Модели стационарных и нестационарных временных рядов

Стационарные временные ряды

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1}^{T_2} y_t = \frac{1}{T_4 - T_3} \sum_{t=T_3}^{T_4} y_t = \bar{y}_2 \quad (1)$$

$$D_1(y) = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1}^{T_2} (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{T_4 - T_3} \sum_{t=T_3}^{T_4} (y_t - \bar{y})^2 = D_2(y) \quad (2)$$

$$r_i^{(1)} = \sum_{t=T_1}^{T_2 - i} \frac{(y_t - \bar{y})(y_{t+i} - \bar{y})}{(T_2 - T_1 - i) \cdot D(y)} = \sum_{t=T_3}^{T_4 - i} \frac{(y_t - \bar{y})(y_{t+i} - \bar{y})}{(T_4 - T_3 - i) \cdot D(y)} = r_i^{(2)}, i = 1,2,\ldots \quad (3)$$

Параметрические тесты стационарности

- тестирование математического ожидания

$$(1,T): \; y_1, y_2, ..., y_T$$

$$\Rightarrow y_1, y_2, ..., y_{T_1}$$

$$\Rightarrow y_{T_{i+1}}, y_{T_{i+2}}, ... y_T, T_2 = T - T_1$$

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad s_1^2, \quad s_2^2$$

критерий Стьюдента:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2: \quad \tau = \frac{\left|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{T_1} + \dfrac{s_2^2}{T_2}}} \quad (4)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2: \quad \tau = \frac{\left|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right|}{s} \sqrt{\frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2}} \quad (5)$$

$$\tau < \tau_{кр.}(\alpha; T - 2) \quad (6)$$

критерий Фишера:

$$F = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} T_j \left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2}{\bar{s}^2(n)} \quad (7)$$

$$\bar{s}^2(n) = \frac{1}{T-n}\sum_{j=1}^{n}\left(T_j - 1\right)\cdot \bar{s}_j^2$$

$$F < F_{кр.}\left(\alpha; n-1; \sum_{j=1}^{n} T_j - n\right) \quad (8)$$

Параметрические тесты стационарности

- тестирование дисперсии

критерий Фишера:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (9)$$

$$F_{кр.}\left(1-\alpha/2; T_1-1; T_2-1\right) \le F \le F_{кр.}\left(\alpha/2; T_1-1; T_2-1\right) \quad (10)$$

$$F\left(\alpha/2; v_1; v_2\right) = \frac{1}{F\left(1-\alpha/2; v_1; v_2\right)} \quad (11)$$

$$F \le F_{кр.}\left(\alpha/2; T_1-1; T_2-1\right) \quad (s_1^2 \ge s_2^2) \quad (12)$$

стандартизованное нормальное распределение:

$$40 \le T \le 100: \quad \Rightarrow \Phi = \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{s_1^2}{s_2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}} \sim N(0,1) \quad (13)$$

$$T > 100: \quad \Rightarrow \Phi = \left(s_1 - s_2\right)\sqrt{\frac{s_1^2}{2T_1} + \frac{s_2^2}{2T_2}} \sim N(0,1) \quad (14)$$

$$\Phi < \Phi_{\alpha/2} \quad (15)$$

критерий Кокрена:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_n : \quad \Rightarrow K = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + \ldots + s_n^2} \quad (16)$$

$$s_{\max}^2 = \max_j \left(s_j^2 \right), \quad j = \overline{1, n}$$

$$K(\alpha; n; N-1) =$$

$$= \frac{F(1 - \alpha / n; N-1; (n-1)(N-1))}{(n-1) + F(1 - \alpha / n; N-1; (n-1)(N-1))} \quad (17)$$

$$K < K(\alpha; n; N-1) \quad (18)$$

критерий Бартлетта:

$$\lambda = -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - 1\right)\ln\frac{s_i^2}{s^2} \qquad (19)$$

$$\lambda \sim \chi^2(n-1)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - 1\right)s_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - 1\right)}$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - 1\right)}$$

(при больших T c ≈1)

$$v_i = T_i - 1$$

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v$$

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i - 1) = T - n$$

$$\lambda = \frac{1}{c} n v \left(\ln \bar{s}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \right) \quad (20)$$

$$c = 1 + \frac{n+1}{3 \cdot n \cdot v}$$

$$\lambda < \chi^2 (\alpha, n-1)$$

Непараметрические тесты стационарности

тест Манна-Уитни:

$$u_1^* = T_1 T_2 + \frac{T_1(T_1+1)}{2} - R_1 \quad (21)$$

$$u_2^* = T_1 T_2 + \frac{T_2(T_2+1)}{2} - R_2 \quad (22)$$

$$u^* = \max(u_1^*, u_2^*)$$

$$M\left[u^*\right] \approx \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \quad (23)$$

$$D[u^*] \approx \frac{T_1 \cdot T_2 \cdot (T_1 + T_2 + 1)}{12} \quad (24)$$

$$z = \frac{u^* - \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \pm \frac{1}{2}}{\sigma(u^*)} \quad (25)$$

$$u_{1-\alpha/2} \leq z \leq u_{\alpha/2} \quad (26)$$

Непараметрические тесты стационарности

тест Сигела-Тьюки:

