

Кривые второго порядка

Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

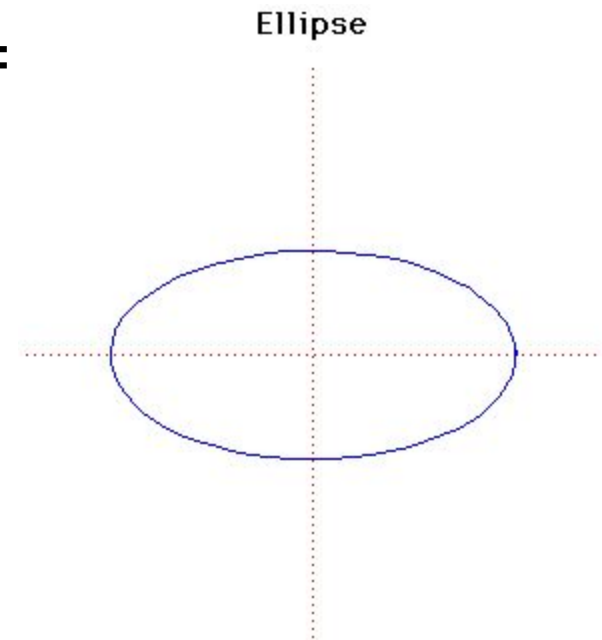
$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ - главная часть уравнения (кв. ф.)

$2Dx + 2Ey + F$ - линейная часть уравнения

Эллипс

Декартово уравнение: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

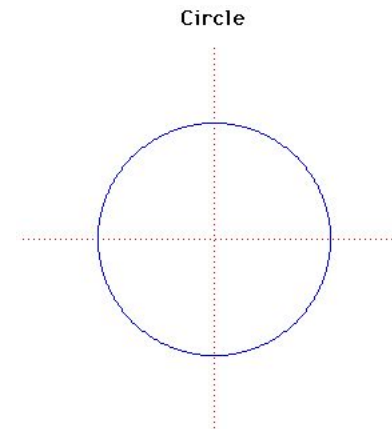
Параметрическое уравнение:
 $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$



Окружность

Декартово уравнение: $x^2 + y^2 = a^2$

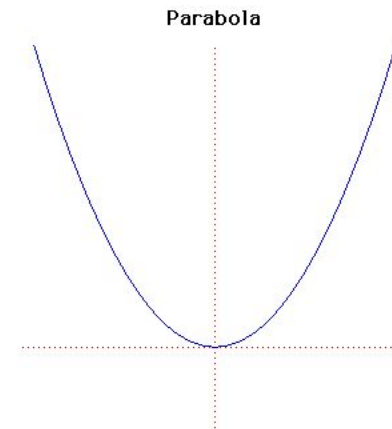
Параметрическое уравнение:
 $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$



Парабола

Декартово уравнение:

$$y = ax^2 + bx + c$$





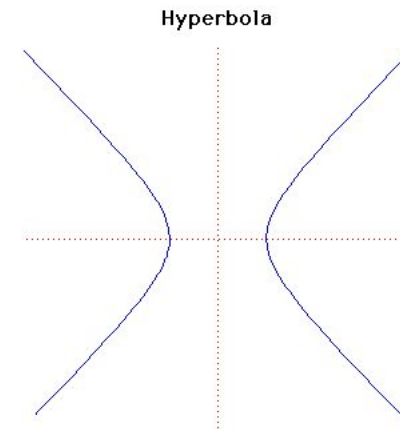
Гипербола

- Декартово уравнение:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

- Параметрическое уравнение:

