Линейные преобразования, линейный оператор

1. Линейные преобразования, линейный оператор
2. Матричное преобразование
3. Матрица линейного оператора
4. Подобные матрицы

Линейное преобразование

Определение 1.1

Пусть U и V - векторные пространства.

Преобразование $\varphi: U \rightarrow V$ есть отображение, которое каждому вектору $\mathbf{u}$ из U ставит в соответствие уникальный вектор $\mathbf{v}$ из V.

Определение 1.2

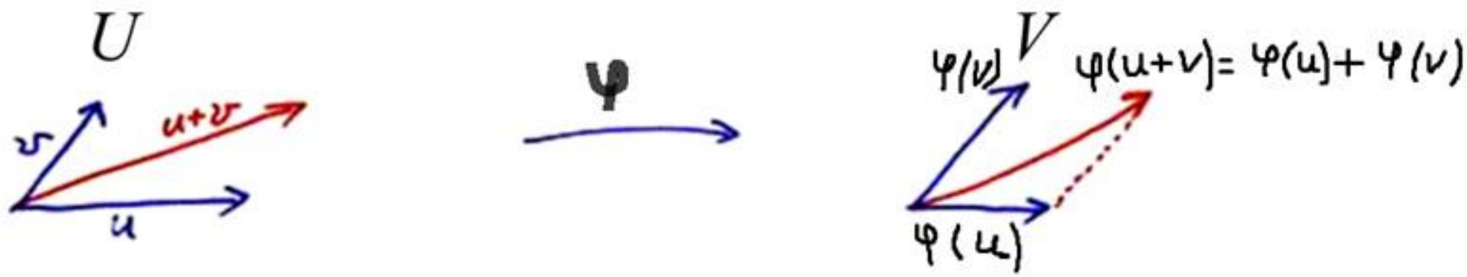
Пусть U и V - векторные пространства.

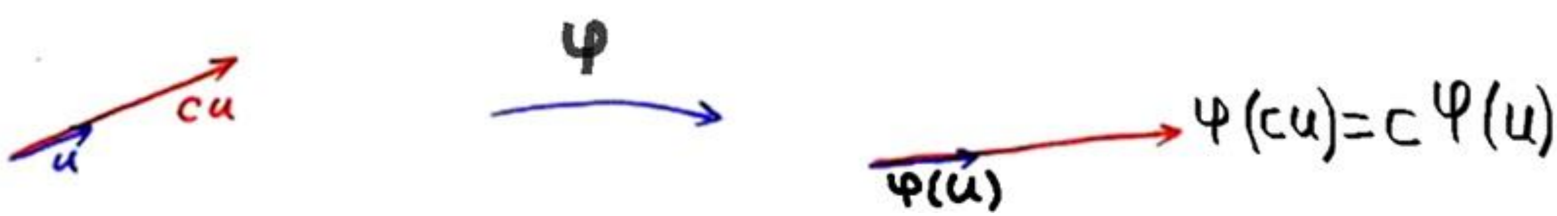
Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ - векторы из U пусть c - скаляр.

Говорят, что **преобразование** $\varphi: U \rightarrow V$ является **линейным,** если

$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ и

$\varphi(c\mathbf{u}) = c\,\varphi(\mathbf{u})$.


U
v
u+v
u
φ
V
φ(v)
φ(u+v)= φ(u)+ φ(v)
φ(u)


cu
u
φ
φ(u)
φ(cu)=cφ(u)

- Замечания:

(1) Говорят, что линейный оператор сохраняет операции.

$$\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v}) \qquad \varphi(c\mathbf{u})=c\varphi(\mathbf{u})$$

Сложение в U

Сложение в V

Скалярное умножение в U

Скалярное умножение в V

(2) Линейное преобразование $\varphi : V \to V$ векторного пространства в себя называется линейным оператором.

Пример 1.3

Доказать, что следующее преобразование $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ линейно.

$$(x, y) = (x - y, 3x)$$

Решение:

“+”: Возьмем (x_1, y_1) и $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Тогда, по определению,

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2)$$
$$= (x_1 - y_1, 3x_1) + (x_2 - y_2, 3x_2)$$
$$= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$$

“×”: Пусть c - скаляр.

$$\varphi(c(x_1, y_1)) = \varphi(cx_1, c\,y_1) = (cx_1 - cx_2, 3cx_1)$$
$$= c\,(x_1 - y_1, 3x_1)$$
$$= c\,\varphi(x_1, y_1)$$

φ – линейное преобразование.

Решение

Пример 1.4

Показать, что следующее преобразование T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ не является линейным.

$$\varphi(x, y, z) = (xy, z)$$

“+”: Возьмем (x_1, y_1, z_1) и $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$. Тогда

$$\varphi((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = \quad (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), z_1 + z_2)$$

И $\quad \varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2) = (x_1 y_1, z_1) + (x_2 y_2, z_2)$

Поэтому

$$\varphi((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \neq \varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2).$$

φ не является линейным преобразованием.

Пример 1.5

Пусть P_n – векторное пространство действительных многочленов степени $\le n$. Показать, что следующее преобразование $\varphi : P_2 \to P_1$ является линейным.

