III. Базис(база) и размерность

1.Базис(или база)

Определение 1.1: Базис

Базисом векторного пространства V называтся упорядоченное множество линейно независимых (ненулевых) векторов, линейная оболочка которых дает V.

Обозначение:

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

Пример 1.2:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ есть базис для R^2

1. *B* является ЛН :

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2a + b = 0 \\ 4a + b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$$

2. Линейная оболочка *B* дает R^2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2a + b = x \\ 4a + b = y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a = \frac{1}{2}(y - x) \\ b = 2x - y \end{matrix}$$

Определение 1.3: Стандартный / Естественный базис для R^n

$$E_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \right\}$$

Теорема 1.4:
Для всякого векторного пространства, подмножество является базисом тогда и только тогда, когда каждый вектор пространства можно выразить единственным образом в виде линейной комбинации элементов подмножества.

Доказательство: По определению линейной оболочки

→ каждый вектор можно выразить в виде линейной комбинации базисных векторов. Пусть такое представление не единственно:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{b}_i$$ тогда $$\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)\mathbf{b}_i = 0$$

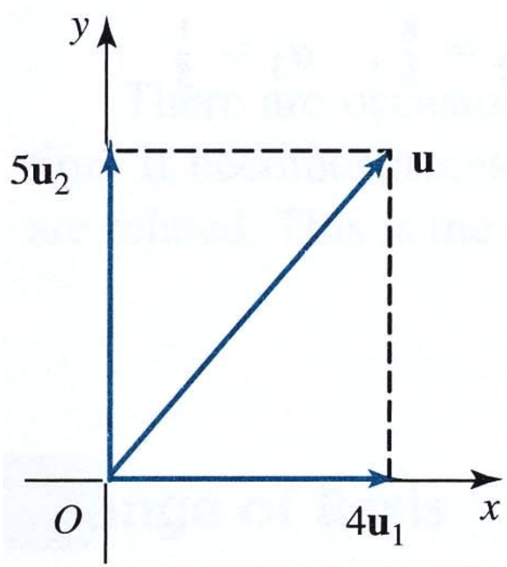
Но $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ - ЛН система $\Leftrightarrow$

$$c_i - d_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad c_i = d_i.$$ QED

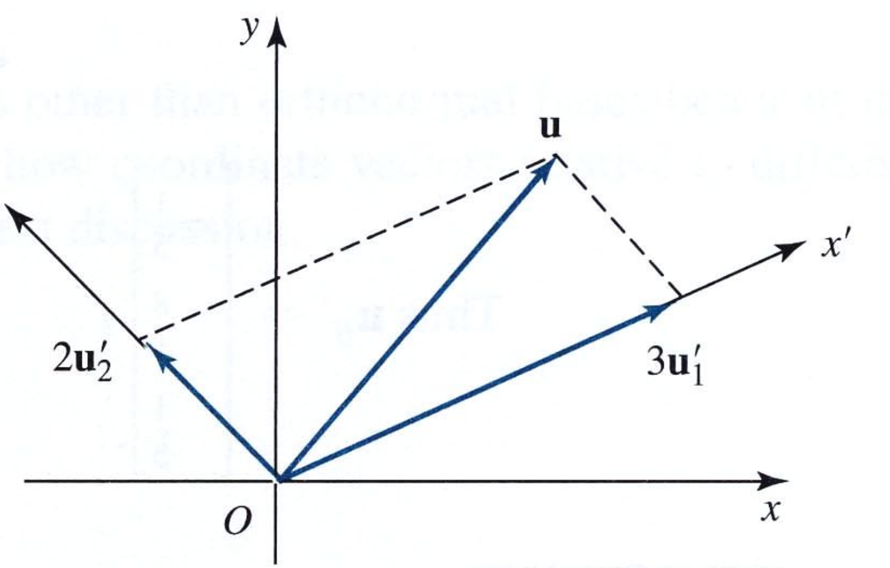
Приведем геометрическую интерпретацию координат вектора. Пусть геометрический вектор на плоскости $\mathbf{u} = (4,5)$. Тогда для базисных векторов

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (0, 1) \quad \text{и} \quad \mathbf{u}'_1 = (2, 1),\ \mathbf{u}'_2 = (-1, 1)$$

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{u} = 3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$$



$\mathbf{u} = 4\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2$



$\mathbf{u} = 3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$

Определение 1.5: Разложение по базису

Пусть задан базис $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ векторного пространства V ,тогда

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{b}_i$$

называют разложением вектора $\mathbf{v}$ по базе B.

