Основные понятия теории вероятностей, применяемые в эконометрике

$$F(x) = P(X < x)$$

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

5. $P(X \ge x) = 1 - F(x)$

6. $X \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 1, & x > b \end{cases}$

$$f(x) = F'(x)$$

1. $f(x) \geq 0$

2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$

3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Математическое ожидание СВ:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

1. $M(C) = C$

2. $M(CX) = CM(X)$

3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$

4. $M(aX + b) = aM(X) + b$

5. $M(XY) = M(X)M(Y)$

Дисперсия СВ:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(x))^2 p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - M^2(X)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X)$$

1. $D(C) = 0$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$

3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

4. $D(aX + b) = a^2 D(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{|M(X)|} \cdot 100\%$$

Законы распределений случайных величин

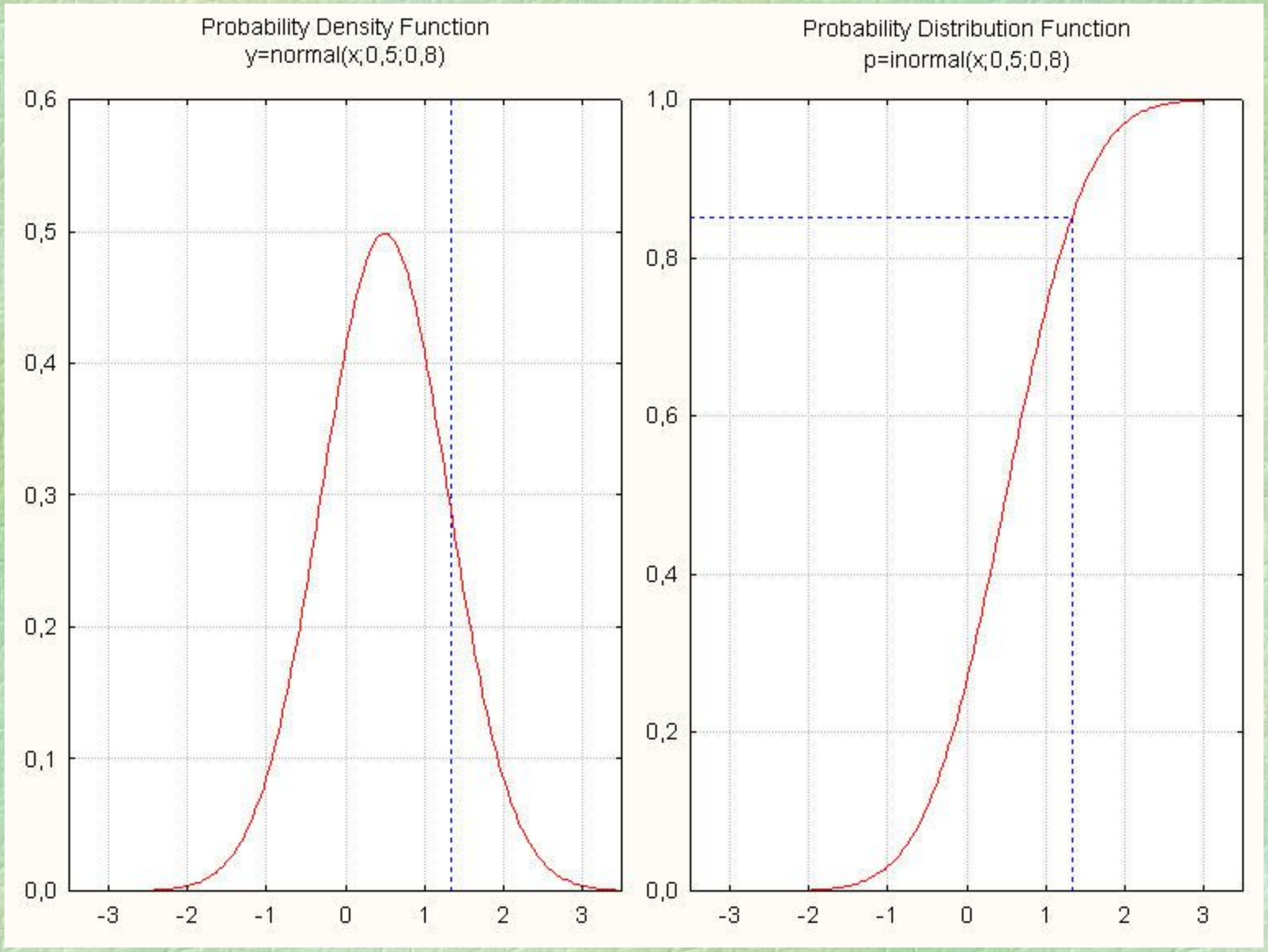
Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$m = M(X), \quad \sigma = \sigma(X), \quad \sigma^2 = D(X)$$

