ЛЕКЦИЯ 6

Теория вероятностей и математическая статистика

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание д.сл.в.

Определение

Математическим ожиданием Mξ **сл. вел. ξ с дискретным распределением, задаваемым законом распределения $P(\xi=x_i) = p_i$, называется число**

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- **Смысл:** Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Пример вычисления математического ожидания д.сл.в.

ξ	-1	0	1	2	5
P	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

- $M\xi=(-1)\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}1 = 0{,}7.$

Математическое ожидание н.сл.в.

Математическим ожиданием Mξ **сл. в. ξ с абсолютно непрерывным распределением с плотностью распределения $f_\xi(x)$ называется число**

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\, dx.$$

Замечание

Если

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i = \infty \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,|\, f_{\xi}(x)\, dx = \infty,$$

то говорят, что математическое ожидание *не существует*.

Математическое ожидание функции дискретной случайной величины

Математическим ожиданием функции φ(ξ) дискретной случайной величины ξ, имеющей распределение P(ξ =x_i) = p_i, называется величина M[φ(ξ)], равная

$$M[\varphi(\xi)] = \sum_i \varphi(x_i) \cdot p_i,$$

$$где \;\; p_i = p(\xi = x_i).$$

Математическое ожидание функции непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей $f_\xi(x)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x)\,dx}$$

Свойства матожидания

- 1. $MC = C$, ($C = const$)
- 2. $M(C\xi) = C \cdot M\xi$,
- 3. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$,
- 4. $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$ (для независимых величин).

Дисперсия случайной величины

- **<u>Определение.</u>**
- **Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание *M* ξ , то *дисперсией* случайной величины ξ называется величина**

$$D\,\xi = M(\xi - M\,\xi)^2.$$

- **<u>Смысл:</u>** Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса случайной величины около ее математического ожидания.

Свойства дисперсии

- Дисперсия любой случайной величины неотрицательна, $D\xi \geq 0$;
- Дисперсия константы равна нулю, $Dc = 0$;
- Для произвольной константы $\boldsymbol{D}(c\xi) = c^2\boldsymbol{D}(\xi)$;
- Дисперсия суммы или разности

независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$\boldsymbol{D}(\xi \pm \eta) = \boldsymbol{D}(\xi) + \boldsymbol{D}(\eta)$.

Еще одно важное свойство дисперсии

$$\boxed{D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2}$$

Вычисление дисперсии

- **Для вычисления дисперсии надо найти $M\xi^2$ и отнять квадрат математического ожидания,**

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

- **Величина $M\xi^2$ для дискретных и непрерывных случайных величин соответственно вычисляется по формулам**

Вычисление Mξ^2

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx$$

Пример вычисления дисперсии

ξ	-1	0	1	2	5
P	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

- $M\xi^2=(-1)^2\cdot 0,3+0^2\cdot 0,2+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,1+5^2\cdot 0,1 = 3,5.$
- $M\xi = 0,7.$
- $D\xi = 3,5 – (0,7)^2 = 3,01.$

Числовые характеристики

Распределение	Mξ	Dξ
B(n,p)	np	npq
P_λ	λ	λ
N(a,σ)	a	σ^2
R [a, b]	(a+b)/2	$(b-a)^2/12$
E_λ	1/λ	$1/\lambda^2$

Пример

$X \in N(3,2)$. Найти $M(1-3X)$, $D(1-3X)$.

$$M(1-3X) = M(1) - M(3X) =$$

$$= 1 - 3MX = 1 - 3\cdot 3 = -8.$$

$$D(1-3X) = D(1) + D(3X) =$$

$$= 0 + 9DX = 9\cdot 4 = 36.$$

Начальные и центральные моменты

- **<u>Определение.</u>** Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k-й степени случайной величины ξ , т.е. $\alpha_k = \mathbf{M}\xi^k$.
- **<u>Определение.</u>** Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина μ_k, определяемая формулой

$$\mu_k = \boldsymbol{M}(\xi - \boldsymbol{M}\xi)^k.$$

Среднеквадратичное отклонение

- Для определения меры разброса значений случайной величины часто используется **среднеквадратичное отклонение $\boldsymbol{\sigma_\xi}$**, связанное с дисперсией соотношением $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

Смысл среднеквадратичного отклонения: линейная мера разброса.

Замечания

- 1. Математическое ожидание случайной величины - начальный момент первого порядка, $\alpha_1 = M\xi^1$.
- 2. Дисперсия - центральный момент второго порядка, $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$.
- 3. Существуют формулы, позволяющие выразить центральные моменты случайной величины через ее начальные моменты, например:
- $\mu_2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$.

Коэффициент асимметрии

Определение. **Коэффициентом асимметрии** называется число A, которое определяется формулой

$$\boxed{A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

где μ_3 - центральный момент третьего порядка,
σ - среднеквадратичное отклонение.

Замечания

- У симметричного распределения асимметрия равна 0.
- Асимметрия распределения с длинным правым хвостом положительна.
- Если распределение имеет длинный левый хвост, то его асимметрия отрицательна.