Разложение также можно задать столбцом

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

c_j называются координатами(компонентами) $\mathbf{v}$ в B.

Пример 1.6:

Пусть $\mathrm{B} = \langle 1, 2x, 2x^2, 2x^3 \rangle$ $\mathrm{D} = \langle 1+x, 1-x, x+x^2, x+x^3 \rangle$

Тогда координаты элемента $x + x^2$

в базисе B $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *в базисе D* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Размерность

Определение 2.1

Векторное пространство называется конечномерным, если оно имеет базу из конечного числа векторов.

Лемма 2.2: Лемма о замене базисного элемента

Предположим, что $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ является базисом векторного пространства и для вектора $\boldsymbol{v}$ выполняется соотношение:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_j\mathbf{b}_j + \cdots + c_n\mathbf{b}_n \qquad \text{причем} \quad c_j \neq 0.$$

Тогда, заменив $\mathbf{b}_j$ на $\boldsymbol{v}$, получим другой базис пространства.

Доказательство: Действительно, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ является ЛН системой и для произвольного вектора

$$\mathbf{w} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_j\mathbf{b}_j + \cdots + d_n\mathbf{b}_n = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_j\left(\frac{1}{c_j}\mathbf{v} - \frac{c_1}{c_j}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{c_n}{c_j}\mathbf{b}_n\right) +$$

$$\cdots + d_n\mathbf{b}_n = \left(d_1 - \frac{c_1}{c_j}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{d_j}{c_j}\mathbf{v} + \cdots + \left(d_n - \frac{c_n}{c_j}\right)\mathbf{b}_n.$$

QED

Теорема 2.3:

Для любого конечномерного пространства, все базисы имеют одинаковое число элементов.

Доказательство:

Пусть $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ есть базис из n элементов.

Возьмем другой базис $\{ \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \}$, предположим $m \geq n$.

Пусть $\mathbf{g}_1 = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$ и $c_k \neq 0$.

По лемме 2.2, $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{g}_1, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ также есть базис.

Далее, заменив для некоторого j $\mathbf{b}_j$ на $\mathbf{g}_2$, получим новый базис $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{g}_1, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{g}_2, \mathbf{b}_{j+1}, \ldots, \mathbf{b}_n \}$.

Продолжая процесс n раз, получим базис $\{ \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \}$.

Предпололжим $m > n$, тогда $\mathbf{g}_{n+1} = a_1\mathbf{g}_1 + a_2\mathbf{g}_2 + \cdots + a_n\mathbf{g}_n$

Причем хотя бы один из коэффициентов $c_k \neq 0$.

Это противоречит тому, что $\{ \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \}$ − ЛН.

$\boxed{\text{Поэтому } m = n.}$

Определение 2.4: Размерность

Размерность векторного пространства есть число векторов в любом из его базисов. (Обозначение *dim V)*

Пример 2.5: Пространство n-разрядных столбцов R^n .

Любой базис пространства R^n содержит n векторов, так как его стандартный базис E_n содержит n векторов.

$\rightarrow \quad \dim R^n = n$.

Пример 2.6: Пространство P_n многочленов степени не выше n

$\dim P = n+1$, так как его натуральный базис $\{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$, содержит $n+1$ элемент.