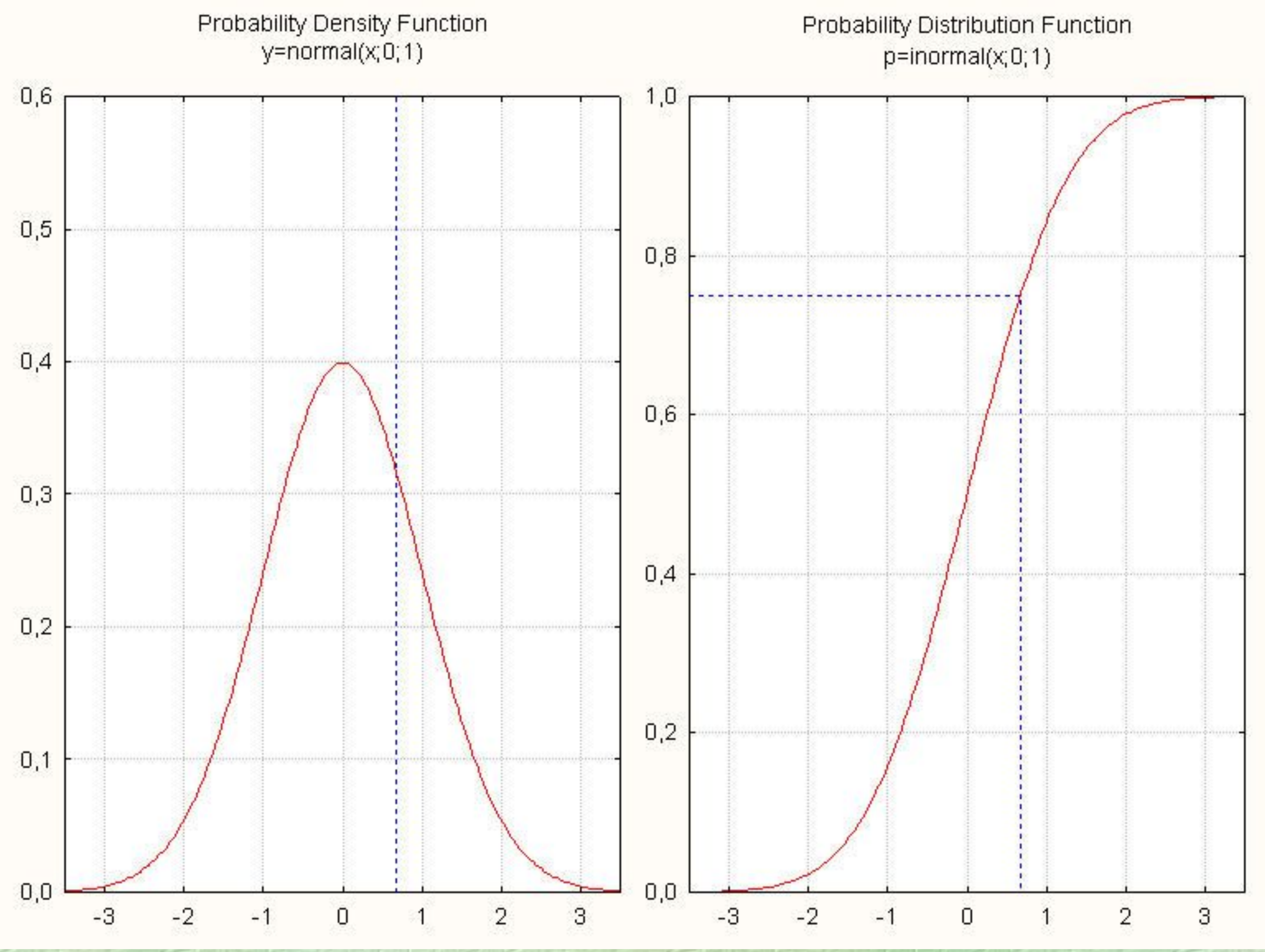
$X \sim N(m, \sigma)$


Probability Density Function
y=normal(x;0,5;0,8)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Probability Distribution Function
p=inormal(x;0,5;0,8)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3

$$m = 0, \quad \sigma = 1 \Rightarrow u \sim N(0,1)$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2}$$

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt$$



Probability Density Function
y=normal(x;0;1)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Probability Distribution Function
p=inormal(x;0;1)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2} dt = F(u) - 0{,}5$$

$$X \sim N(m, \sigma) \Rightarrow$$

$$P(a \le X \le b) = F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$X \sim N(m_x, \sigma_x), \quad Y \sim N(m_y, \sigma_y) \Rightarrow$$

$$Z = aX + bY \sim N(m_z, \sigma_z), \quad m_z = am_x + bm_y, \quad \sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

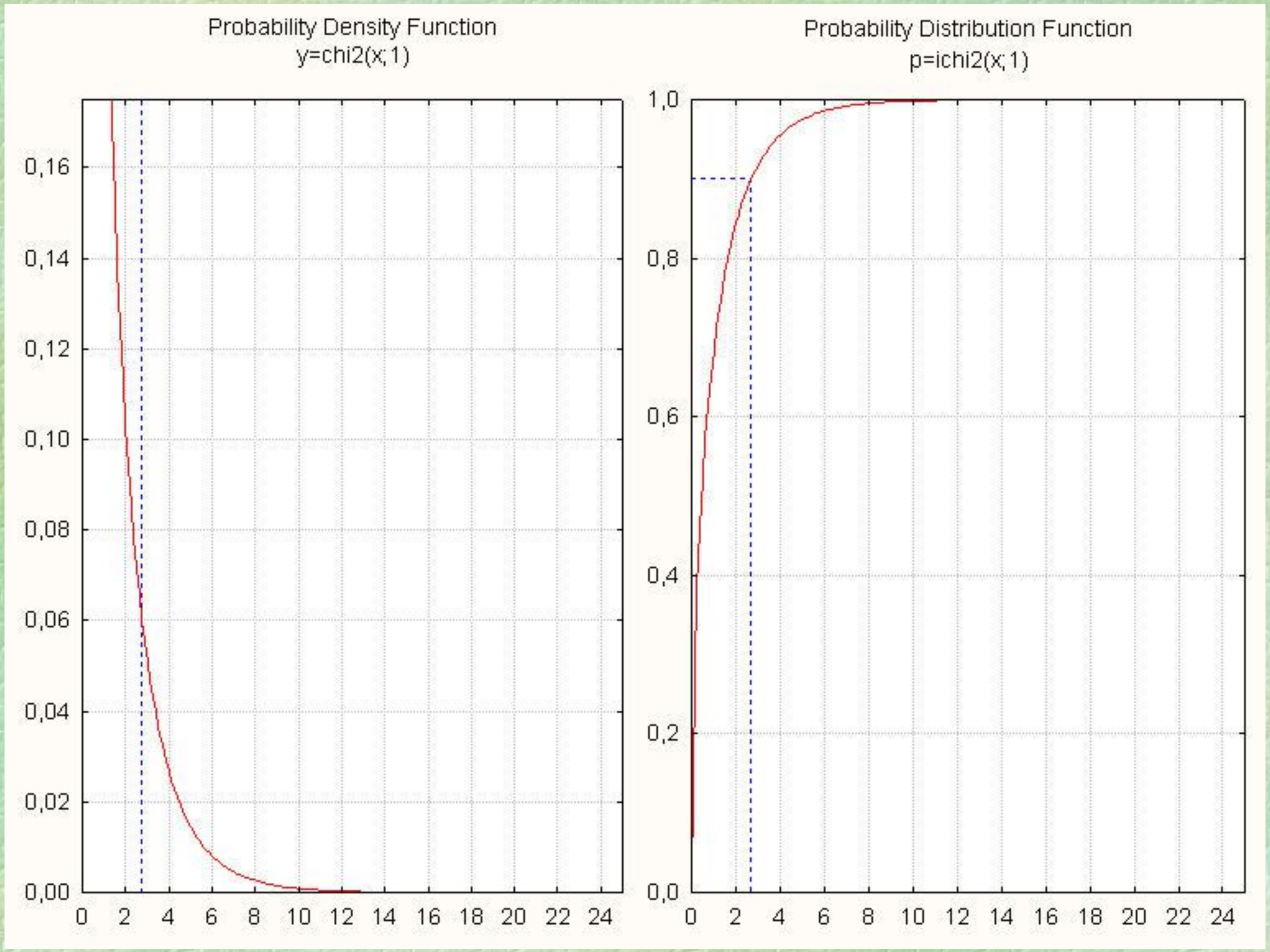
Распределение хи-квадрат (закон Пирсона)