Пример: $A < 0$

Пример: A > 0

Коэффициент эксцесса

<u>Определение.</u> **Коэффициентом эксцесса** называется число E, которое определяется формулой

$$E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$$

Замечания

- Коэффициент эксцесса указывает на «островершинность» или «плосковершинность» графика плотности.
- Если E > 0, то это означает, что график плотности вероятностей сильнее “заострен”, чем у нормального распределения, если же E < 0, то “заостренность” графика меньше, чем у нормального распределения.
- У нормального распределения A = 0 и E = 0.

Пример: $E > 0$

Мода

- **Определение.** **Модой** непрерывной случайной величины ξ называется значение $m_{0,}$ при котором плотность $f_\xi(x)$ достигает максимума.
- **Модой** дискретной случайной величины

ξ называется значение m_0, при котором

$p(\xi = m_0) = \max p_i$

Пример

ξ	-1	0	**1**	2
P	0,3	0,2	0,4	0,1

- **Мода m_0 дискретной случайной величины**

ξ равна значению $\xi = 1$, т.к. $p(\xi = 1) = \max p_i$.

$m_0 = 1.$

Медиана

- **<u>Определение.</u>** **Медианой** непрерывной случайной величины ξ называется значение m_e, при котором $F(m_e) = 1/2$.
- **<u>Замечание.</u>** Для непрерывной случайной величины ξ это определение равносильно следующему:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{m_e} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.}$$

Чтобы найти медиану, надо решить уравнение

$$F_{\xi}(x) = 0,5.$$

Корень этого уравнения и есть медиана.

(Если корней несколько, выберите правильный).

Пример. Найти медиану показательного р-я E_4

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow F_\xi(x) = 1 - e^{-4x}.$$

Решим уравнение: $1 - e^{-4x} = 0,5$:

$$e^{-4x} = 0,5, \quad -4x = \ln(0,5), \quad x = -\frac{\ln(0,5)}{4} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Ответ: $m_e = \dfrac{\ln 2}{4}.$

<u>Пример:</u> мода, медиана и Mξ

- $m_0 = 8$; $m_e = 9{,}34$; $M\xi = 10$.

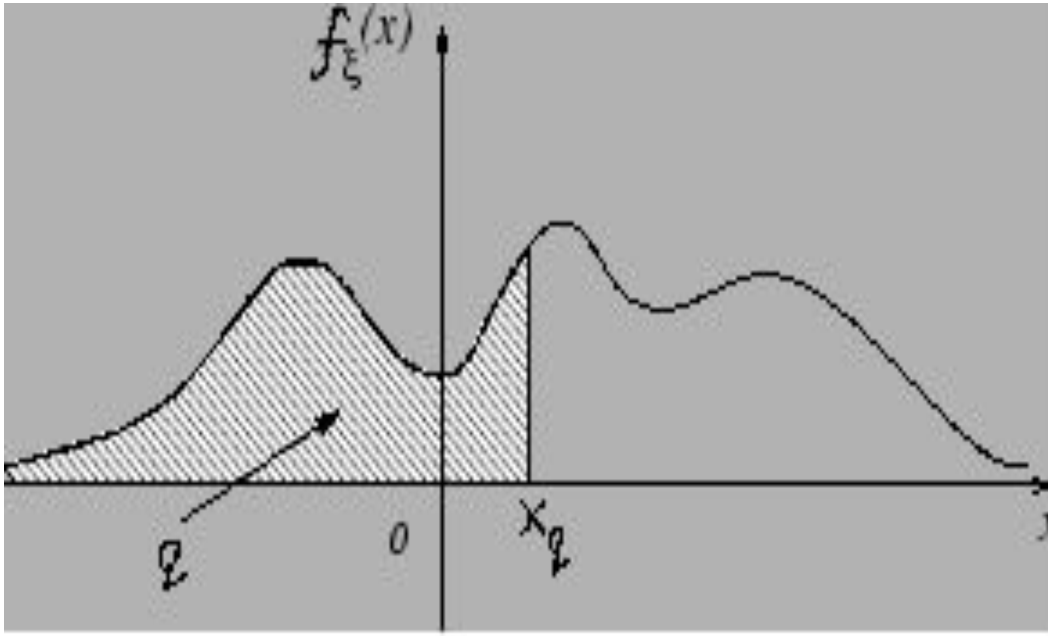
Квантиль порядка q

Определение. **Квантилью** порядка q, $0 < q < 1$ случайной величины ξ называется значение x_q, при котором $F_\xi(x_q) = q$.

Смысл. Квантиль порядка q отсекает слева $100 \cdot q\%$ значений случайной величины.

Замечание. Медиана – это квантиль порядка 0,5.

Геометрический смысл квантили порядка q



Чтобы найти квантиль x_q, надо решить уравнение

$$F_{\xi}(x) = q.$$

Корень этого уравнения и есть квантиль порядка q.

(Если корней несколько, выберите правильный).

Пример. Найти квантиль $x_{0,3}$ в R[2,5].

$$F_\xi(x_q) = q.$$

$$F_\xi(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-2}{5-2} = \frac{x-2}{3}.$$

$$\frac{x-2}{3} = 0,3. \quad x = 3\cdot 0,3 + 2 = 2,9.$$

Ответ: $x_{0,3} = 2,9.$