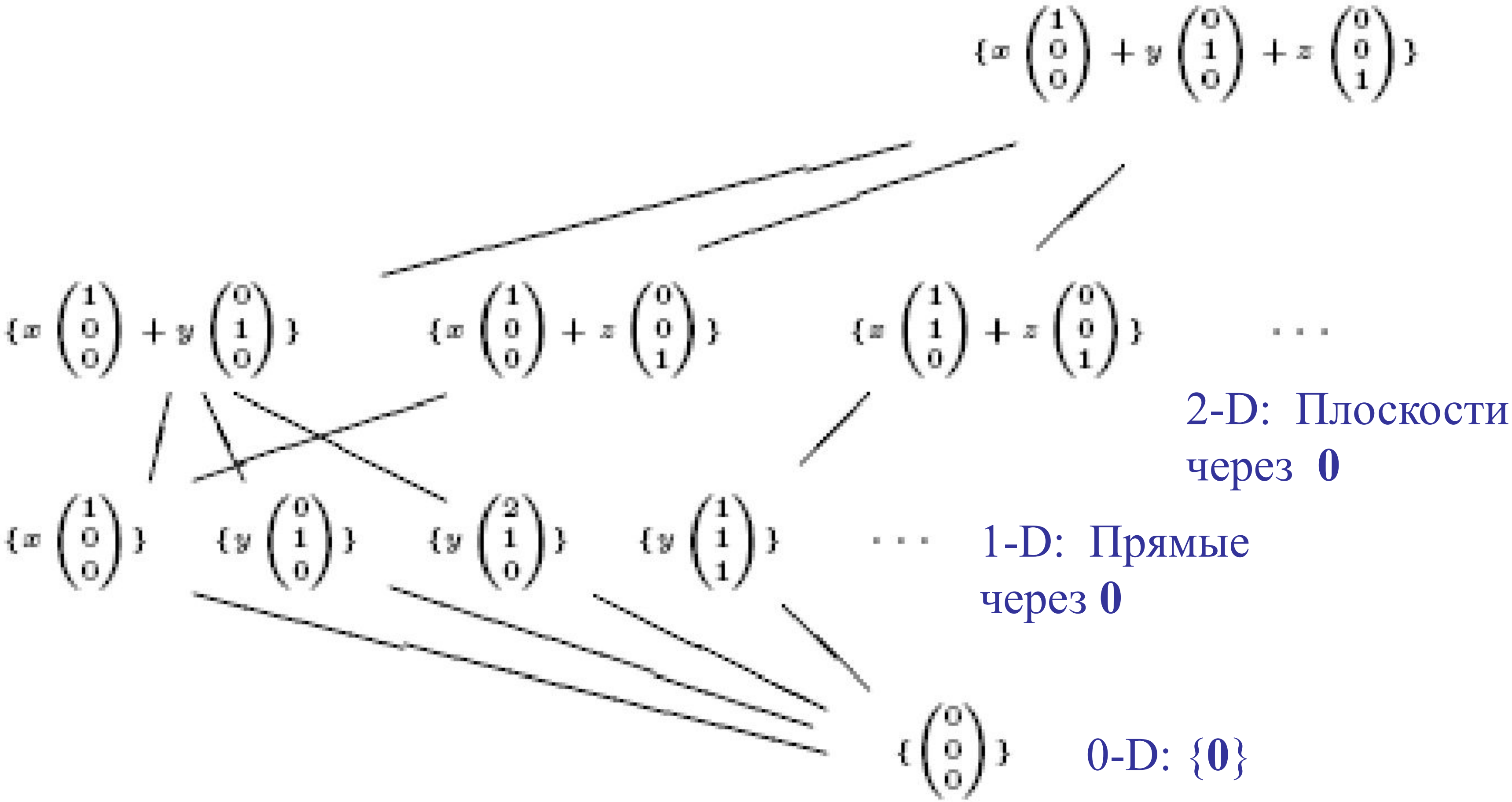
Пример 2.7:

Тривиальное пространство является 0-мерным , так как его базис пуст.

Следствие 2.8:

Любое ЛН множество вектров содержит не больше элементов, чем размерность пространства.

Пример 2.9 : Подпространства R^3.



Следствие 2.10:
Любое ЛН множество векторов может быть расширено до базиса.

Следствие 2.11:
Любой набор S, такой что $span\ S = V$, можно сузить до базиса.

Следствие 2.12:
В n-мерном векторном пространстве, множество S из n векторов является ЛН т.и т.т.к. $span\ S = V$.

