ЛЕКЦИЯ 5

Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины

Одномерные случайные величины

Пусть есть случайный эксперимент, Ω — пространство элементарных событий.

<u>Определение</u>

***Случайной величиной* ξ** называется функция, отображающая Ω в **R**.

$$\xi: \ \Omega \to \mathbf{R}$$

(То есть **ξ = ξ(ω)**).

<u>Смысл:</u> случайная величина – это числовая функция, принимающая значения случайным образом.

Дискретные распределения

<u>Определение</u>

Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений.

Значения: $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,…,

Вероятности значений: $\mathbf{p_i} = P(\xi = a_i) > 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.}$$

Определение

Если случайная величина ξ имеет дискретное распределение, то ***рядом распределения*** называется соответствие $a_i \leftrightarrow p_i$, которое имеет вид :

ξ	a_1	a_2	a_3	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

Пример

Подбрасываем 1 раз кубик. Пусть $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, и две функции из Ω в R заданы так: $\boldsymbol{\xi}(\omega) = \omega$ и $\eta(\omega) = \omega^2$. Построить ряды распределения.

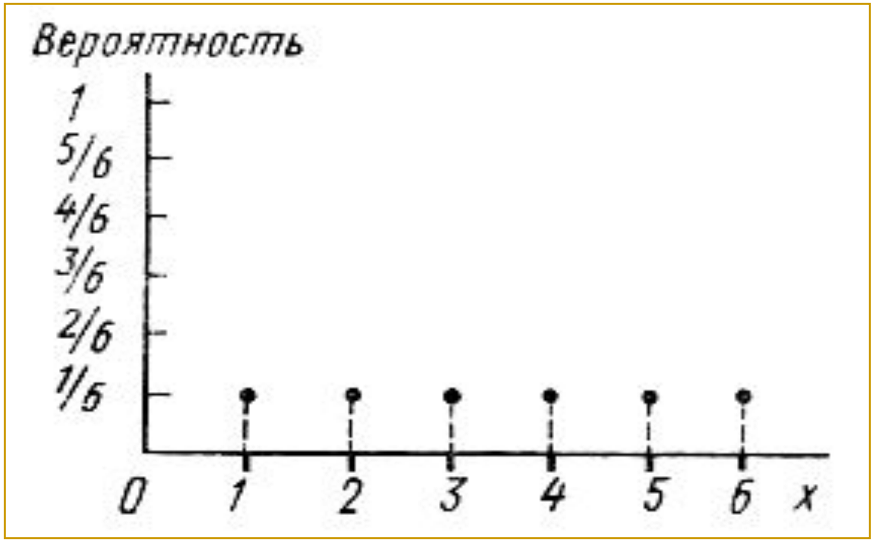
Решение

ξ	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

η	1	4	9	16	25	36
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Графическое задание ряда распределения ξ

ξ	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



Примеры дискретных распределений

Вырожденное распределение I_a

Случайная величина **ξ** имеет вырожденное распределение с параметром ***a***, если **ξ** принимает единственное значение ***a*** с вероятностью 1, т.е. $P(\xi = \boldsymbol{a}) = 1$. Таблица распределения имеет вид

ξ	a
P	1

Дискретное равномерное распределение

- Случайная величина **ξ** имеет дискретное равномерное распределение, если **ξ** принимает n значений $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ с вероятностями $p_i = 1/n$.

ξ	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**…**	$\mathbf{x_n}$
$\mathbf{P_i}$	**1/n**	**1/n**	**…**	**1/n**

Распределение Бернулли B_p

Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p, если ξ принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$, соответственно.

Случайная величина ξ с таким распределением равна *числу успехов в одном испытании схемы Бернулли с вероятностью успеха p* (0 успехов или 1 успех).

ξ	0	1
P	q	p

Биномиальное распределение B(n,p)

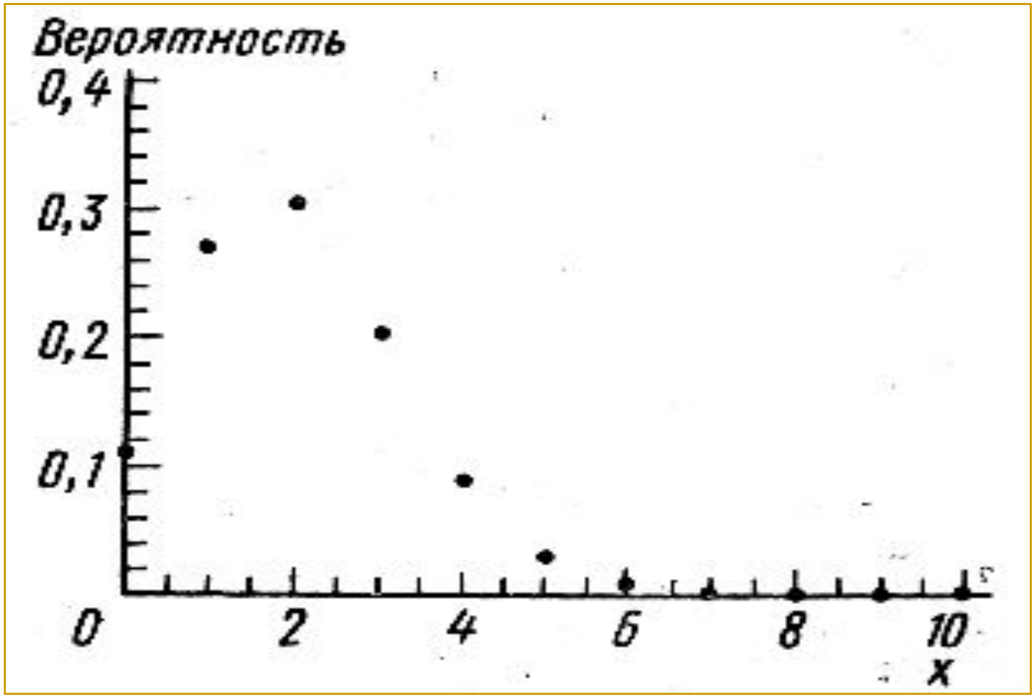
Случайная величина **ξ** имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, где $0 \le p \le 1$, если **ξ** принимает значения 0, 1, 2, …n с вероятностями $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Случайная величина с таким распределением имеет смысл *числа успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p*.

