Квадратичная форма

1.Определения

Определение 1.1.

Квадратичная форма от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть однородный многочлен второй степени от этих переменных

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

В выражении

$$\sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

обычно полагают

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Примеры

$$2x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2$$

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$21x_1^2 + 11x_2^2 - 2x_3^2 - 30x_1x_2 - 8x_2x_3 + 12x_3x_1$$

Квадратичная форма как скалярное произведение в ортонормированном базисе

Длина вектора $\boldsymbol{v}$, $||\boldsymbol{v}||= (\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} v)^{1/2}$;

$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$, скалярное произведение $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$

$$X^T AX=(A^T X)^T X \quad = X^T (AX) = X^T Y$$

Пусть $A=C^TC$. Тогда

$X^T AX= X^TC^TCX=(CX)^TCX=Y^TY$

$X^T AY= X^TC^TCY=(CX)^TCY=Y^TZ$

В терминах матричного умножения КФ можно представить как

$$F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Здесь *A* – матрица квадратичной формы (*A* - симметрическая матрица ($a_{ij} = a_{ji}$)). Ранг матрицы *A* называют также рангом квадратичной формы.

Линейное преобразование квадратичной формы

Пусть $X^T AX$ есть квадратичная форма от n переменных и

$$X = PY,$$

есть невырожденное линейное преобразование переменных (то есть P – невырожденная матрица). Тогда

$$X^T = (PY)^T = Y^T P^T$$

поэтому

$$X^T AX = Y^T P^T APY = Y^T (P^T AP)Y = Y^T BY$$

где $B = P^T AP$.

Лемма 1.2. Пусть А – симметрическая матрица и Р – невырожденная матрица. Тогда матрица В = $P^T AP$ снова является симметрической.

Доказательство.

$$b_{ij} = (p_{i1}p_{i2}\ldots p_{in})A\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = (\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{k1}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{k2}\ldots\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{kn})\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{k1}p_{lj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}p_{lj}a_{k1}$$

$$b_{ji} = (p_{j1}p_{j2}\ldots p_{jn})A\begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} = (\sum_{l=1}^{n} p_{jl}a_{l1}\sum_{k=1}^{n} p_{jl}a_{l2}\ldots\sum_{k=1}^{n} p_{jl}a_{ln})\begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{il}a_{lk}p_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}p_{lj}a_{lk} = (a_{kl} = a_{lk}) = b_{ij}$$

Следствие 1.3. $Y^T BY$ также является квадратичной формой от n переменных.

Определение 1.4. Две симметрические матрицы A и B называются конгруэнтными, если существует P – невырожденная матрица, такая что $B = P^T AP$.

Теорема 1.5. Конгруэнтные матрицы имеют одинаковый ранг (таким образом невырожденное линейное преобразование сохраняет ранг формы).

Доказательство. По условию, $B = P^T AP$, тогда $\text{rank } B = \text{rank}(P^T AP)=$ (*P невырождена*) $=\text{rank}(P^T A)= =\text{rank } A$.
QED

2.Каноническая квадратичная форма

Определение 2.1. Канонический вид квадратичной формы (или просто каноническая форма) - это квадратичная форма вида

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \dots + c_nx_n^2$$

(таким образом, матрица канонической формы имеет диагональный вид).

Каноническая квадратичная форма не содержит произведений неизвестных.

Следствие 2.2. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде совпадает с рангом формы.

Для применения метода Лагранжа, удобно пользоваться следующей формулой:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2$$

2.3.Метод Лагранжа

Данный метод состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов. Пу $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ есть данная квадратичная форма.

Возможны два случая:

1. хотя бы один из коэффициентов при квадратах отличен от нуля. Не нарушая общности, будем считать $a_{11} \neq 0$.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n) + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) =$$

(делаем замену $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$)

$$= \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + f_2(x_2, x_3, ..., x_n).$$

$f_2(x_2, x_3, ..., x_n)$ есть квадратичная форма от $x_2, x_3, ..., x_n$, с ней поступаем так же.

Метод Лагранжа (прод.)

2. Все коэффициенты при квадрат $a_{ii} = 0, i = 1, 2, ..., n$, некоторый коэффицие $a_{ij}, i \neq j$ (В противном случае форма тождественно нулевая). Будем $a_{12} \neq 0$ считать, делаем замену $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, ..., x_n = y_n$, появляются ненулевые квадраты от x_1 и x_2. Этот случай сводится к первому.

Замечание 2.4. Линейные преобразование в методе Лагранжа – невырожденные.

В первом случае

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad a_{11} \neq 0$$

Во втором случае

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

2.5.Нормальный вид квадратичной формы

Для действительной квадратичной формы

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2$$

где r = rank A.

Для комплексной квадратичной формы

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2$$

где r = rank A.

Для действительной квадратичной формы преобразование произвольной канонической формы в нормальный вид имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{|c_1|} \cdot x_1, \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ y_r = \sqrt{|c_r|} \cdot x_r, \\ y_{r+1} = x_{r+1} \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

где *r* = rank *A*.

Для комплексной квадратичной формы:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{c_1} \cdot x_1, \\ \quad \dots\dots\dots\dots. \\ y_r = \sqrt{c_r} \cdot x_r, \\ y_{r+1} = x_{r+1} \\ \quad \dots\dots\dots\dots. \\ y_n = x_n \end{cases}$$

где *r* = rank *A*.