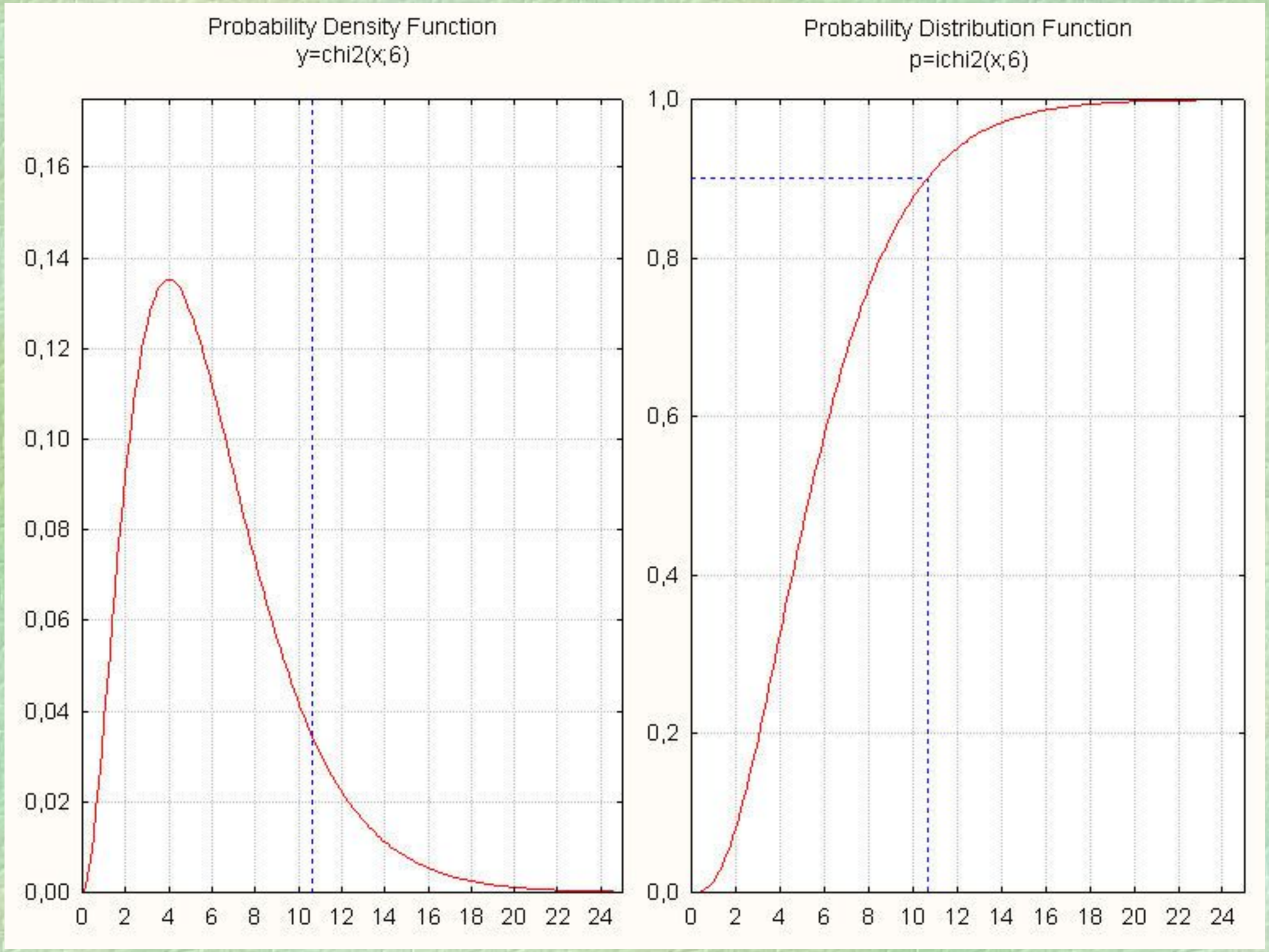
$$X_i \sim N(m_i, \sigma_i), \quad i = \overline{1,n} \Rightarrow \quad U_i = \frac{X_i - m_i}{\sigma_i} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