ξ	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Пример

- Распределение вероятностей биномиально распределенной случайной величины для $n = 10$ и $p = 0.2$



Геометрическое распределение G_p,

Сл.в. ξ имеет геометрическое распределение с параметром p, где $0 \le p \le 1$, если ξ принимает значения 1, 2, 3,… с вероятностями $P\{\xi = k\} = pq^{k-1}$.

Случайная величина ξ с таким распределением имеет смысл *номера первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха p*.

ξ	1	2	…	k	…
P	p	pq		pq^{k-1}	…

Распределение Пуассона P_λ

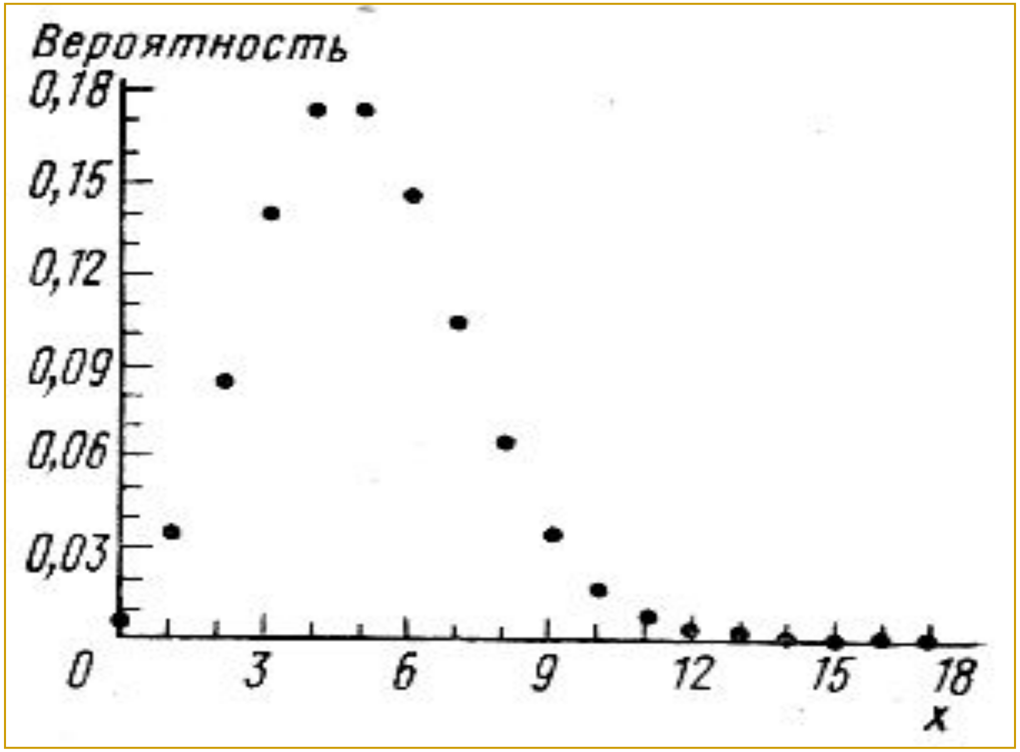
Сл. в. ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, где λ>0, если ξ принимает значения 0, 1, 2,… с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ξ	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	…

Пример

- **Распределение вероятностей Пуассоновской случайной величины с λ=5.**



Распределение Пуассона

- **Это одно из важнейших дискретных вероятностных распределений впервые было исследовано в 1837 г. С.Пуассоном (французский математик, механик и физик, 1781 – 1840 гг.)**
- **Пуассоновская модель обычно описывает *схему редких событий*: при некоторых предположениях о характере процесса появления случайных событий число событий, происшедших за фиксированный промежуток времени или в фиксированной области пространства, часто подчиняется пуассоновскому распределению.**

Распределение Пуассона

- **Примерами могут служить число частиц радиоактивного распада, зарегистрированных счетчиком в течении некоторого времени t, число вызовов, поступивших на телефонную станцию за время t, число дефектов в куске ткани или в ленте фиксированной длины, число изюминок в кексе и т.д. Наконец, распределение Пуассона дает хорошую аппроксимацию биномиального распределения для больших значений n и малых значений p.**

Гипергеометрическое распределение

Сл.в. ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами *n*, *N* и *K*, где *n* ≤ *N*, *K* ≤ *N*, если ξ принимает целые значения ***k*** с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

- Случайная величина ξ с таким распределением имеет смысл числа белых шаров среди n шаров, выбранных наудачу без возвращения из урны, содержащей K белых шаров и N –K не белых.