$$z = \frac{R_1 - \frac{T_1 \cdot (T_1 + T_2 + 1)}{2} \pm \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{T_1 \cdot T_2 \cdot (T_1 + T_2 + 1)}{12}}} \sim N(0,1) \quad (27)$$

$$u_{1-\alpha/2} \le z \le u_{\alpha/2} \quad (26)$$

Непараметрические тесты стационарности

критерий Вальда-Вольфовица:

$$M\left[N_s\right] = \frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2} + 1 \quad (28)$$

$$D\left[N_s\right] = \frac{2N_1N_2 \cdot \left[2N_1 \cdot N_2 - \left(N_1 + N_2\right)\right]}{\left(N_1 + N_2\right)^2 \cdot \left(N_1 + N_2 - 1\right)} \quad (29)$$

$$z = \frac{N_s - M\left[N_s\right] \pm \frac{1}{2}}{\sigma\left(N_s\right)} \quad (30)$$

$$u_{1-\alpha/2} \le z \le u_{\alpha/2} \quad (26)$$

Преобразование нестационарных временных рядов в стационарные

$$y'_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad (31)$$

$$y''_t = \Delta y'_t = y'_t - y'_{t-1} = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} \quad (32)$$

$$y'_t = \ln \frac{y_t}{y_{t-1}} = \ln y_t - \ln y_{t-1} \quad (33)$$

$$y'_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (34)$$

$$y'_t = f(y_t) = const$$

$$\mu = M[\varepsilon_t] = const$$

$$\sigma_z^2 = const$$

$$\gamma_{t_1, t_2,} = 0, \quad t_1 \neq t_2$$

$$\tau(r_k) = \frac{|r_k|}{\sigma(r_k)} \quad (35)$$

формула Бартлетта:

$$D(r_k) = \frac{1}{T} \sum_{i=-j}^{i=j} \left(r_i^2 + r_{i+k} r_{i-k} - 4 r_k r_{i-k} + 2 r_i^2 r_k^2 \right) \quad (36)$$

совокупный критерий согласия Бокса-Пирса:

$$Q = T \sum_{i=1}^{q} r_i^2 \quad (37)$$

$$Q < \chi^2(\alpha, q) \quad (38)$$

Модели авторегрессии (АР)

Модель авторегрессии k-го порядка АР(k) имеет вид:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (39)$$

$$M\left[y_t, y_{t-i}\right] = \alpha_1 \cdot M\left[y_{t-1}, y_{t-i}\right] + \alpha_2 \cdot M\left[y_{t-2}, y_{t-i}\right] + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_k M\left[y_{t-k}, y_{t-i}\right] + M\left[\varepsilon_t, y_{t-i}\right] \qquad (40)$$

$$M\left[y_{t-i}, y_{t-j}\right] = \frac{1}{T-(i-j)} \sum_{t=i-j}^{T} y_{t-i} \cdot y_{t-j} =$$
$$= \frac{1}{T-(i-j)} \sum_{t=i-j}^{T} y_t \cdot y_{t-(i-j)} = \operatorname{cov}\left(y_{t-i}, y_{t-j}\right) = \gamma_r, \quad r = i - j, \quad i \geq j \qquad (41)$$

$$\gamma_i = \alpha_1 \gamma_{i-1} + \alpha_2 \gamma_{i-2} + \ldots + \alpha_k \gamma_{k-i} \qquad (42)$$

$$i > 0: \quad M\left[y_{t-i}, \varepsilon_t\right] = 0$$

$$\rho_i = \alpha_1 \cdot \rho_{i-1} + \alpha_2 \cdot \rho_{i-2} + \ldots + \alpha_k \rho_{i-k} \qquad (43)$$

Система уравнений Юла-Уокера:

$$\begin{cases} r_1 = a_1 + a_2 r_1 + \ldots + a_k r_{k-1} \\ r_2 = a_1 r_1 + a_2 + \ldots + a_k r_{k-2} \\ \ldots \\ r_k = a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} + \ldots + a_k \end{cases} \qquad (44)$$

$$\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + ... + \alpha_k\gamma_k + \sigma_\varepsilon^2 \qquad (45)$$

$$\forall i = 1,2,...,k: \quad \gamma_i = \rho_i\gamma_0$$

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho_1\alpha_1 - \rho_2\alpha_2 - ... - \rho_k\alpha_k} \qquad (46)$$

$$\sigma_y^2 / \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1 - a_1 r_1 - ... - a_k r_k} \qquad (47)$$

Модель АР(1):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (48)$$

$$a_1 = r_1 \quad (49)$$

$$\sigma_y^2 / \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1 - r_1^2} \quad (50)$$

$$r_1 = 0{,}9: \quad \sigma_y^2 / \sigma_\varepsilon^2 \approx 5$$

Модель АР(2):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (51)$$

$$\begin{cases} r_1 = a_1 + a_2 r_1, \\ r_2 = a_1 r_1 + a_2 \end{cases} \quad (52)$$

$$a_1 = \frac{r_1 \cdot (1 - r_2)}{1 - r_1^2}, \quad a_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \quad (53)$$

$$\sigma_y^2 / \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1 - a_1 r_1 - a_2 r_2} \quad (54)$$