(\text{Т})\,P(\text{Е}\mid\text{Т})\,P(\text{М}\mid\text{ТЕ})\,P(\text{А}\mid\text{ТЕМ}) =$$

$$= \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}.$$

Гипотезы

Определение

Набор попарно несовместных событий H_1, H_2, …, H_n таких, что $P(H_i) > 0$ для всех *i* и

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

называется ***полной группой событий***.

События, образующие полную группу событий, называются ***гипотезами***.

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть *A* – случайное событие, H_1, H_2, …, H_n – полная группа событий (гипотезы),

$$P(H_i) > 0, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i .$$

Тогда вероятность события *A* может быть вычислена по формуле:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}$$

Доказательство

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A H_i \right)$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A H_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A H_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i). \quad \Diamond$$

Пример

Есть 3 завода, производящих одну и ту же продукцию. При этом 1-й завод производит 25%, 2-й завод – 35% и 3-й завод – 40% всей производимой продукции. Брак составляет 5% от продукции 1-го завода, 3% от продукции 2-го и 4% от продукции

3-го завода. Найти вероятность купить бракованное изделие.

Решение

Рассмотрим три гипотезы:

H_i = {изделие произведено *i-м* заводом},

i = 1,2,3.

Вероятности этих событий даны:

$$P(H_1) = 0{,}25,\ P(H_2) = 0{,}35,\ P(H_3) = 0{,}4.$$

Пусть A **= {изделие бракованное}. Причем даны условные вероятности:**

$$P(\mathrm{A}|H_1) = 0{,}05,\ P(\mathrm{A}|H_2) = 0{,}03,\ P(\mathrm{A}|H_3) = 0{,}04.$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\mid H_i):$$

$$P(A)=0,05\cdot 0,25+0,03\cdot 0,35+0,04\cdot 0,4=0,039.$$

Полная вероятность равна доле бракованных изделий в объеме всей продукции.

Теорема (Формула Байеса)

Пусть *A* – случайное событие, H_1, H_2, …, H_n – полная группа событий (гипотезы),

$$P(H_i) > 0, \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i .$$

Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если наблюдалось событие *A*, может быть вычислена по формуле:

$$\boxed{P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}}$$

Доказательство

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \cdot H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{P(A)}$$

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} \,. \ \lozenge$$

Пример

По условиям предыдущего примера, найти вероятность, что изделие изготовлено первым заводом, при условии, что оно бракованное.

Решение

Рассмотрим три гипотезы:

H_i = {изделие произведено *i* заводом}, I = 1,2,3.

Вероятности этих событий даны:

$P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$.

Пусть A = {изделие бракованное}.

Условные вероятности:

$P(\mathrm{A}|H_1) = 0{,}05$, $P(\mathrm{A}|H_2) = 0{,}03$, $P(\mathrm{A}|H_3) = 0{,}04$.

Тогда вероятность того, что бракованное изделие произведено первым заводом, будет равна

$$\frac{0,05\cdot 0,25}{0,05\cdot 0,25+0,03\cdot 0,35+0,04\cdot 0,4}=\frac{0,0125}{0,039}\approx 0,32.$$