Функция распределения

Определение

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x)$, при каждом $x \in \mathbf{R}$ равная

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}.$$

Пример

ξ	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F_\xi(\mathrm{x}) = P\{\xi < x\}.$$

При $x \le 1$: $F_\xi(\mathrm{x}) = P\{\xi < x\} = 0.$

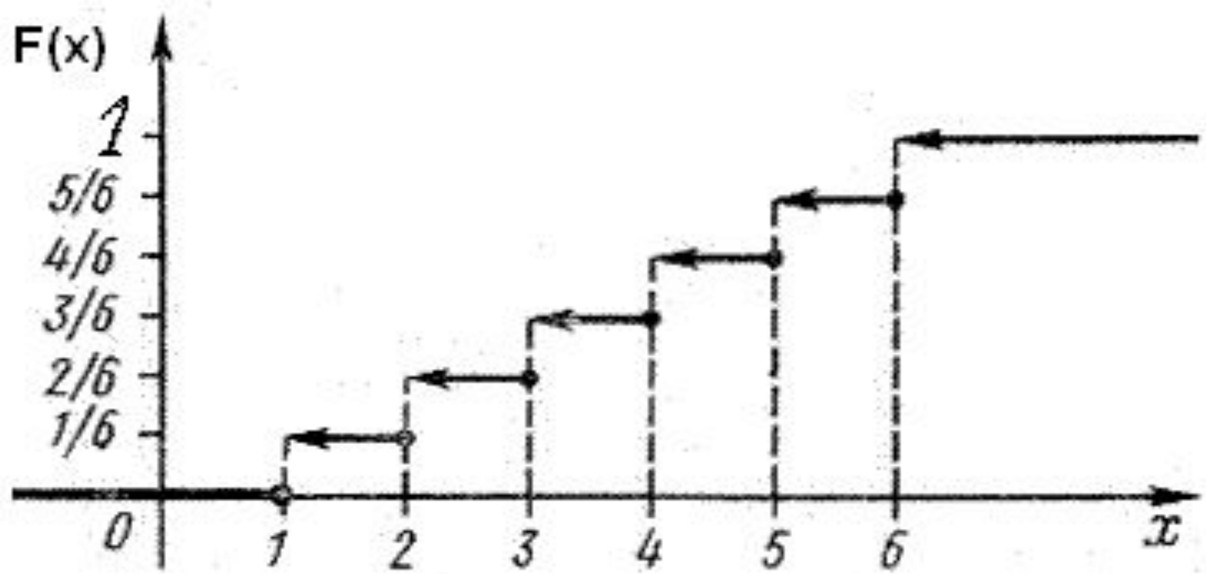
При $1 < x \le 2$: $F_\xi(\mathrm{x}) = P\{\xi < x\} = 1/6.$

При $2 < x \le 3$: $F_\xi(\mathrm{x}) = P\{\xi < x\} = 2/6$ и т. д.

Функция распределения ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 1/6, & 1 < x \le 2; \\ 2/6, & 2 < x \le 3; \\ 3/6, & 3 < x \le 4; \\ 4/6, & 4 < x \le 5; \\ 5/6, & 5 < x \le 6; \\ 1, & 6 < x. \end{cases}$$

График функции распределения ξ



Свойства функции распределения

1) Функция распределения $F_\xi(x)$ не убывает: если $x_1<x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$;

2) Существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$$

3) Функция распределения непрерывна слева:

$$F_\xi(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$$

Непрерывные распределения

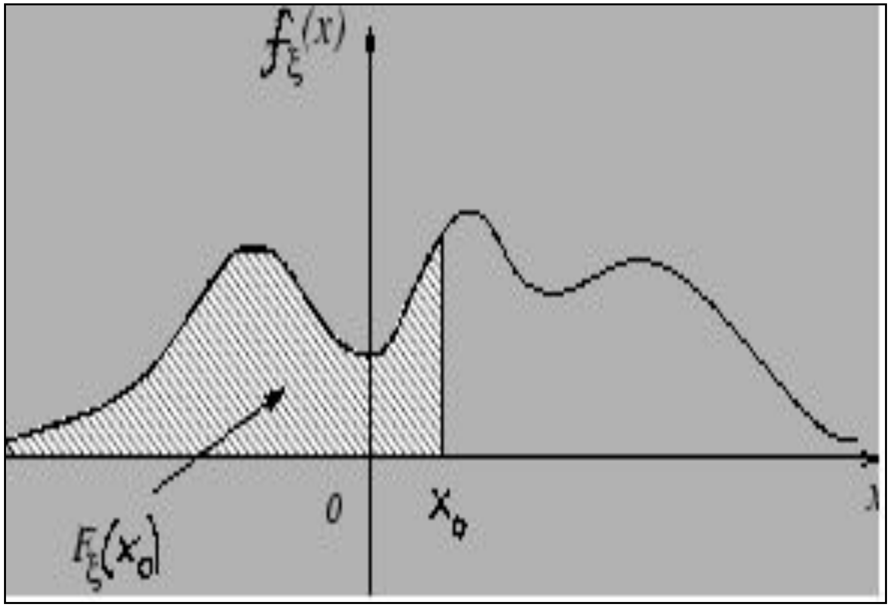
<u>Определение</u>

Случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение*, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ такая, что для любого $x_0 \in R$ функция распределения представима в виде

$$F_\xi(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_\xi(x)\, dt$$

При этом функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Геометрический смысл функции распределения



Свойства плотности

1. Почти всюду $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$.

2. Почти всюду $f_\xi(x) \geq 0$.

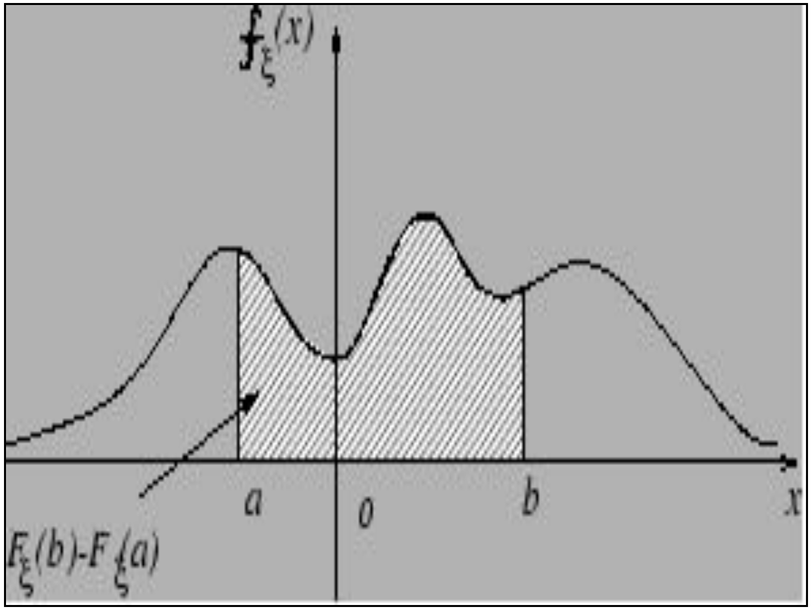
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1.$$