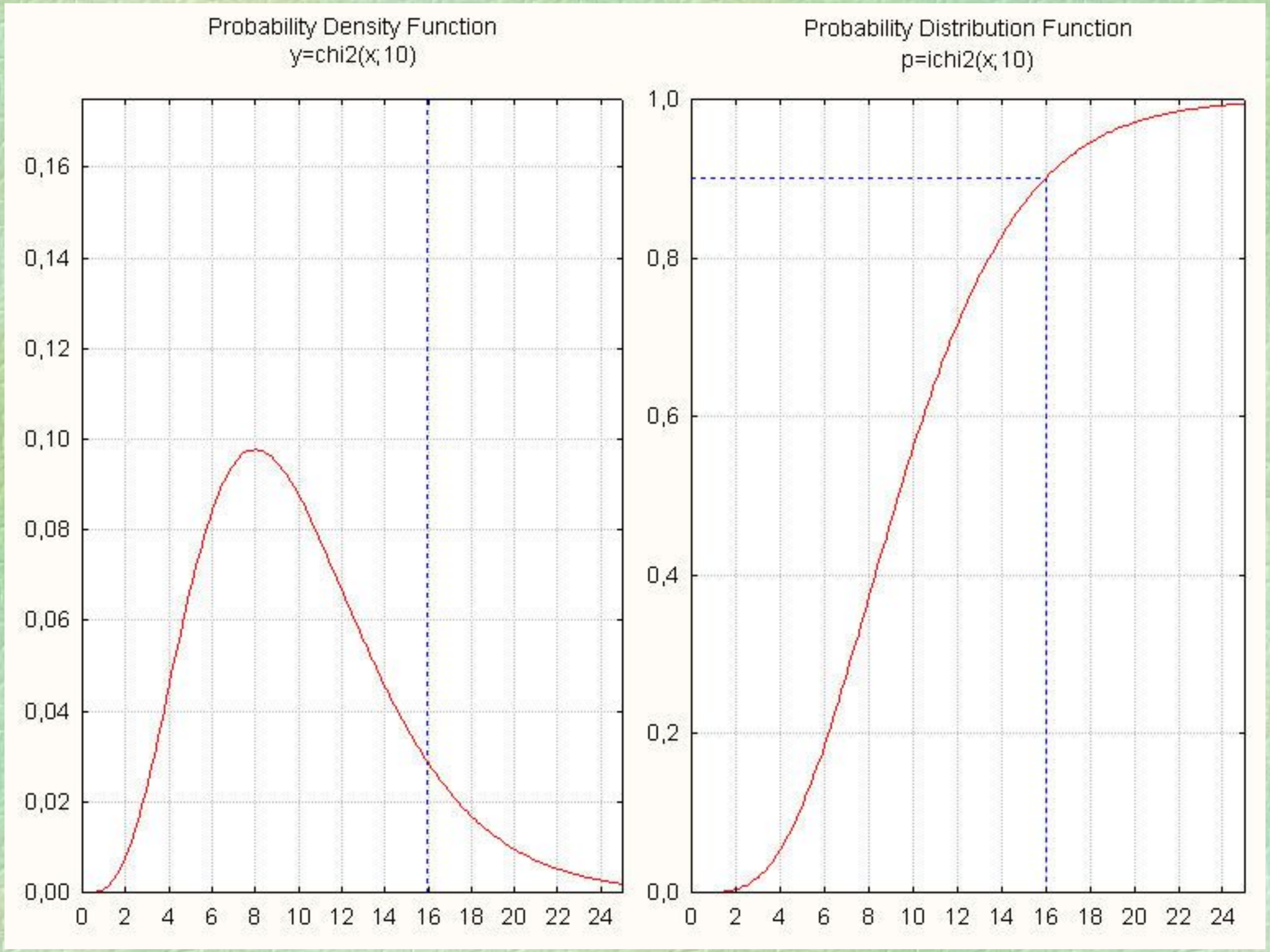
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2, \quad \chi^2 \sim \chi_n^2$$

$$X \sim \chi_n^2, \quad Y \sim \chi_k^2$$

$$\Rightarrow (X + Y) \sim \chi_{n+k}^2$$


Probability Density Function
y=chi2(x;1)
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
Probability Distribution Function
p=ichi2(x;1)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24


Probability Density Function
y=chi2(x;6)
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
Probability Distribution Function
p=ichi2(x;6)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