$$x = a \sec(t) = a/\cos(t), \quad y = b \tan(t)$$



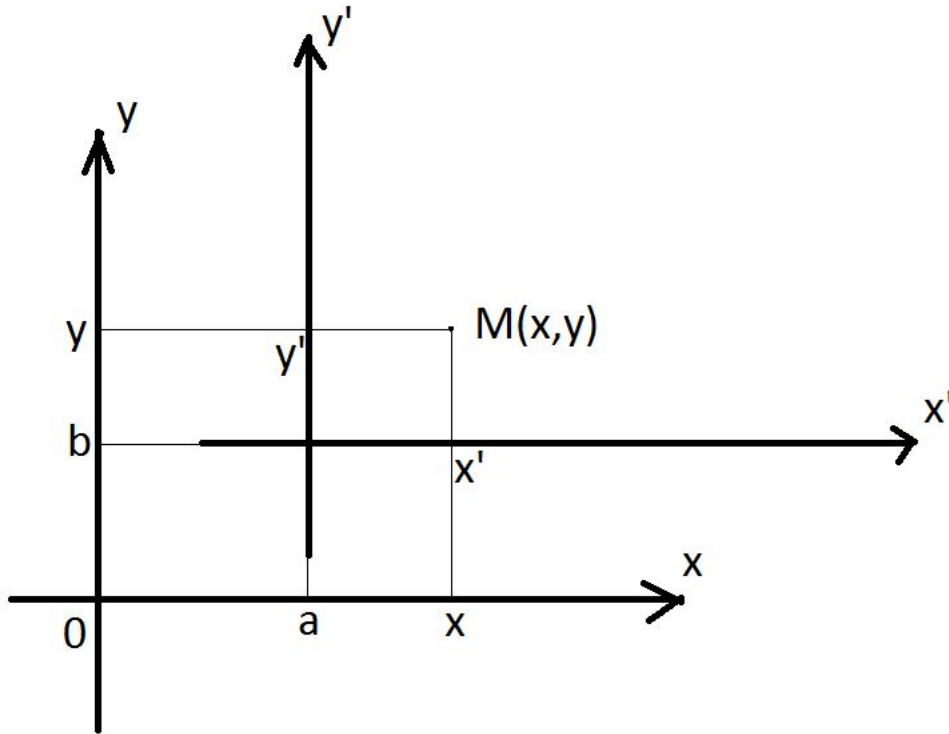


Общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Параллельный перенос системы

Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат: ("старая") и ("новая"), причем как оси абсцисс, так и оси ординат обеих систем параллельны и одинаково направлены. В этом случае говорят, что одна система координат получается из другой "параллельным переносом".



$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \Rightarrow Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Подставляя

$$A(x' + a)^2 + 2B(x' + a)(y' + b) + C(y' + b)^2 + 2D(x' + a) + 2E(y' + b) + F =$$

$$A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 +$$

$$+ 2(Aa + Bb + D)x' + 2(Ba + Cb + E)y' + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) = 0$$

Главная часть не меняется, можно упростить только линейную часть

Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе

Подберем a и b
в

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

так, чтобы коэффициенты при переменных в линейной части

стали равными 0: $Aa + Bb + D = 0$

$$Ba + Cb + E = 0$$

Для нахождения a и b получили систему уравнений, которая имеет единственное решение при условии

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow AC - B^2 \neq 0.$$

1 случай. Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе при $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Преобразованное

уравнение:

$$\begin{aligned} & A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) = \\ & = A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + a(Aa + Bb + D) + b(Ba + Cb + E) + Da + Eb + F = \\ & = A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + Da + Eb + F = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, в новой системе координат уравнение принимает вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

Для дальнейшего упрощения повернем систему координат.