4. $$\int_a^b f_\xi(x)\,dx = F_\xi(b) - F_\xi(a) = p(a \leq \xi \leq b).$$

Замечание

Термин для «почти всех» означает «для всех, кроме (возможно) x из некоторого множества нулевой меры (длины)». Заметьте, что стоящую под интегралом функцию можно изменить в одной точке (или на множестве нулевой длины), и интеграл от этого не изменится.

Иллюстрация свойства 4



Примеры непрерывных распределений

- **Равномерное распределение R [a, b]**

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases}$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

График плотности распределения R[a,b]

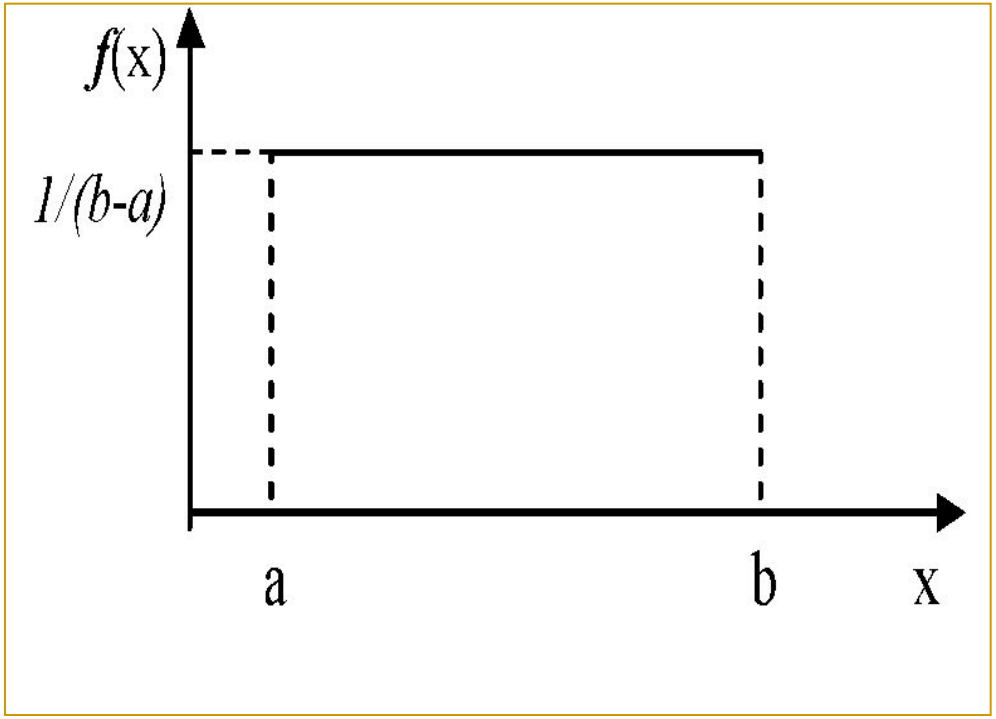
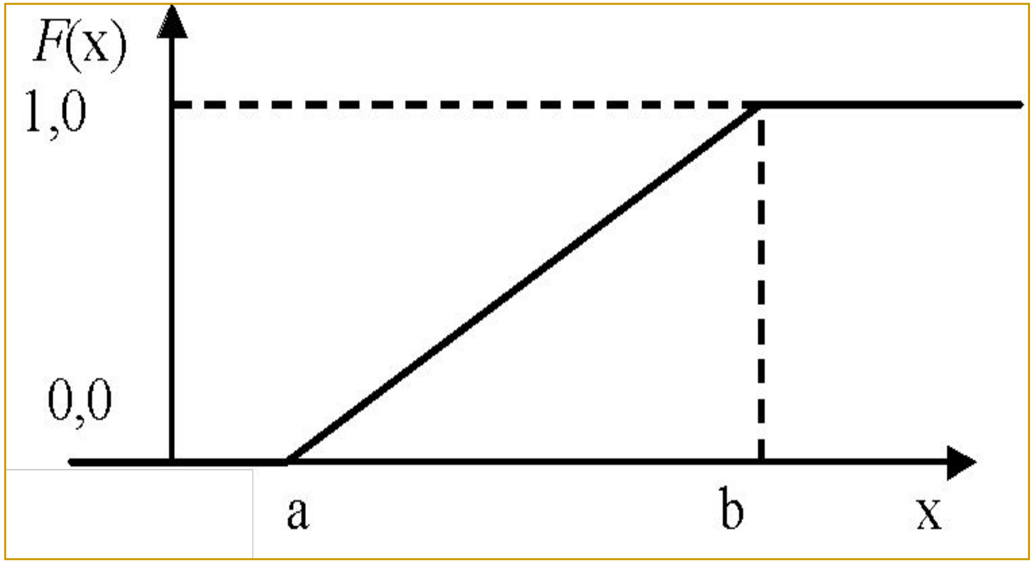


График функции распределения R[a,b]



С помощью линейного преобразования

$$\eta = \frac{\xi - a}{b - a}$$

приводится к равномерному распределению на отрезке [0,1].

Равномерное распределение является непрерывным аналогом распределений классической теории вероятностей, описывающих случайные эксперименты с равновероятными исходами.

