

# Ортогональный оператор

1. Ортогональная матрица.
2. Ортогональный оператор.

## 1. Ортогональная матрица

**Определение 1.1.** Действительная квадратная матрица  $Q$  такая что

$$Q^{-1} = Q^T$$

называется **ортогональной матрицей**.

**Следствие 1.2.** Квадратная матрица  $Q$  ортогональна тогда и только тогда, когда

$$Q^T Q = Q Q^T = I.$$

Пример .

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = A^T$$

**Теорема 1.3.** Следующие утверждения эквивалентны для  $n \times n$  матрицы  $A$ .

(a)  $A$  – ортогональная матрица.

(b) Строки матрицы  $A$  образуют ортонормированное множество в евклидовом пространстве строк  $R^n$ .

(c) Столбцы матрицы  $A$  образуют ортонормированное множество в евклидовом пространстве столбцов  $R^n$ .

# Доказательство.

Доказательство проведем для одного из пунктов, остальные доказываются аналогично.

Предположим выполняется пункт (а). Докажем пункт (б).

$$A \cdot A^T = I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \boxtimes & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \boxtimes & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \boxtimes & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \boxtimes \\ A_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T & \boxtimes & A_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \boxtimes & (A_1, A_n) \\ (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \boxtimes & (A_2, A_n) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ (A_n, A_1) & (A_n, A_2) & \boxtimes & (A_n, A_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_i, A_i) = 1, \quad (A_i, A_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad QED$$

## Теорема 1.4. (свойства ортогональной матрицы).

(a) Матрица, обратная к ортогональной, также является ортогональной.

(b) Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

(c) Если  $Q$  ортогональная матрица, то  $\det(Q) = 1$  или  $\det(Q) = -1$ .

# Доказательство.

(a) Пусть  $Q$  – ортогональная матрица,  $B = Q^{-1}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B^T \cdot B &= (Q^{-1})^T \cdot Q^{-1} = (Q^T)^{-1} \cdot Q^{-1} = (Q^{-1})^{-1} \cdot Q^{-1} = \\ &= Q \cdot Q^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad B^T = B^{-1}.\end{aligned}$$

(b) Пусть  $Q, R$  – ортогональные матрицы,  $B = QR \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B^T \cdot B &= (QR)^T \cdot QR = (R^T Q^T) \cdot QR = \\ &= R^T (Q^T \cdot Q) R = R^T R = I \Rightarrow \quad B^T = B^{-1}.\end{aligned}$$

(c) Пусть  $Q$  – ортогональная матрица,

$$\Rightarrow |Q \cdot Q^T| = |I| = 1 = |Q| |Q^T| = |Q| |Q| = |Q|^2 \quad \Rightarrow \quad |Q| = \pm 1.$$

**Теорема 1.5.** Матрица перехода от одной ортонормированной базы к другой в евклидовом пространстве является ортогональной матрицей.

**Доказательство.**

Пусть даны два базиса  $B\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  и  $G\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$  - ортонормированные базисы евклидова пространства:

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)P$$

$P$  – матрица перехода.

$$(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ik} p_{jl} (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \left( (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ik} p_{il} = \begin{cases} 0, k \neq l \\ 1, k = l \end{cases}$$

столбцы  $P$  образуют ортонормированную систему, поэтому  $P$  – ортогональная. QED



## 2. Ортогональный оператор

**Определение 2.1.** Линейный оператор  $\varphi$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $V$  называется **ортогональным**, если он сохраняет длину вектора:

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$$

**Замечание.** На основании определения можно для ортогонального оператора записать

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \Rightarrow \quad (\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

**Теорема 2.** Ортогональный оператор  $\varphi$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве сохраняет скалярное произведение.

**Доказательство.**  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v})$

$$\begin{aligned}(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \\ &= (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{u})) + 2(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) + (\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Сравниваем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Получаем

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

QED

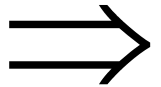
**Теорема 2.3.** Линейный оператор  $\varphi$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $V$  является ортогональным т. и т.т.к. матрица  $T$  оператора в ортонормированном базисе является ортогональной матрицей.

Доказательство.  $\Rightarrow$

$$\varphi(\mathbf{b}_1) = t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n1}\mathbf{b}_n$$

$$\varphi(\mathbf{b}_2) = t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n2}\mathbf{b}_n$$

$$\varphi(\mathbf{b}_n) = t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{nn}\mathbf{b}_n$$

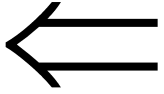


$$(\varphi(\mathbf{b}_k), \varphi(\mathbf{b}_l)) = (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) =$$

$$= (t_{1k}\mathbf{b}_1 + \dots + t_{nk}\mathbf{b}_n, t_{1l}\mathbf{b}_1 + \dots + t_{nl}\mathbf{b}_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ik}t_{jl}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^n t_{ik}t_{il} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

$\Rightarrow$  столбцы матрицы  $T$  образуют ортонормированную систему.



Возьмем произвольный вектор  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$

$$\begin{aligned}(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) &= \\&= (c_1 \varphi(\mathbf{b}_1) + c_2 \varphi(\mathbf{b}_2) + \dots + c_n \varphi(\mathbf{b}_n), c_1 \varphi(\mathbf{b}_1) + c_2 \varphi(\mathbf{b}_2) + \dots + c_n \varphi(\mathbf{b}_n)) = \\&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j))\end{aligned}$$
$$(\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j)) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ik} t_{jl} (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) = \sum_{k=1}^n t_{ik} t_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$
$$(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^n c_i^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

QED