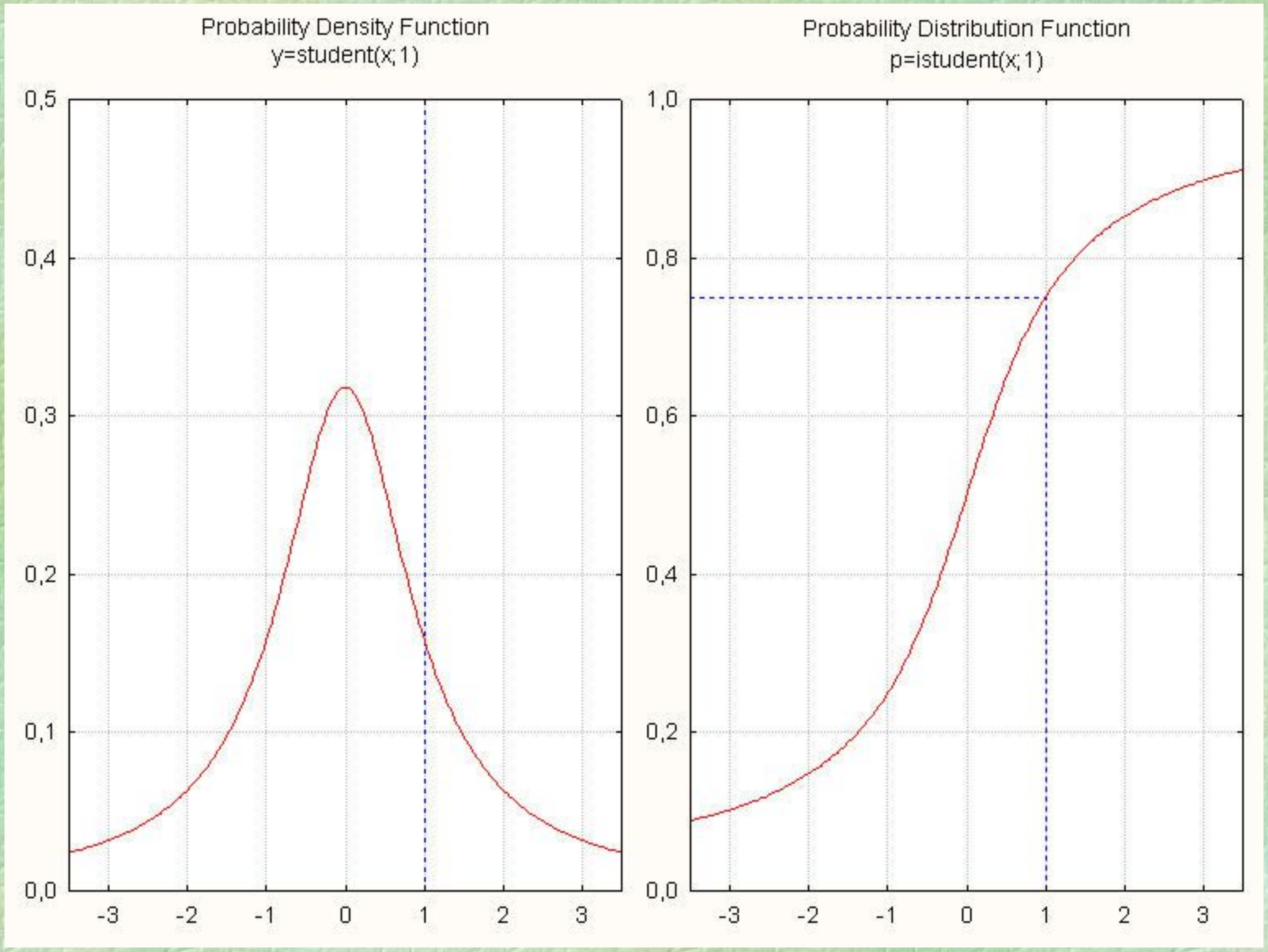

Probability Density Function
y=chi2(x;10)
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
Probability Distribution Function
p=ichi2(x;10)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