Пример

Привести $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 8yz$ к каноническому виду.

Решение. $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 8yz =$

$3(x^2+4/3\ xy+4/9\ y^2 + 8/3\ xz+ 16/9\ yz + 16/9\ z^2) - 4/3\ y^2 - 16/3\ yz - 16/3\ z^2 + 3\ z^2 + 8yz =$

$3(x+2/3\ y+4/3z)^2 - 4/3(y^2 - 2xz + z^2) + 4/3\ z^2 - 7/3z^2 = 3(x+2/3\ y+4/3z)^2 - 4/3(y^2 - 2xz + z^2) - z^2$

$= 3(x+2/3\ y+4/3z)^2 - 4/3(y - z)^2 - z^2$

Определения 2.5.

Количество p положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется положительным индексом квадратичной формы.

Количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется отрицательным индексом квадратичной формы (равен $r - p$, где r – ранг формы) .

Сигнатура – разность между положительным и отрицательным индексами (т.е. $p - (r - p) = 2p - r$)

Закон инерции действительных квадратичных форм

Теорема 2.6. Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным невырожденным линейным преобразованием, не зависит от выбора этого преобразования.

Доказательство. Пусть F – действительная квадратичная форма. Пусть эта форма приведена двумя способами к двум нормальным видам. Согласно предыдущим результатам оба этих нормальных вида содержат одинаковое число r квадратов переменных с ненулевыми коэффициентами (ранги одинаковы):

$$F = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 =$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2. \qquad (*)$$

Закон инерции действительных квадратичных форм

Пусть невырожденные преобразования, приводящие к этим нормальным формам, имеют вид:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} x_s \,, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (Y=AX) \quad \text{и} \qquad (**)$$

$$z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t \,, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (Z=BX) \qquad (***)$$

Так как эти формулы задают невырожденные преобразования, то определители матриц A и B отличны от нуля.

Надо доказать, что $\kappa = p$. Предположим, что $\kappa \neq p$. Не нарушая общности, можно считать, что $\kappa < p$.

Закон инерции действительных квадратичных форм

Составим систему уравнений

$y_1 = 0$

$y_2 = 0$

$\dots$

$y_к = 0$

$z_{p+1} = 0$

$\dots$

$z_r = 0$

$z_{r+1} = 0$

$\dots$

$z_n = 0.$

или

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} x_s = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t = 0$$

$i = 1, \dots, k$ и

$j = p+1, \dots, n.$

Закон инерции действительных квадратичных форм

Это система $n – p + к$ линейных однородных уравнений от n неизвестных.

Так как число уравнений меньше числа неизвестных ($k<p$), то она имеет ненулевые решения.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – ненулевое решение однородной системы.

Подставим это решение в формулы (**) и (***), вычислим все y_i и z_j и подставим их в равенство (*).

Закон инерции действительных квадратичных форм

Получим

$-(y_{к+1}{}^{0})^2 - \ldots - (y_r{}^{0})^2 =$

$= (z_1{}^{0})^2 + (z_2{}^{0})^2 + \ldots + (z_p{}^{0})^2.$

Левая часть равенства – неположительная, правая часть – неотрицательная. Это возможно тогда и только тогда, когда $y_{к+1}{}^{0} = \ldots = y_r{}^{0} = z_1{}^{0} = z_2{}^{0} = \ldots = z_p{}^{0} = 0$.

Получили, что $(x_1{}^{0}, x_2{}^{0}, \ldots, x_n{}^{0})$ – ненулевое решение системы

$z_1 = z_2 = \ldots = z_p = z_{p+1} = \ldots = z_r = z_{r+1} = \ldots = z_n = 0$ или

$$\sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

что невозможно, т.к. ранг этой системы равен *n (B – невырожденная матрица)*. Итак, наше предположение не верно. Следовательно, $к = p$.

QED

3.Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием (приведение к главным осям)

Пусть $X^T AX$ есть квадратичная форма от n переменных. Так как A – симметрическая матрица, то она может быть приведена к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q ($Y=QX$):

$$Q^T AQ=D ,$$

Причем на главной диагонали матрицы D стоят собственные значения матрицы A, а столбцы матрицы Q являются соответствующими собственными столбцами.

Определение 3.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду , при котором коэффициенты при квадратах переменных являются собственными числами матрицы A называют приведением к главным

Пример.

Привести форму $8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 12xy + 4xz - 8yz$ к главным осям.

Решение. Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Находим корни характеристического уравнения

$|A-\lambda I|=0:$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda(\lambda-3)(\lambda-15) = 0$ $\lambda_{1,2,3} = 0,\ 3,\ 15$ - собственные значения

Для $\lambda = 3$ уравнение для нахождения СВ имеет вид $[A - 3I]\, X_1 = 0$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

Получаем $X_1 = k_1(2, 1, -2)^T$

Собственный вектор для λ = 0 удовлетворяет

$$[A - (0)I]\, X_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

получаем собственный вектор

$$X_2 = k_2 (1, 2, 2)^T$$

Точно так же собственный вектор для $\lambda = 15$ есть

$$X_3 = k_3(2, -2, 1)^T$$

X_1, X_2, X_3 попарно ортогональны, матрица преобразования

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Преобразование X =QY:

$$X=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} Y$$

$$X^T A X = Y^T (Q^T A Q) Y = Y^T D Y$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot y_1^2 + 0 \cdot y_2^2 + 15 \cdot y_3^2$$