3. Матрица перехода от одного базиса к другому

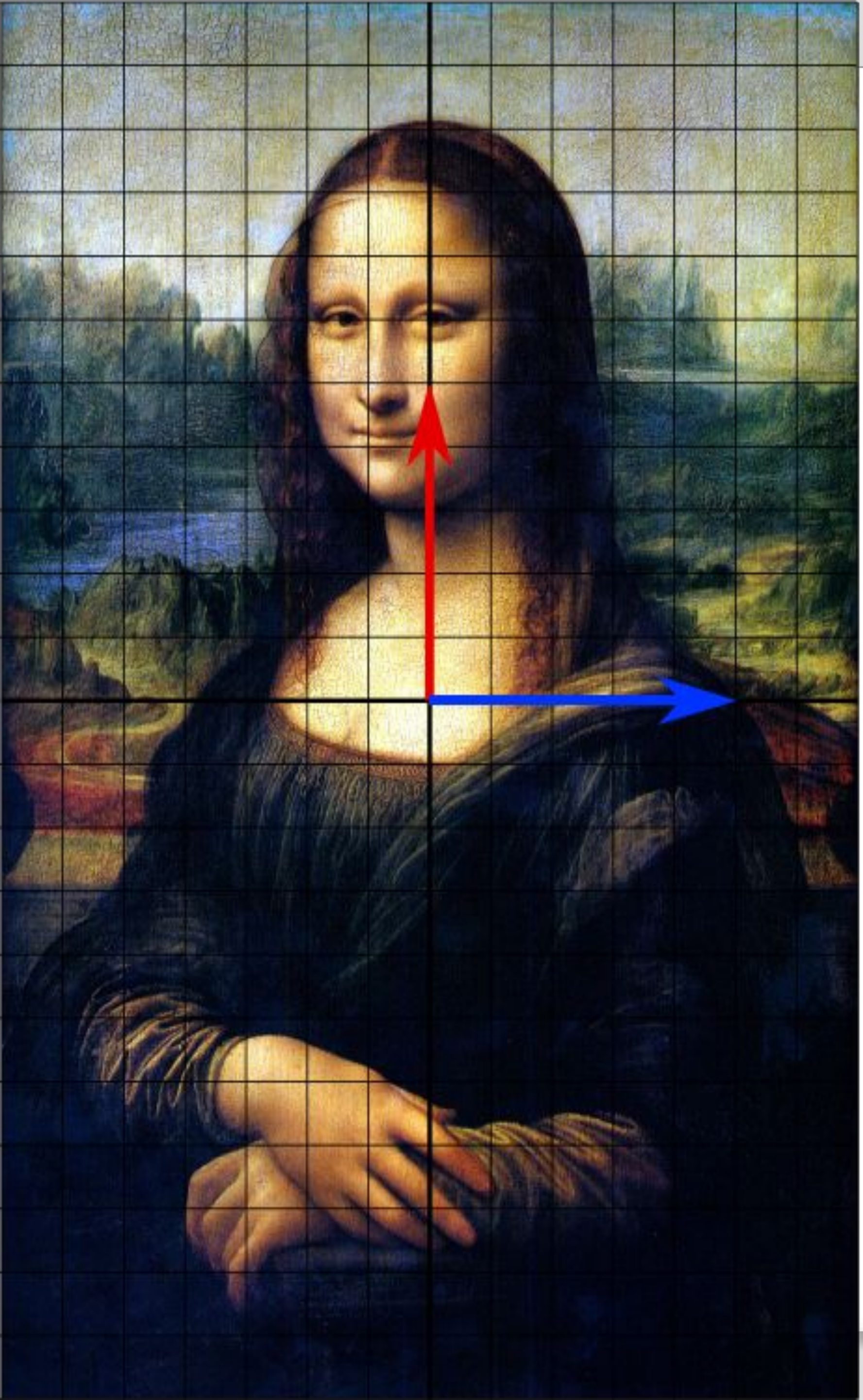
Пусть даны два базиса $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_n\}$ и $G=\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\dots,\mathbf{g}_n\}$ векторного пространства V. Тогда элементы второго базиса можно выразить через первый базис:

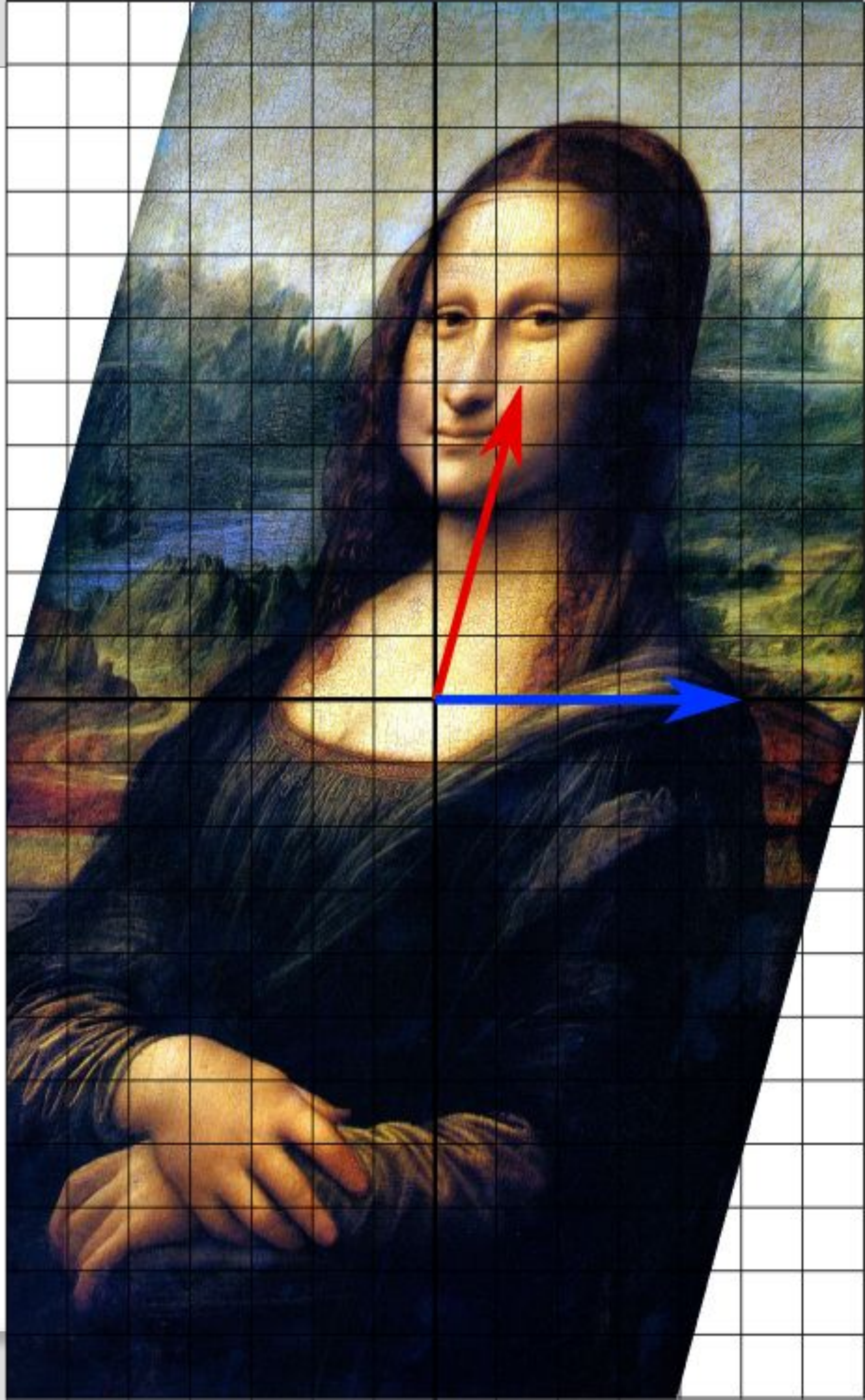
$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= p_{11}\mathbf{b}_1 + p_{21}\mathbf{b}_2 + \cdots + p_{n1}\mathbf{b}_n \\
\mathbf{g}_2 &= p_{12}\mathbf{b}_1 + p_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + p_{n2}\mathbf{b}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{g}_n &= p_{1n}\mathbf{b}_1 + p_{2n}\mathbf{b}_2 + \cdots + p_{nn}\mathbf{b}_n
\end{aligned}
$$

Или, в матричном виде:

$$(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\dots,\mathbf{g}_n)=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_n)P$$

Определение 3.1: Матрица P называется матрицей перехода от базиса B к базису G.





Теорема 3.2: Матрица *P* перехода от базиса *B* к базису *G* является невырожденной. Матрица перехода от *G* к *B* равна P^{-1}.

Доказательство. Пусть *P* – матрица перехода от базиса В к базису G: $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)P$

Точно также можно найти матрицу перехода от базиса *G* к базису *B*, пусть *R*- матрица перехода:

$$(\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n) = (\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_n)R.$$

Тогда из последних двух соотношений получим

$$(\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n) = (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n)PR$$

$$(\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_n) = (\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_n)RP$$

Так как *B* и *G* – ЛН системы, получим $PR = RP = I$. Таким образом *R* – обратная матрица к *P* и *P* – невырождена.

QED

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$

и два базиса $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ и $G = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$ векторного пространства V. Разложим вектор v по этим базисам:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n =$$
$$= d_1\mathbf{g}_1 + d_2\mathbf{g}_2 + \cdots + d_n\mathbf{g}_n$$

Тогда:

$$d_1\mathbf{g}_1 + d_2\mathbf{g}_2 + \cdots + d_n\mathbf{g}_n = \sum_{i=1}^{n} d_i\mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\mathbf{b}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i p_{ji}\right)\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_j p_{ji}\right)\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{b}_i = \mathbf{v}$$

Из сравнения получим $\forall i \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} d_j$ или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

- связь координат одного и того же вектора в различных базах.