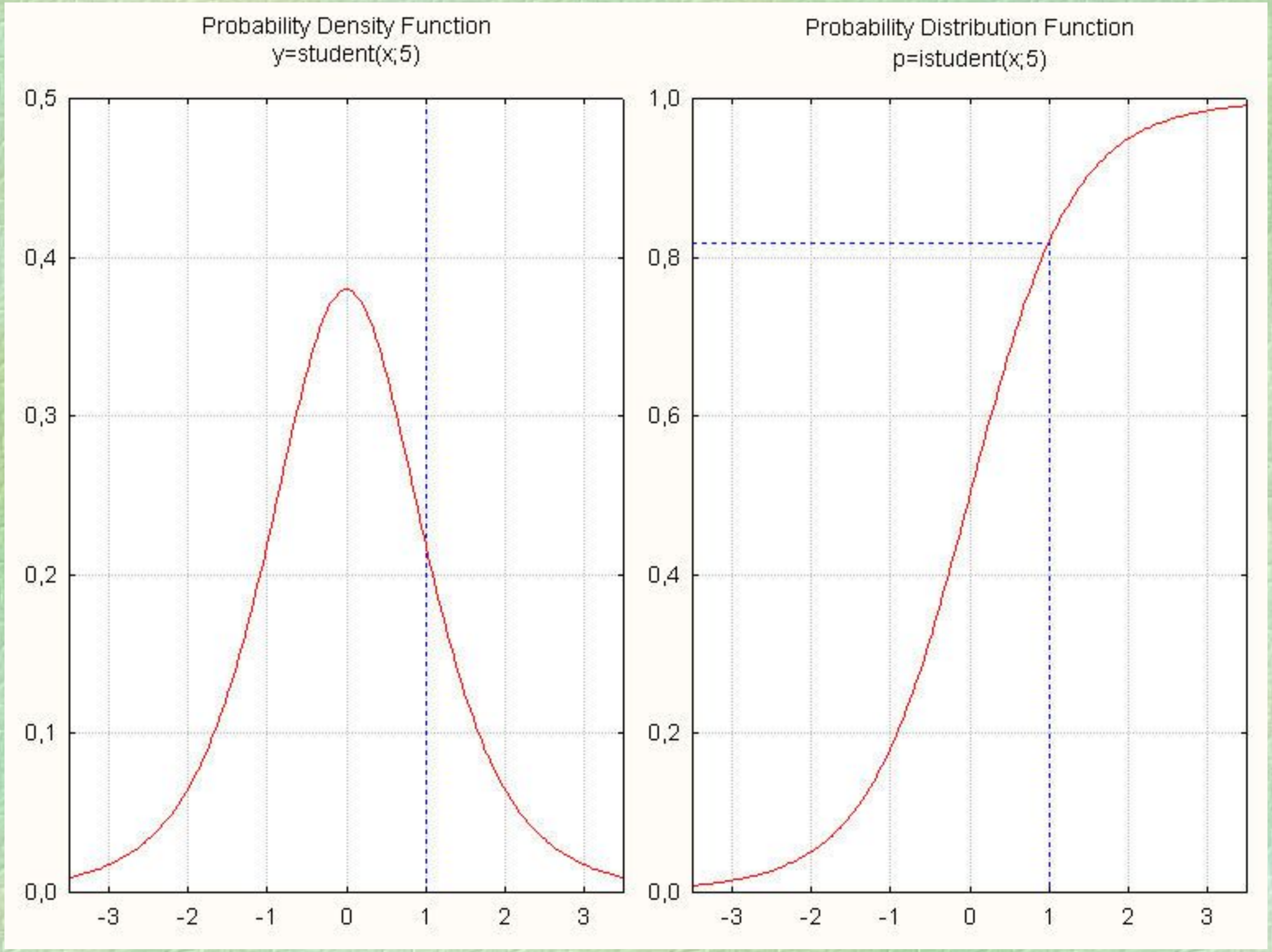
Распределение Стьюдента

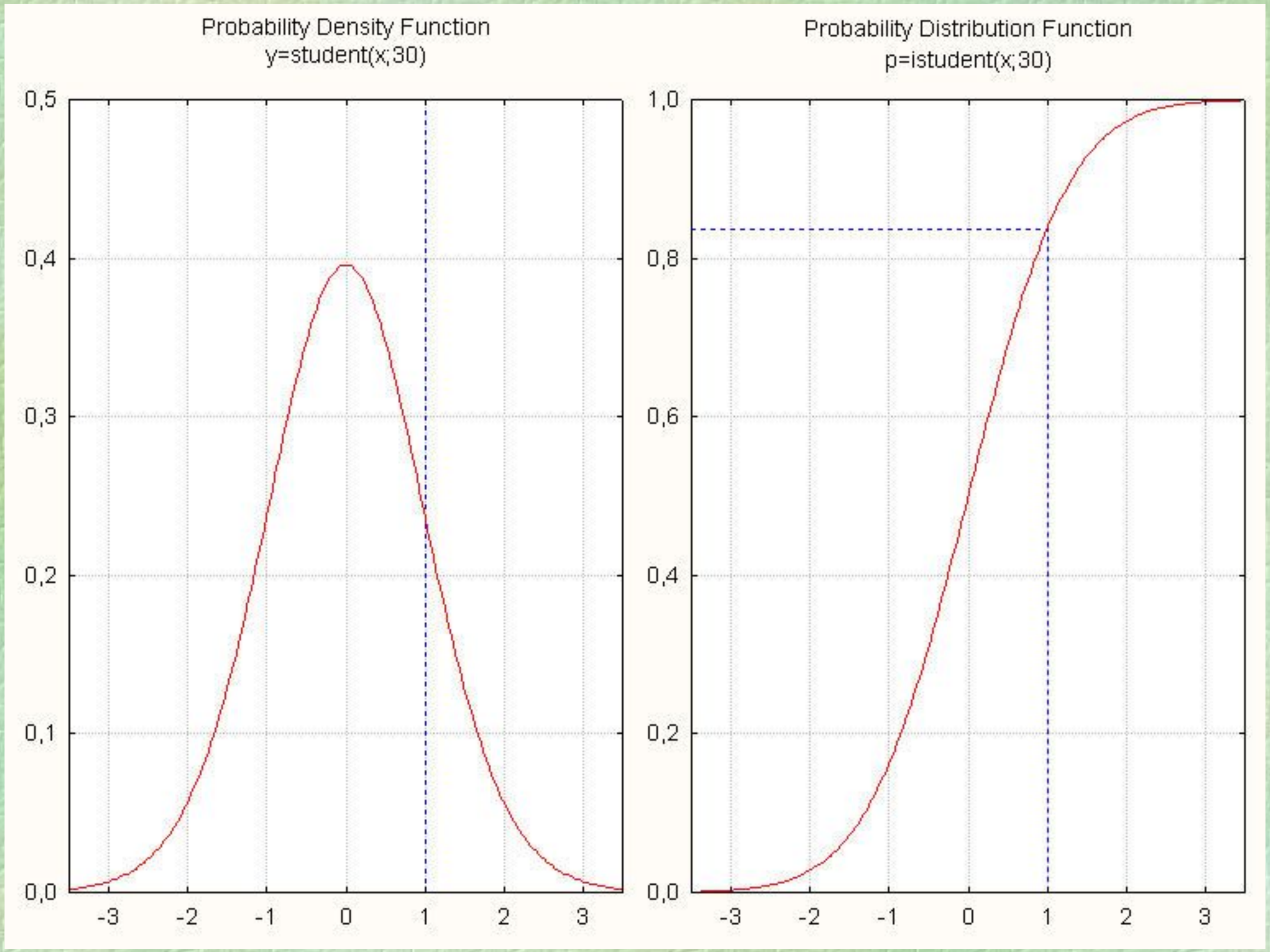
$$U \sim N(0,1), \quad V \sim \chi_n^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{U}{\sqrt{V/n}},$$

$$T \sim T_n$$


Probability Density Function
y=student(x;1)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Probability Distribution Function
p=istudent(x;1)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3


Probability Density Function
y=student(x;5)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Probability Distribution Function
p=istudent(x;5)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3


Probability Density Function
y=student(x;30)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Probability Distribution Function
p=istudent(x;30)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3