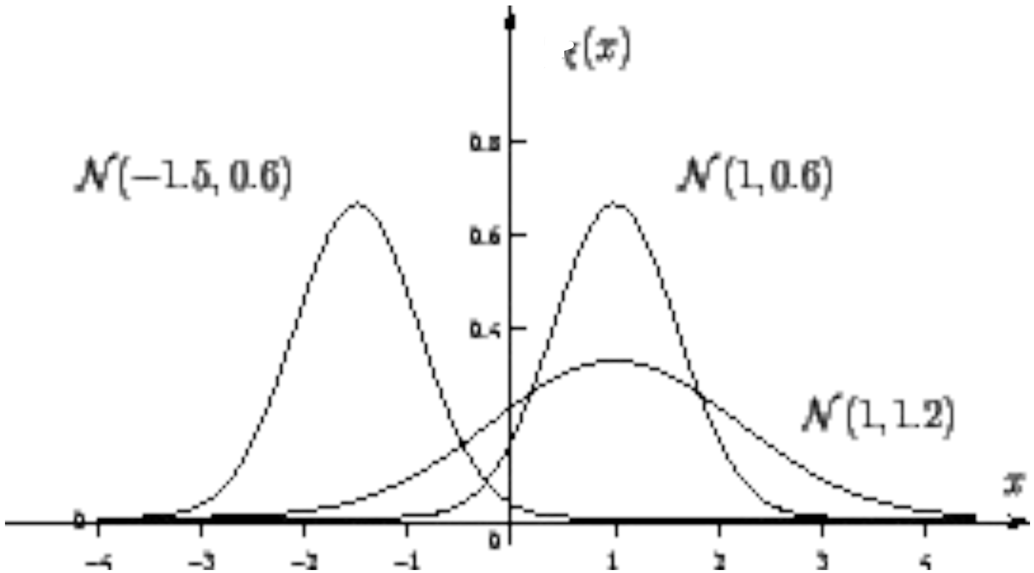
Погрешность, происходящая от округления числа, удовлетворительно описывается равномерным распределением на отрезке [–1/2, 1/2].

Нормальное распределение N (a,σ)

$$f_\xi(x) = \varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_\xi(x) = \Phi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

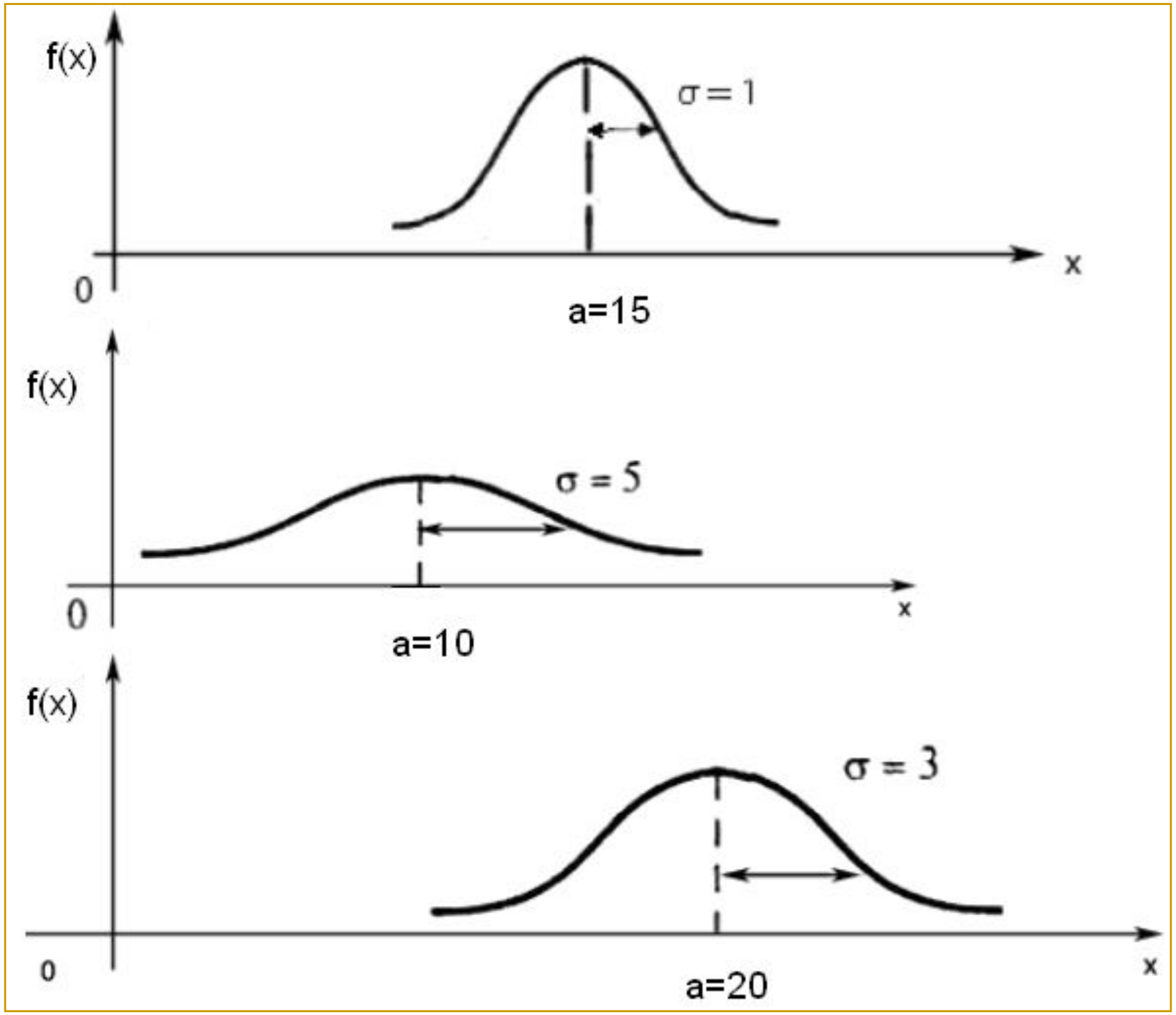
Кривые плотностей N(*a*, σ) с различными *a* и σ



Нормальное распределение N (a,σ)

- Графики нормальных плотностей имеют симметричную, колоколообразную форму.
- ***a*** – это величина, которая характеризует положение кривой плотности на оси абсцисс.
- Изменение **σ** приводит к изменению формы кривой плотности, с увеличением **σ** кривая делается менее островершинной и более растянутой вдоль оси абсцисс.