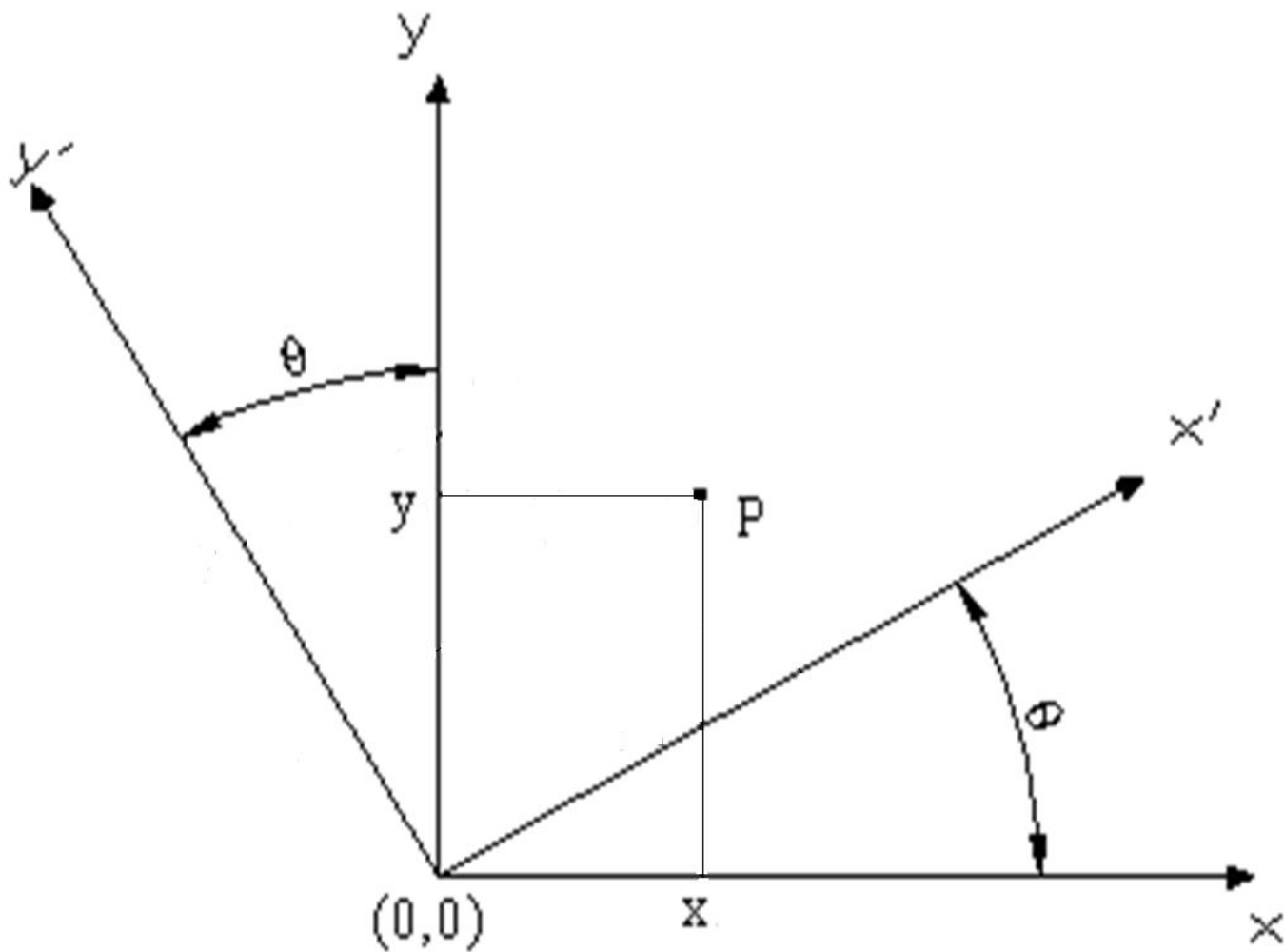
По часовой стрелке



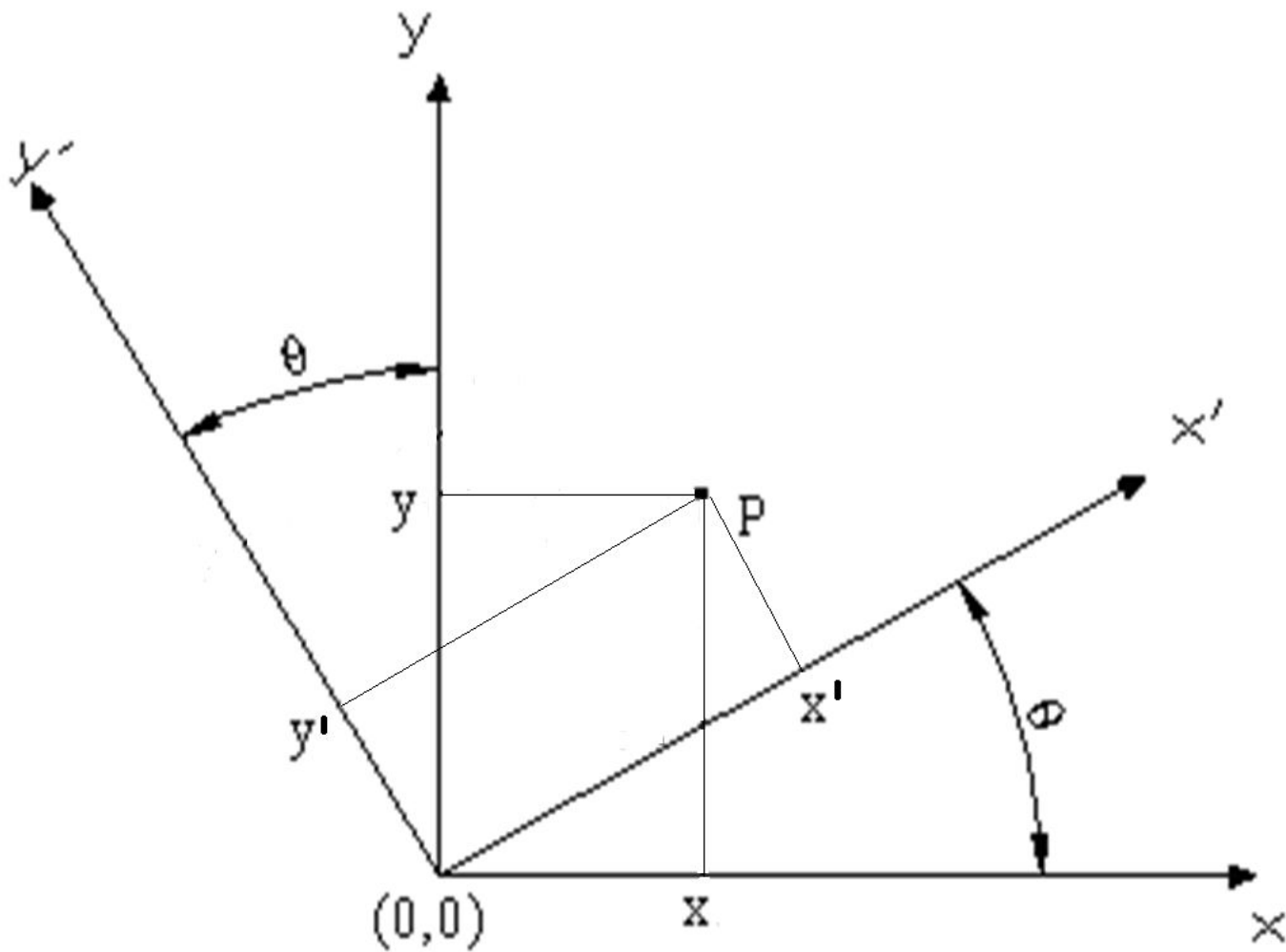
Против часовой стрелки



Поворот системы координат



Поворот системы координат



Поворот системы координат

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

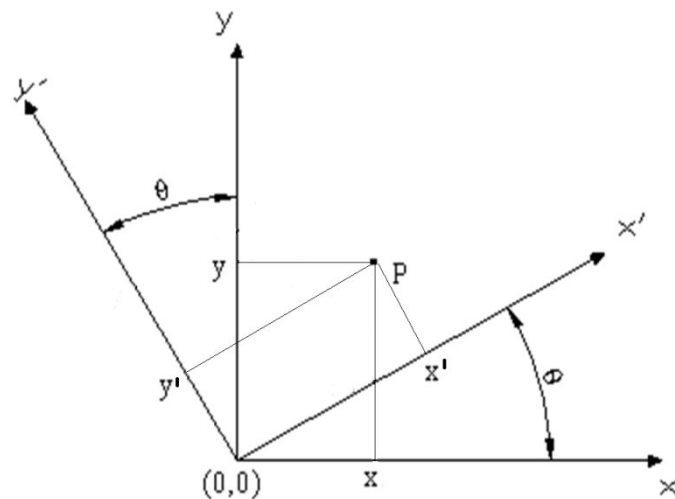
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

есть матрица поворота
(ортогональная матрица)



1 случай. Преобразование уравнения кривой при повороте при $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Преобразованное
уравнение:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}'$$

Главная часть уравнения – квадратичная форма,
а преобразование – ортогональное – приведение к главным осям.
Тогда после подстановки в уравнение получаем

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + F = 0$$

Как найти θ

$$\operatorname{ctg} 2 \cdot \theta = \frac{A - C}{2B}$$

$$A = C \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Пример.

$$4x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$$

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Классификация центральных кривых ($\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$).

Преобразованное

уравнение:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F = 0$$

Уравнения для нахождения коэффициентов при квадратах:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \delta$$

Классификация центральных кривых $(\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0)$.