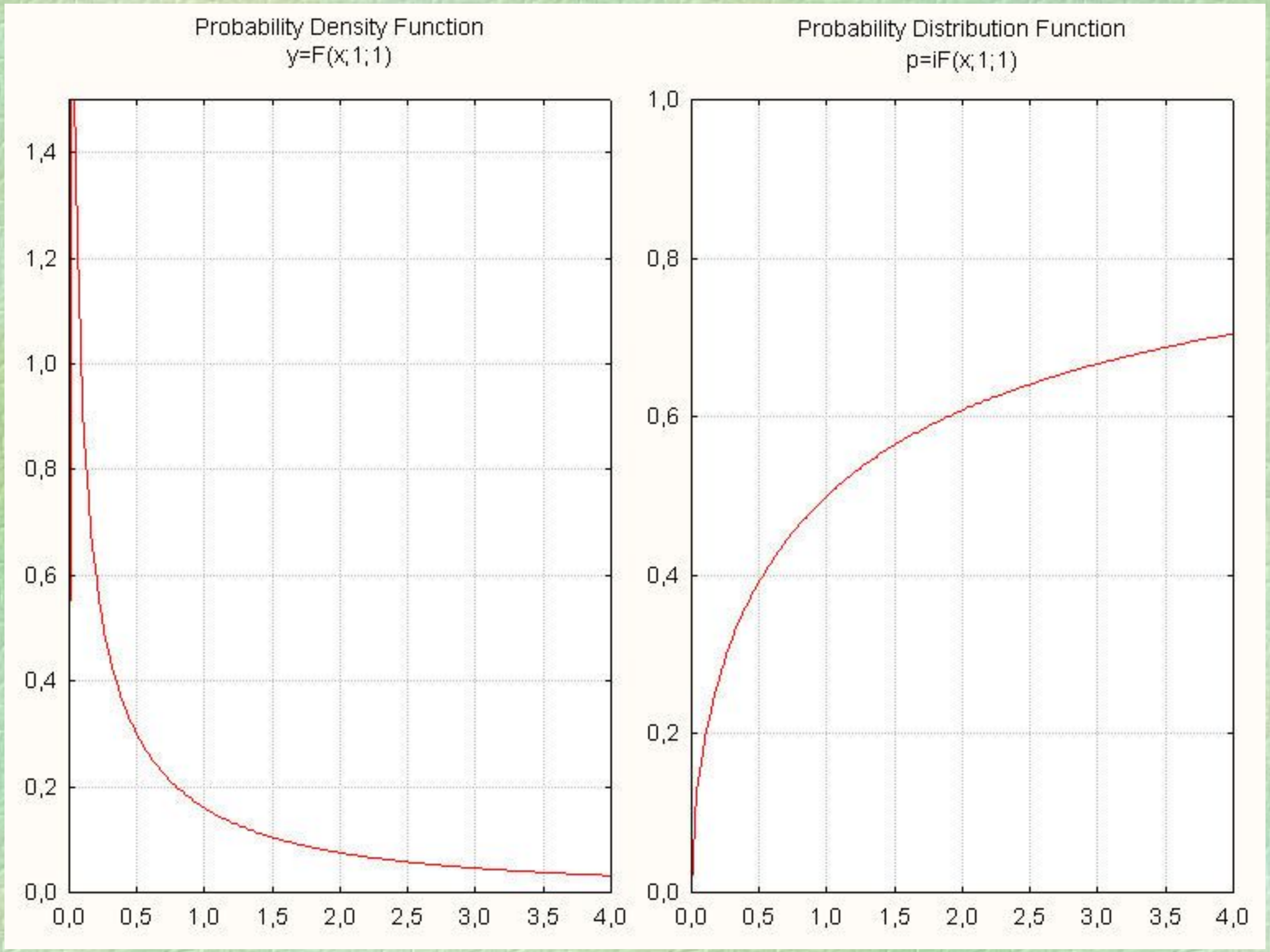
Распределение Фишера

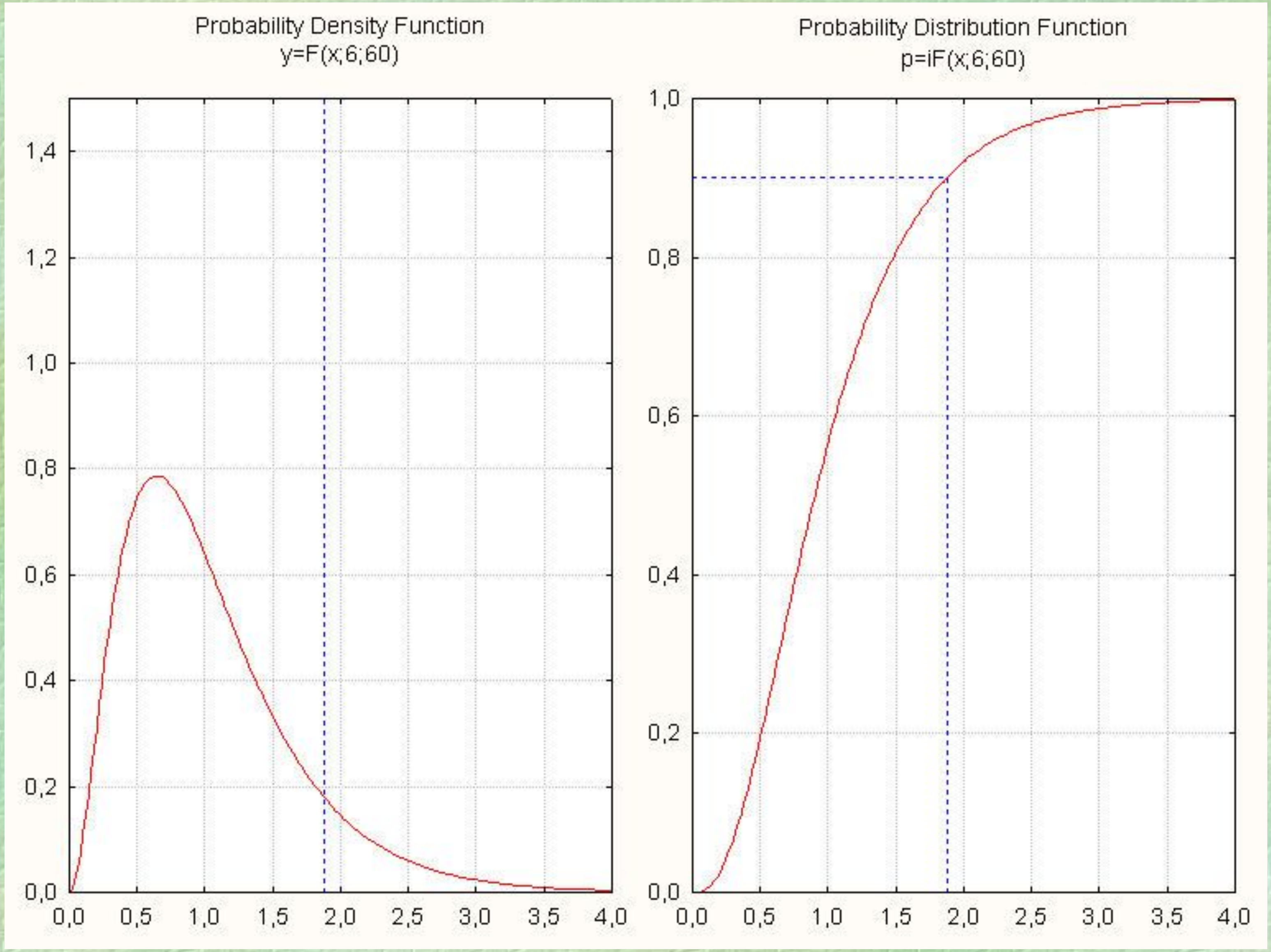
$$V \sim \chi_m^2, \quad W \sim \chi_n^2$$