Кривые плотностей N(a, σ) с различными *a* и σ



Интерпретация

- С помощью модели нормального распределения можно описать множество явлений, например распределение высоты деревьев, площадей садовых участков, массы тела людей, дневной температуры и т. д. Нормальное распределение используется и для решения многих проблем в экономической жизни. Например, распределение числа дневных продаж в магазине, числа посетителей универмага в неделю, числа работников в некоторой отрасли, объемов выпуска продукции на предприятии и т. д.

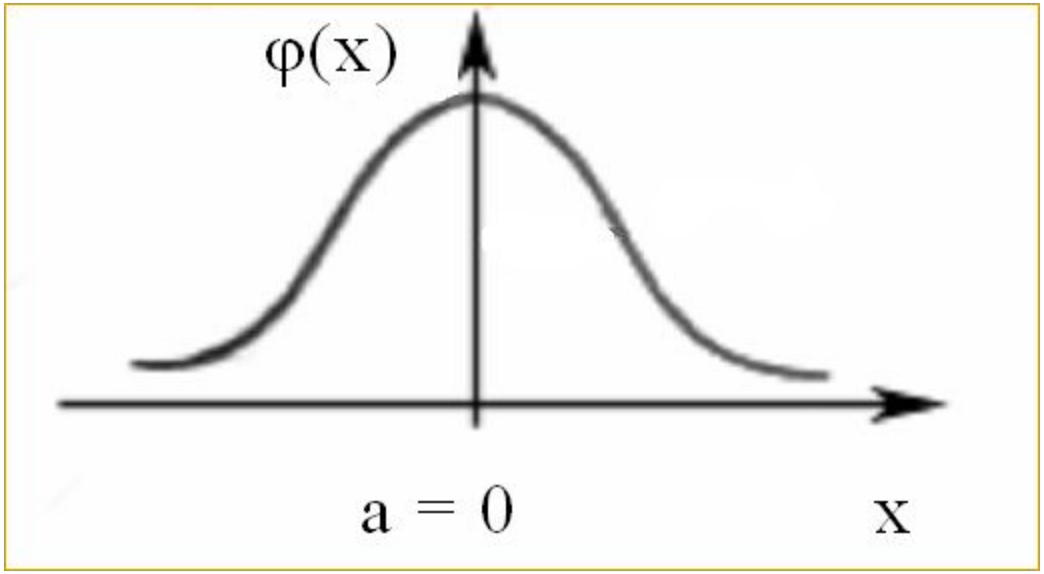
N(0,1)

- При *a* = 0 и σ = 1 нормальное распределение называют ***стандартным нормальным распределением***

$$\varphi(x) = \varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

График плотности N(0,1)



Плотность и функция распределения N(0,1)

Нормальное распределение N (a, σ)

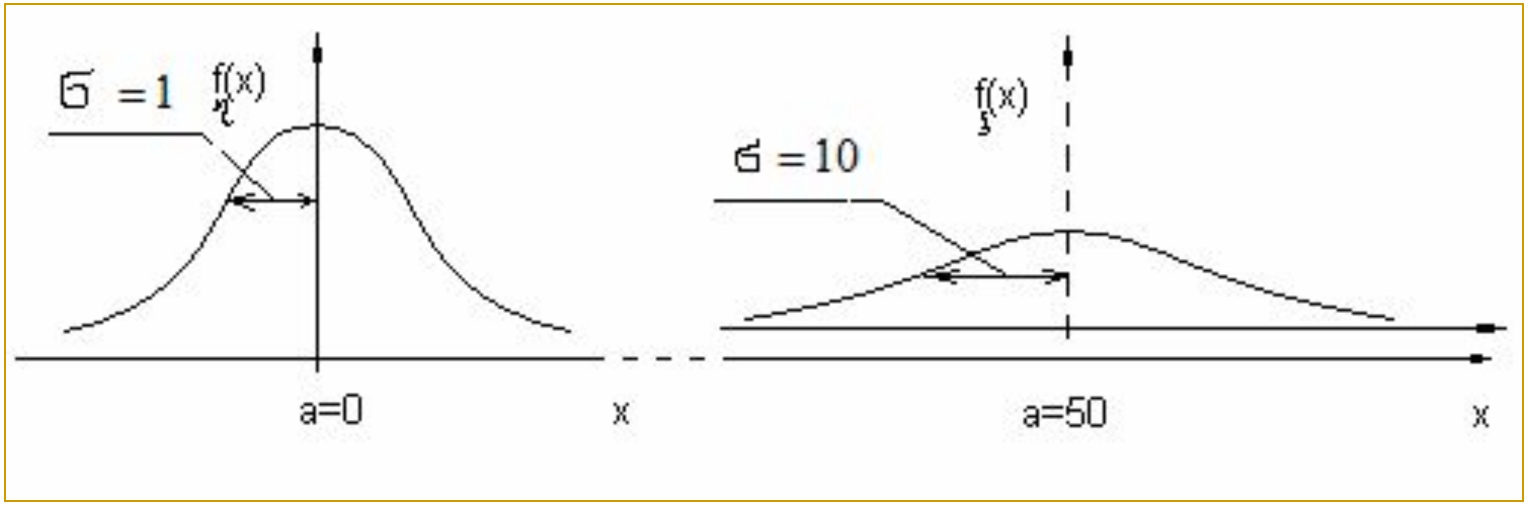
- **Фундаментальная роль, которую играет нормальное распределение, объясняется тем, что при широких предположениях суммы случайных величин с ростом числа слагаемых ведут себя асимптотически нормально.**
- **С помощью линейного преобразования**

$$\boxed{\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}}$$

нормальное распределение с произвольными параметрами (a, σ) приводится к нормальному распределению с параметрами (0, 1).

