ЛЕКЦИЯ 8

Теория вероятностей и математическая статистика

Неравенства и предельные теоремы

Неравенства

- **Неравенство Маркова.**

Для любой случайной величины ξ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathrm{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|^k}{\varepsilon^k}}$$

Доказательство.

$$M|\xi|^k = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k|\, dF_\xi(x) \geq \int_{|x|\geq\varepsilon} |x^k|\, dF_\xi(x) \geq$$

$$\geq \varepsilon^k \cdot \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_\xi(x) = \varepsilon^k \cdot P(|\xi| \geq \varepsilon).$$

Неравенство Чебышёва

Для любой случайной величины ξ и для любого ε >0

$$\boxed{\mathrm{P}(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}}$$

Доказательство

В неравенстве Маркова (1) подставим вместо ξ

ξ –Mξ

и возьмем k=2.

$$\mathrm{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|^k}{\varepsilon^k} (1)$$

$$\mathrm{P}(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi - M\xi|^2}{\varepsilon^2}$$

$$\mathrm{P}(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Пример применения неравенства Чебышёва

- **Оценить вероятность того, что сл.в. отклонится от своего матожидания**

  на величину

  ≥ 2σ, где σ – средне – квадратичное отклонение.

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

$$P(|\xi - M\xi| \geq 2\sigma) \leq \frac{D\xi}{(2\sigma)^2},$$

$$D\xi = \sigma^2,$$

$$P(|\xi - M\xi| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}.$$

Неравенства

- **Неравенство Коши – Буняковского – Шварца.**

$$\boxed{M|\xi \cdot \eta| \le \sqrt{M\xi^2 \cdot M\eta^2}}$$

Сходимость по вероятности

Определение. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сходится по вероятности к сл. в. ξ, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$$

Сходимость по вероятности

- **Обозначение:**

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

Замечание:

«p» есть сокращение от «probability»

Пример

Последовательность случайных величин

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ задана законом:

ξ_n	0	1	2
P	2/n	1/n	1 – 3/n

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \equiv 2$$

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- **Определение.** Говорят, что к последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с математическими ожиданиями $M\xi_i = a_i$, $i=0,1,\ldots,n$, применим закон больших чисел, если

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}}$$

- **Смысл:** среднее значение случайных величин стремится по вероятности к среднему их матожиданий (то есть, к **постоянной** величине).
- **Замечание.** ЗБЧ справедлив при некоторых условиях. Различные группы условий определяют разные формы закона больших чисел.

ЗБЧ в форме Чебышёва

<u>Теорема.</u> Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ с математическими ожиданиями $M\xi_i=a_i$

и с дисперсиями $D\xi_i=\sigma^2_i$, $i=0,1,\ldots,n$, выполняются условия:

1) сл.в. $\{\xi_n\}$ независимы;
2) дисперсии всех сл.в. $\{\xi_n\}$ ограничены одним и тем же числом, ($\sigma^2_i \le A$ для всех i),

то к $\{\xi_n\}$ применим ЗБЧ, то есть

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$$

- Доказательство основано на неравенстве Чебышёва. Надо показать, что выполняется определение сходимости по вероятности.

Доказательство ЗБЧ в форме Чебышёва

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}{n^2}\leq\frac{nA}{n^2}=\frac{A}{n}.$$

$$T.o., P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{A}{n\varepsilon^2}$$

$$\frac{A}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

ЗБЧ в форме Бернулли

- **<u>Теорема.</u> Пусть осуществляется серия из n независимых опытов, проводимых по схеме Бернулли с параметром p, пусть m – число успехов, m/n – частота успехов в данной серии испытаний. Тогда**

$$\boxed{\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p}$$

Доказательство ЗБЧ в форме Бернулли

- Рассмотрим случайную величину ξ_i, равную числу успехов в i –ом испытании, i = 1, …, n.

Случайные величины ξ_i имеют распределение Бернулли. Число успехов в n испытаниях, равное m, можно представить как сумму успехов в отдельных испытаниях.

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{n} \xi_i}$$

$a_i = M\xi_i = p.$

Таким образом,
(*) можно записать
в виде (**),
что представляет
из себя
формулировку
ЗБЧ.

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p \quad (*)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \quad (**)$$

- ξ_i независимы и их дисперсии ограничены одним числом

($D\xi_i = pq < 1$) следовательно, выполняются условия ЗБЧ в форме Чебышёва.

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p \quad (*)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \quad (**)$$

ЗБЧ в форме Пуассона

- **Теорема.** Пусть осуществляется серия из n независимых опытов, причем вероятность успеха в i –м опыте равна p_i. Пусть m – число успехов, m/n – частота успехов в данной серии испытаний. Тогда

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}$$

Доказательство ЗБЧ в форме Пуассона

- Рассмотрим случайную величину ξ_i, равную числу успехов в i–м испытании, i =1, …, n.

Случайные величины ξ_i имеют распределение Бернулли, $a_i = M\xi_i = p_i$.

- **Замечание.** Единственное отличие от предыдущей теоремы – что величины имеют различные матожидания $a_i = M\xi_i = p_i$ и различные дисперсии $D\xi_i = p_i q_i$.
- Доказательство проводится как в предыдущем случае.

ЗБЧ в форме Хинчина

Теорема. Для того, чтобы к последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ был применим ЗБЧ, достаточно, чтобы:

1) сл.в. $\{\xi_n\}$ независимы;
2) сл.в. $\{\xi_n\}$ одинаково распределены.

Тогда

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} \xrightarrow{p} a}$$

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

- В теоремах этой группы выясняются условия, при которых возникает нормальное распределение. Общим для этих теорем является следующее обстоятельство: закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин при некоторых условиях неограниченно приближается к нормальному.

Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных сл. в.

- **Если случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания $M\xi_i = a$ и дисперсии $D\xi_i = \sigma^2$, $i=0,1,\ldots,n$, то при $n \to \infty$**

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$$

$$т.е., \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \to u \in N(0,1)$$

Смысл ЦПТ для н.о.р.сл.в.

- Закон распределения **суммы** достаточно большого числа **независимых одинаково распределенных** случайных величин приближается к **нормальному** закону.
- При числе слагаемых около 10 закон распределения суммы уже близок к нормальному.

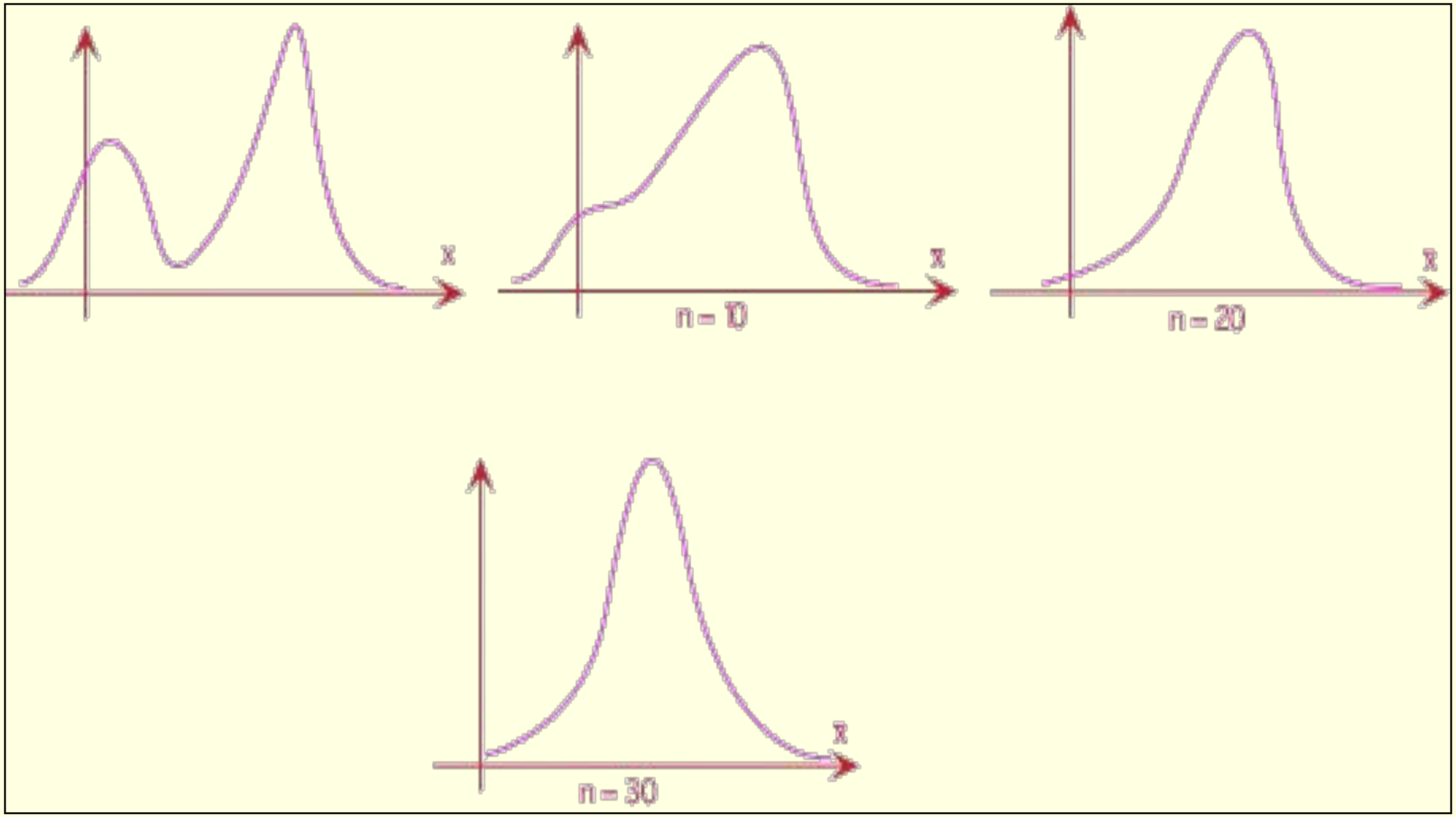
ЦПТ

- **Теорема Ляпунова**. Если случайная величина ξ представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин ξ_1, $\xi_2,\ldots,\xi_n$, влияние каждой из которых на всю сумму равномерно мало, то величина ξ имеет распределение, близкое к нормальному, и тем ближе, чем больше n.

Смысл ЦПТ в форме Ляпунова

- Закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин, каждая из которых мало влияет на сумму, приближается к нормальному закону.
- При этом важно то, что законы распределения суммируемых случайных величин могут быть любыми, заранее не известными исследователю.
- При числе слагаемых около 10 закон распределения суммы уже близок к нормальному.

Зависимость от числа слагаемых



Практическое значение ЦПТ

- **Многие случайные величины можно рассматривать как сумму отдельных независимых слагаемых.**
- **Например:**
- **ошибки различных измерений;**
- **отклонения размеров деталей, изготовляемых при неизменном технологическом режиме;**
- **распределение числа продаж некоторого товара, объемов прибыли от реализации однородного товара различными производителями;**

- **валютные курсы;**
- **рост, вес животных и растений данного вида;**
- **отклонение точки падения снаряда от цели. Из ЦПТ следует, что они могут рассматриваться как суммарный результат большого числа слагаемых и потому приближенно следовать нормальному закону распределения.**