$$F = \frac{V / m}{W / n}$$

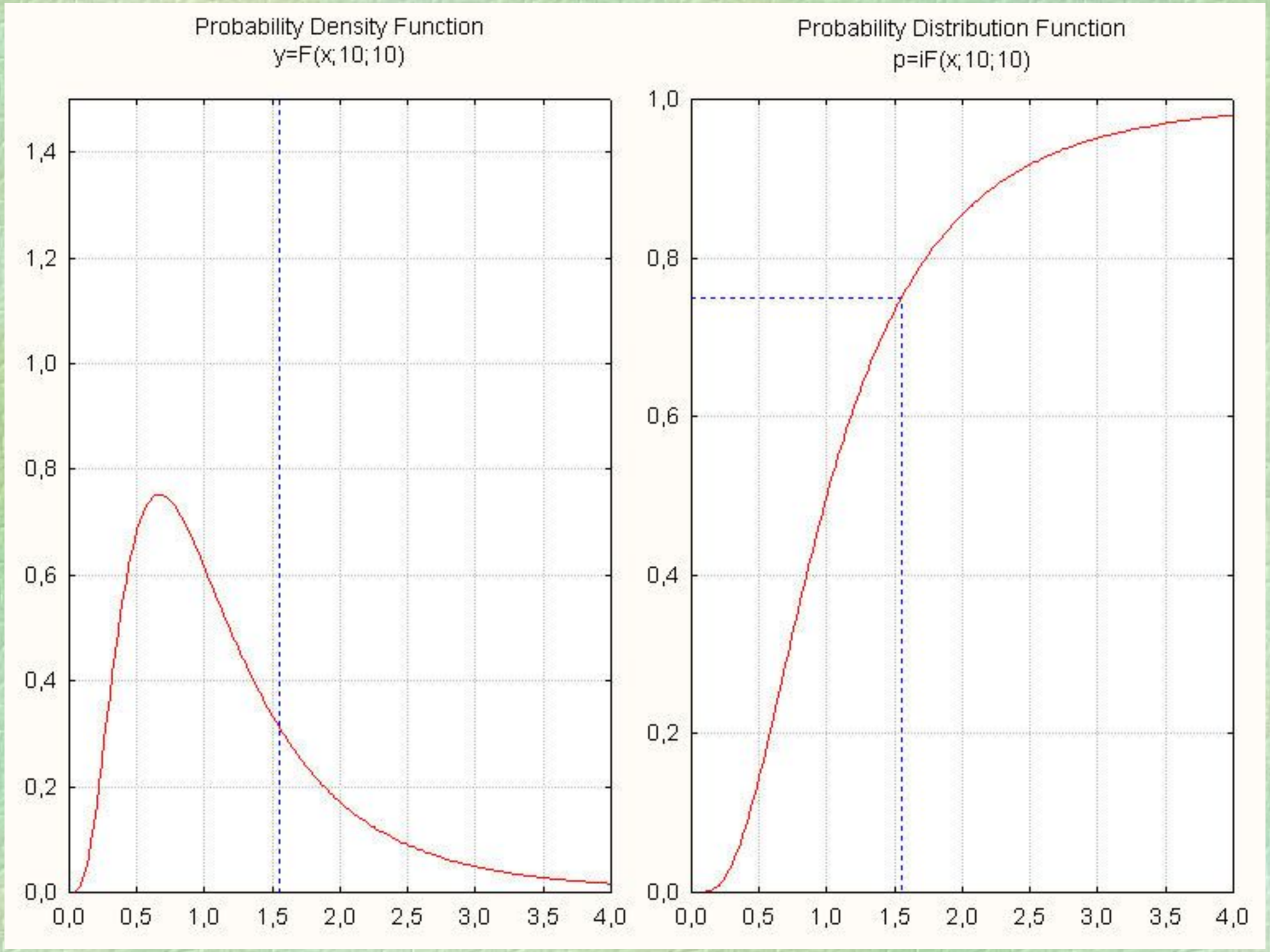
$$F \sim F(m; n)$$

$$T_n^2 = F(1; n)$$


Probability Density Function
y=F(x;1;1)
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
Probability Distribution Function
p=iF(x;1;1)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0



Probability Density Function
y=F(x;6;60)
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
Probability Distribution Function
p=iF(x;6;60)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0



Probability Density Function
y=F(x;10;10)
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
Probability Distribution Function
p=iF(x;10;10)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0

α-квантиль:

$$y_\alpha = P\left(Y > y_\alpha\right) = \int_{y_\alpha}^{+\infty} f\left(y\right)dy = \alpha$$

Взаимосвязь случайных величин

ковариация:

$$\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\big((X - M(X))(Y - M(Y))\big) = M(XY) - M(X)M(Y)$$

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} \sum\limits_{x}\sum\limits_{y} x_i y_j P(x_i, y_j) - M(X)M(Y) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y) \end{cases}$$

1. $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

2. $\sigma_{xx} = D(X) = \sigma_x^2$

3. X, Y – независимы $\Rightarrow$ $\sigma_{xy} = 0$

4. $|\sigma_{xy}| \le \sigma_x \sigma_y$

5. $\mathrm{cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\mathrm{cov}(X, Y),\quad a, b, c, d - const$

Коэффициент корреляции: $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

1. $\rho_{xx} = 1$

2. $\rho_{xy} = \rho_{yx}$

3. $-1 \le \rho_{xy} \le 1$

4. X, Y – независимы $\Rightarrow \rho_{xy} = 0$

5. $|\rho_{xy}| = 1 \Leftrightarrow y = a + bx$

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X, Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$$