Пример: приведение N(50,10) к N(0,1)

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} = \frac{\xi - 50}{10}$$



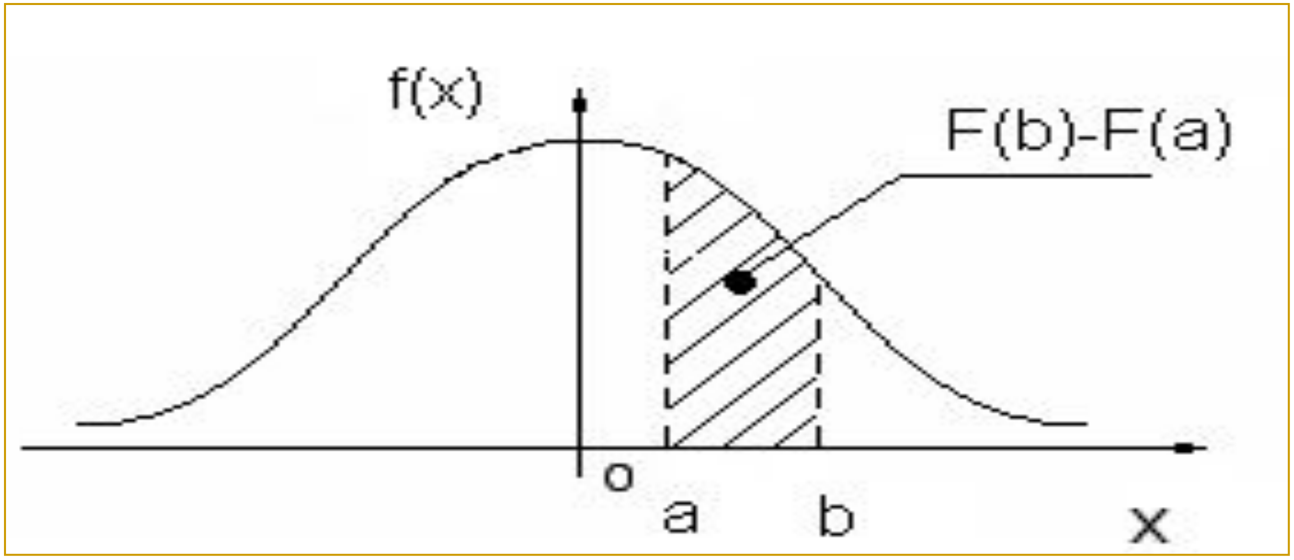
Правило 3 сигм

- Нормально распределенная случайная величина с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию, что выражается *правилом сигм:*

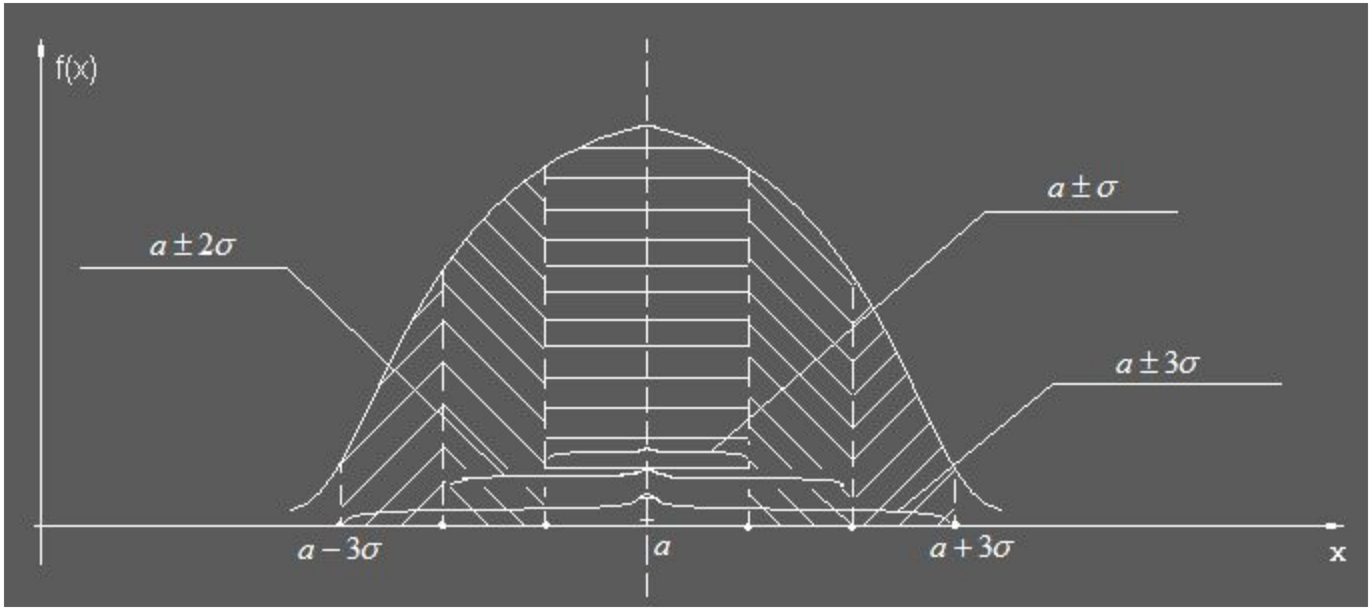
$$P\left(\left|\xi - a\right| \le k\sigma\right) \approx \begin{cases} 0.68, & k = 1 \\ 0.95, & k = 2 \\ 0.997, & k = 3 \end{cases}$$