Вырожденные центральные кривые

1. $\lambda_1 \lambda_2 > 0, F = 0 \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Rightarrow \text{точка}$

2. $\lambda_1 \lambda_2 < 0, F = 0 \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x \Rightarrow \text{пара}$
пересекающихся прямых

Невырожденные центральные кривые

5. $\lambda_1 \lambda_2 > 0, F \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{F}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{F}{\lambda_2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \text{действительный}$
или мнимый эллипс

6. $\lambda_1 \lambda_2 < 0, F \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{F}{\lambda_1}} - \frac{y^2}{\frac{F}{\lambda_2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \text{гипербола}$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду (пример)

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$(16x^2 - 32x) + (25y^2 + 50y) - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 2y) = 359 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 2y + 1) = 359 + 16 + 25 \Rightarrow$$

$$16(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 400 \Rightarrow$$

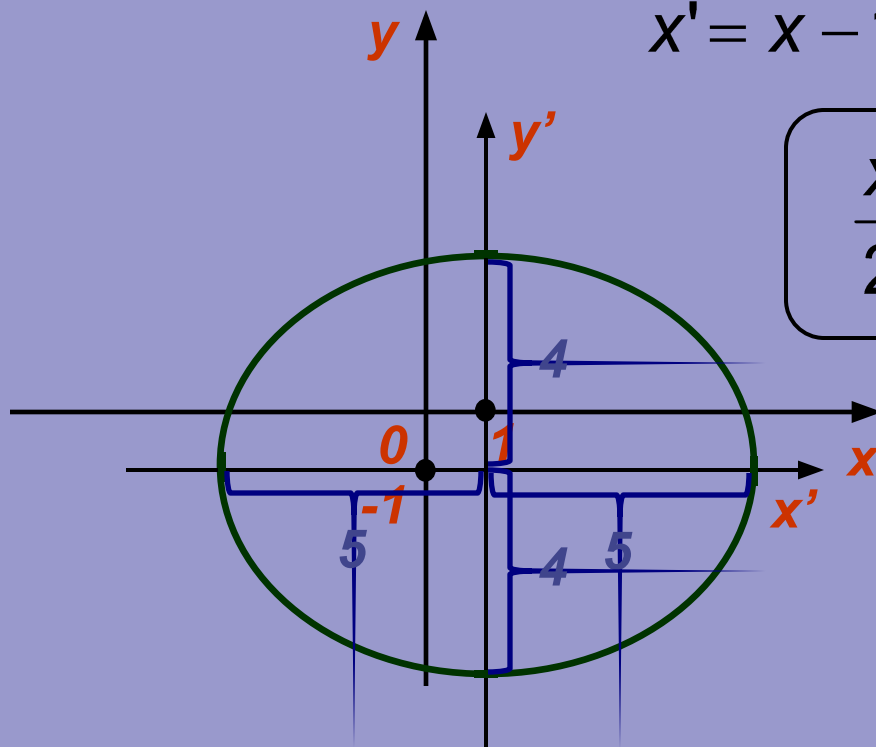
$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду (пример)

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Перенесем начало координат в точку $(1; -1)$, получим новую систему координат:

$$x' = x - 1; \quad y' = y + 1$$



$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

2 случай. Преобразование уравнения кривой в случае $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$.

Сразу производим
поворот

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F = 0$$

Так как $\lambda_1\lambda_2 = \delta \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 0$, остается только один квадрат, например, для y :

$$\lambda y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Для дальнейшего упрощения (предполагаем D, F

ненулевые)

$$\left(\lambda x^2 + 2Ex + \frac{E^2}{\lambda}\right) + 2Dx + F - \frac{E^2}{\lambda} = 0$$

$$\lambda\left(y + \frac{E}{\lambda}\right)^2 + 2Dx + F - \frac{E^2}{\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + \frac{E}{\lambda} \end{aligned}$$

Классификация нецентральных кривых $\left(\begin{array}{cc|c} A & B & \\ \hline B & C & \end{array} = 0 \right)$.

Преобразованное

уравнение: $\lambda y^2 + 2Dx + F = 0$

Вырожденные нецентральные кривые

1. $\lambda_1 \lambda_2 = 0, D = 0, F = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$ пара совпадающих прямых
2. $\lambda_1 \lambda_2 = 0, D = 0, F \neq 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow 2 \parallel$ прямые
действительные или мнимые

Невырожденные нецентральные кривые

$$3. D \neq 0 \Rightarrow \lambda y^2 + 2D\left(x + \frac{F}{2D}\right) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x' = x + \frac{F}{2D} \\ y' = y \end{array} \Rightarrow \lambda y'^2 + 2Dx' = 0 \Rightarrow$$

$$y'^2 = 2px' - \text{парабола}$$