Симметрический оператор

1. Симметрическая матрица
2. Симметрический оператор

1. Симметрическая матрица

Определение 1.1. **Действительная** матрица A называется симметрической, если

$$A^T = A$$

Из определения следует, что симметрическая матрица – квадратная матрица.

Элементы матрицы *симметричны относительно главной диагонали*

$$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}, \quad a_{kj} = a_{jk},$$

Примеры.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ симметрична
.

I_n симметрична
.

Теорема 1.2. Пусть *A* – симметрическая матрица, тогда все собственные значения этой матрицы – действительные числа. Для каждого собственного значения матрицы найдется собственный вектор с действительными координатами.

Доказательство (от противного).

1. Пусть **v** – собственный вектор матрицы *A*, отвечающий собственному значению λ: A **v** =   λ **v** . Предположим, что λ – комплексное число.

Перейдем к сопряженным числам:

$$A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v} \Rightarrow A\bar{\mathbf{v}}=\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} \quad (A - \text{действительная} \quad \text{матрица})$$

Умножим скалярно на **v**:

$$(A\bar{\mathbf{v}},\mathbf{v})=(\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}},\mathbf{v}) \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\bar{v}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\bar{v}_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \bar{\lambda}\left(\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix},\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{1i} v_1 \bar{v}_i + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{ni} v_n \bar{v}_i = \bar{\lambda}(\bar{v}_1 v_1 + \dots + \bar{v}_n v_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \bar{v}_i v_j = \bar{\lambda}(\bar{v}_1 v_1 + \dots + \bar{v}_n v_n) \Rightarrow$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in R \quad \text{и} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{v}_i v_j = \bar{\lambda}(\bar{v}_1 v_1 + \dots + \bar{v}_n v_n)\ (A - \textit{симметрическая}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j + \dots + \bar{v}_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj} v_j = \bar{\lambda}(\bar{v}_1 v_1 + \dots + \bar{v}_n v_n) \Rightarrow$$

$$(\bar{\mathbf{v}}, A\mathbf{v}) = \bar{\lambda}\,(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \Rightarrow (\bar{\mathbf{v}}, \lambda\mathbf{v}) = \bar{\lambda}\,(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \Rightarrow$$

$$\lambda(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) = \bar{\lambda}\,(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v})\ ((\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \in R, (\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) > 0) \Rightarrow \quad \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in R$$

2. Пусть **v** – комплексный собственный вектор матрицы *A*, отвечающий действительному собственному значению λ:

A **v** = λ **v** .

Перейдем к сопряженным числам:

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} \Rightarrow A\overline{\mathbf{v}} = \lambda\overline{\mathbf{v}}$$

Тогда

$$A(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}) = \lambda(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v})$$

и $\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}$ - действительный собственный вектор.

QED

2. Симметрический оператор

Определение 2.1. Линейный φ оператор евклидова пространства E называется симметрическим, если для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ выполняется

$$(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}))$$

Теорема 2.2. Линейный оператор в евклидовом пространстве является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе симметрична.

Доказательство.

$\Rightarrow$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - произвольный ортонормированный базис,

A – матрица оператора.

Тогда

$$(\varphi(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = a_{ji}.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \varphi(\mathbf{e}_j)) =$$

$$= (\mathbf{e}_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ij} \Rightarrow$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (A - \text{симметрическая}).$$

$\Leftarrow$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - произвольный ортонормированный базис, *A* – симметрическая матрица оператора φ, ***u,v*** – два произвольных вектора евклидова пространства и

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j.$$

Тогда

$$(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\sum_{i=1}^{n} u_i \varphi(\mathbf{e}_i), \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (\varphi(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_i v_j (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_i v_j$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} v_j \varphi(\mathbf{e}_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (\mathbf{e}_i, \varphi(\mathbf{e}_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (\mathbf{e}_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{e}_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_i v_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j$$

$$\Rightarrow (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v})$$

QED

Следствие2.3.
(1) Все собственные значения симметрического оператора –
действительные числа.
(2) Любой симметрический оператор имеет хотя бы одно собственное значение.

Теорема 2.4. Собственные векторы симметрического линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{u} \quad \varphi(\mathbf{v}) = \lambda_2 \mathbf{v}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Тогда

$$(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\lambda_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$$

$$(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \lambda_2 \mathbf{v}) = \lambda_2 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

Теорема 2.5. Для любого симметрического линейного оператора евклидова пространства существует ортонормированный базис пространства , составленный из собственных векторов этого оператора.

Доказательство (индукция по размерности пространства).

n=1. Тогда любой ненулевой вектор ***v*** является и базисным, и собственным вектором, отвечающим некоторому собственному значению λ. Нормируем вектор ***v***, получаем

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\Rightarrow \varphi(\mathbf{e})=\varphi\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)=\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\varphi(\mathbf{v})=\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\lambda\mathbf{v}=\lambda\mathbf{e}.$$

ортонормированный базис из собственного вектора.

Допустим, утверждение верно для пространств размерности *n*-1.

Перейдем к пространству Е размерности *n*.

Пусть ***b*** – собственный вектор, отвечающий некоторому собственному значению.

Нормируем этот вектор, получаем единичный собственный вектор $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Дополним до базиса всего пространства, получим $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$.

Запускаем процесс ортогонализации, начиная с вектора $\mathbf{e}_1$, получим ортогональный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$.

Векторы $\{\mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ образуют ортогональный базис *n*-1 – мерного подпространства *M,*

причем вектор $\mathbf{v} \in M \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = 0$.

Пространство *M* замкнуто относительно оператора и, по индукционному предположению, содержит ортонормированный базис из собственных векторов $\{\mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Тогда $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ есть искомый базис. QED

Следствие 2.6. Матрица симметрического линейного оператора с помощью соответственного выбора ортонормированного базиса, может быть приведена к диагональному виду.

Следствие 2.7. Всякая симметрическая матрица S подобна диагональной D , у которой на диагонали стоят собственные значения матрицы S и

$$D = P^T SP$$

где P – ортогональная матрица.

Пример. В некотором ортонормированном базисе в R^3 линейное преобразование φ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти для φ ортонормированный базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования.

Шаг1. Нахождение СЗ

$$|A-\lambda E| = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

Шаг2. Нахождение СВ

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Система уравнений для собственных векторов:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

В качестве первого вектора берем $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Второй линейно независимый собственный вектор ищем ортогональный к первому, т.е. как решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

Например $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 4$ $$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

В качестве третьего вектора берем $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Шаг 3. Нормируем, получаем

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^T SP = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,4 \end{bmatrix}$$