Вспомним, что по свойствам плотности и функции р–я:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$



Правило 3 сигм



$$P\left(\left|\xi - a\right| \le k\sigma\right) \approx \begin{cases} 0.68, & k=1 \\ 0.95, & k=2 \\ 0.997, & k=3 \end{cases}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение E_λ

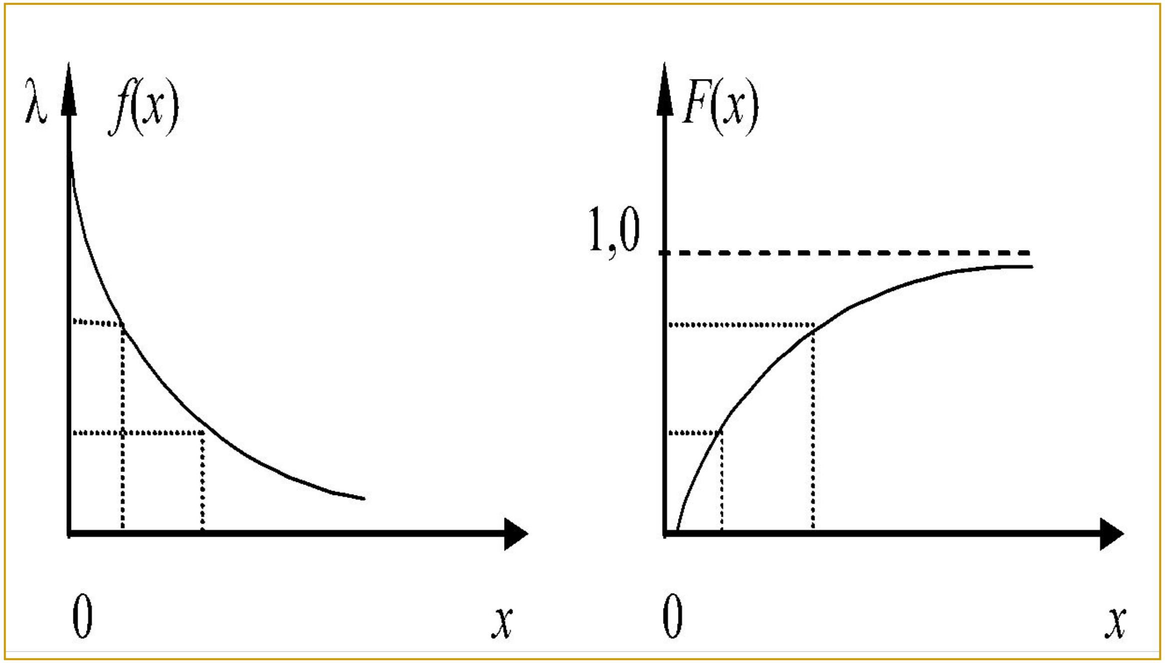
- **Плотность и функция распределения E_λ**

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Графики плотности и функции распределения E_λ



Графики плотности и функции распределения E_2

Свойства распределения E_λ

Это распределение является непрерывным аналогом геометрического распределения.

Обладает свойством отсутствия последействия

$$P\left(\xi > t + s \mid \xi > s\right) = P\left(\xi > t\right)$$

в связи с чем является основным в теории скачкообразных марковских процессов.

Плотность распределения Коши

- **Распределение Коши**

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}$$

$a, \lambda - \textit{параметры}, \qquad \lambda > 0$

Плотность Гамма –распределения

- **Г –распределение**

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{\alpha^\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x}}{\Gamma(\beta)}, & x\ge 0 \end{cases}$$

$$\alpha,\beta - \text{параметры},\ \alpha>0,\ \beta>0$$

Гамма –распределение

- Г–распределение является непрерывным аналогом отрицательного биномиального распределения.
- При $\alpha = 1$ совпадает с показательным.
- При $\alpha = n/2$, $\lambda = 1/2$ совпадает с X^2 – распределением с n числом степеней свободы.
- При $\lambda = n\mu$, $\alpha = n$ называется эрланговским распределением с параметрами (n,μ) и описывает распределение длительности интервала времени до появления n событий процесса Пуассона с параметром μ, используемым в теории массового обслуживания и теории надежности.

Плотность распределения Лапласа

- **Распределение Лапласа (двойное экспоненциальное распределение)**

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|},$$

α, λ — параметры, $\alpha\lambda >$

Многомерные СВ

Определение

n – мерной случайной величиной ξ называется вектор

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots , \xi_n(\omega)),$$

компонентами которого являются одномерные случайные величины.

Определение

Функцией распределения n–мерной случайной величины ξ называется функция

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$

$$=P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$$

Свойства функции распределения

1) $0 \le F_{\xi 1,\xi 2,\ldots,\xi n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 1$,

2) Существуют пределы

$$\lim_{x_n \to -\infty} F_{\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} F_{\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right) = F_{\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_{n-1}}\left(x_1,x_2,\ldots x_{n-1}\right).$$

3) Функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна слева.

Определение

Случайная величина ξ имеет ***непрерывное n – мерное распределение***, если существует неотрицательная функция $f_{\xi 1,\xi 2,\ldots,\xi n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ такая, что для любого $x \in R^n$ функция распределения представима в виде

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)dt$$

Свойства плотности

1. Почти всюду

$$f_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{\partial^n F_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_n}$$

2. Почти всюду $\quad f_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}\left(x_1,x_2 \quad x_n\right)\ge 0$

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}\left(t_1,t_2,\dots t_n\right)\,dt_1dt_2\dots dt_n=1$$

4. $$p\left(\left(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n\right)\in B\right)=\int_B\int f_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}\left(t_1,t_2,\dots t_n\right)dt_1dt_2\dots dt_n$$