Ортогональный оператор

1. Ортогональная матрица.
2. Ортогональный оператор.

1.Ортогональная матрица

Определение 1.1. **Действительная** квадратная матрица Q такая что

$$Q^{-1} = Q^T$$

называется ортогональной матрицей.

Следствие 1.2. Квадратная матрица Q ортогональна тогда и только тогда, когда

$$Q^T Q = QQ^T = I.$$

Пример .

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A^{T}$$

Теорема 1.3. Следующие утверждения эквивалентны для $n \times n$ матрицы A.

(a) A – ортогональная матрица.

(b) Строки матрицы A образуют ортонормированное множество в евклидовом пространстве строк R^n.

(c) Столбцы матрицы A образуют ортонормированное множество в евклидовом пространстве столбцов R^n.

Доказательство.

Доказательство проведем для одного из пунктов, остальные доказываются аналогично.
Предположим выполняется пункт (a). Докажем пункт (b).

$$A \cdot A^T = I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T & \cdots & A_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \cdots & (A_1, A_n) \\ (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \cdots & (A_2, A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_n, A_1) & (A_n, A_2) & \cdots & (A_n, A_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_i, A_i) = 1, \quad (A_i, A_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j. \qquad QED$$

Теорема 1.4. (свойства ортогональной матрицы).

(a) Матрица, обратная к ортогональной, также является ортогональной.

(b) Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

(c) Если Q ортогональная матрица, то $det(Q) = 1$ или $det(Q) = -1$.

Доказательство.

(a) *Пусть* Q – *ортогональная матрица*, $B = Q^{-1}$

$$\Rightarrow B^T \cdot B = (Q^{-1})^T \cdot Q^{-1} = \ (Q^T)^{-1} \cdot Q^{-1} = \ (Q^{-1})^{-1} \cdot Q^{-1} =$$

$$= Q \cdot Q^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad B^T = B^{-1}.$$

(b) *Пусть* Q, R – *ортогональные матрицы*, $B = QR \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^T \cdot B = (QR)^T \cdot QR = \ (R^T Q^T) \cdot QR =$$

$$= R^T (Q^T \cdot Q) R = R^T R = I \Rightarrow \quad B^T = B^{-1}.$$

(c) *Пусть* Q – *ортогональная матрица*,

$$\Rightarrow \left|Q \cdot Q^T\right| = |I| = 1 = |Q|\left|Q^T\right| = |Q||Q| = |Q|^2 \quad \Rightarrow \quad |Q| = \pm 1.$$

Теорема 1.5. Матрица перехода от одной ортонормированной базы к другой в евклидовом пространстве является ортогональной матрицей.

Доказательство.

Пусть даны два базиса $B\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ и $G\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ -ортонормированные базисы евклидова пространства:

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)P$$

P – матрица перехода.

$$(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ik} p_{jl} (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) =$$

$$\left((\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ik} p_{il} = \begin{cases} 0, k \neq l \\ 1, k = l \end{cases}$$

столбцы *P* образуют ортонормированную систему, поэтому P – ортогональная . QED

2. Ортогональный оператор

Определение 2.1. Линейный оператор φ в n-мерном евклидовом пространстве V называется ортогональным, если он сохраняет длину вектора:

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \Rightarrow \quad \left\| \varphi(\mathbf{v}) \right\| = \left\| \mathbf{v} \right\|$$

Замечание. На основании определения можно для ортогонального оператора записать

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \Rightarrow (\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

Теорема 2. Ортогональный оператор φ в n-мерном евклидовом пространстве сохраняет скалярное произведение.

Доказательство. $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v})$

$$(\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}))=(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})=$$

$$=(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{u}))+2(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v}))+(\varphi(\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{v}))=$$

$$=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v}))+(\mathbf{v},\mathbf{v}).$$

Сравниваем

$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v}))+(\mathbf{v},\mathbf{v}).$$

Получаем

$$(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v}))=(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

QED

Теорема 2.3. Линейный оператор φ в n-мерном евклидовом пространстве V является ортогональным т. и т.т.к. матрица T оператора φ в ортонормированном базисе является ортогональной матрицей.

Доказательство. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{b}_1) &= t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{b}_n \\
\varphi(\mathbf{b}_2) &= t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{b}_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(\mathbf{b}_n) &= t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{b}_n
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$(\varphi(\mathbf{b}_k), \varphi(\mathbf{b}_l)) = (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) =$$

$$= (t_{1k}\mathbf{b}_1 + \ldots + t_{nk}\mathbf{b}_n, t_{1l}\mathbf{b}_1 + \ldots + t_{nl}\mathbf{b}_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ik}t_{jl}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}t_{il} = \begin{cases} 0, k \neq l \\ 1, k = l \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *столбцы матрицы T образуют ортонормированную систему.*

$$\Leftarrow$$

Возьмем произвольный вектор **v**: $\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \ldots + c_n\,\mathbf{b}_\mathrm{n}$

$$(\varphi(\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{v})) =$$

$$= (\mathrm{c}_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \mathrm{c}_2\varphi(\mathbf{b}_2) + \ldots + \mathrm{c}_\mathrm{n}\varphi(\mathbf{b}_\mathrm{n}), \mathrm{c}_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \mathrm{c}_2\varphi(\mathbf{b}_2) + \ldots + \mathrm{c}_\mathrm{n}\varphi(\mathbf{b}_\mathrm{n})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j (\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j))$$

$$(\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} t_{ik} t_{jl} (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} t_{jk} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

$$(\varphi(\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

QED