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + c$$

Решение

"+": Возьмем $ax^2 + bx + c$ и $px^2 + qx + r \in P_2$. Тогда

$$\varphi((ax^2 + bx + c) + (px^2 + qx + r)) = \varphi((a + p)x^2 + (b + q)x + (c + r))$$

$$= (a + p + b + q)x + (c + r) = (a + b)x + c + (p + q)x + r$$

$$= \varphi(ax^2 + bx + c) + \varphi(px^2 + qx + r)$$

"×": Пусть k – произвольный скаляр.

$$\varphi(k(ax^2 + bx + c)) = \varphi(kax^2 + kbx + kc) = k((a + c)x + c)$$

$$= k\varphi(ax^2 + bx + c)$$

Пример 1.6

Обозначим через D оператор дифференцирования для действительных многочленов (D есть то же самое, что и $\frac{d}{dx}$.)

D можно интерпретировать как отображение P_n в себя.

Например,

$$D(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = 12x^2 - 6x + 2$$

Пусть $f, g \in P_n$ а c - скаляр. Следующие свойства производной показывают, что D есть линейный оператор.

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(cf) = cD(f)$$

- Нулевое преобразование:

$$\varphi : U \to V \qquad \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0},\ \mathbf{0} \in V,\ \forall \mathbf{u} \in V$$

- Единичный оператор:

$$\varphi : V \to V \qquad \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V$$

- Теорема 1.7: (Свойства линейного преобразования)

(1) $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(2) $\varphi(-\mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v})$

(3) $\varphi(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})$

(4) $\varphi(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1\varphi(\mathbf{v}_1) + c_2\varphi(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k\varphi(\mathbf{v}_k)$

Доказательство.

(1) Пусть $\mathbf{v}$ – произвольный вектор из V.

$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\mathbf{v}) = 0\ \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(2) $\varphi(-\mathbf{v}) = \varphi((-1)\mathbf{v}) = (-1)\ \varphi(\mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v})$

(3) $\varphi(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + (-1)\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})$

$$(4)\ \varphi(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(c_i\mathbf{v}_i) =$$

$$= \varphi(c_1\mathbf{v}_1) + \varphi(c_2\mathbf{v}_2) + \cdots + \varphi(c_k\mathbf{v}_k) = c_1\varphi(\mathbf{v}_1) + c_2\varphi(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k\varphi(\mathbf{v}_k)$$

2.Матричное преобразование

Теорема 2.1. Пусть A есть $m \times n$ матрица. Пусть $\mathbf{v}$ есть элемент пространства $\mathbf{F}^n$, интерпретируемый как столбец. Преобразование φ: $\mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$, определенное как $\varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, является линейным. Такое линейное преобразование называется **матричным преобразованием**.

Доказательство

(преобразование)

A : $m \times n$ матрица, $\mathbf{v}$: $n \times 1$ матрица, $A\mathbf{v}$: $m \times 1$ матрица

$\Rightarrow$ $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ определяет преобразование из $\mathbf{F}^n$ в $\mathbf{F}^m$.

(линейность)

Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{F}^n$, и $c \in \mathbf{F}$.

$$\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$$

$$\varphi(c\mathbf{v}) = A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v} = c\varphi(\mathbf{v})$$

$\Rightarrow$ φ – линейное преобразование.

Пример 2.2

Рассмотрим матрицу $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$ и столбец $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ из $\mathbf{R}^3$.

Эта матрица задает линейное преобразование $\varphi(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^2$, использующее матричное умножение.

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+3y-2z\\ 4y+z\end{bmatrix}$$

Например,

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ 11\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi\left(\begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}8\\ 17\end{bmatrix}$$

- Пример 2.3. Поворот на плоскости

Рассмотрим $\varphi : R^2 \to R^2$ - матричный линейный оператор, заданный матрицей

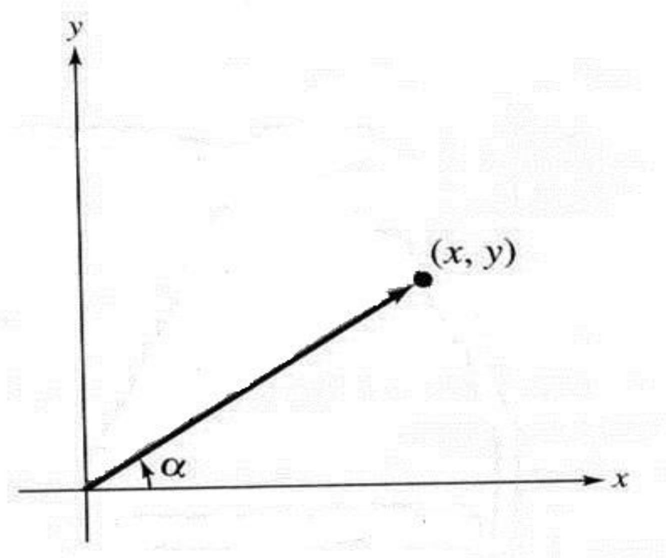
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$v = (x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

(в полярных координатах)

r: длина v

α: угол, отсчитываемый от положительного направления оси $0x$ до вектора v против часовой стрелки



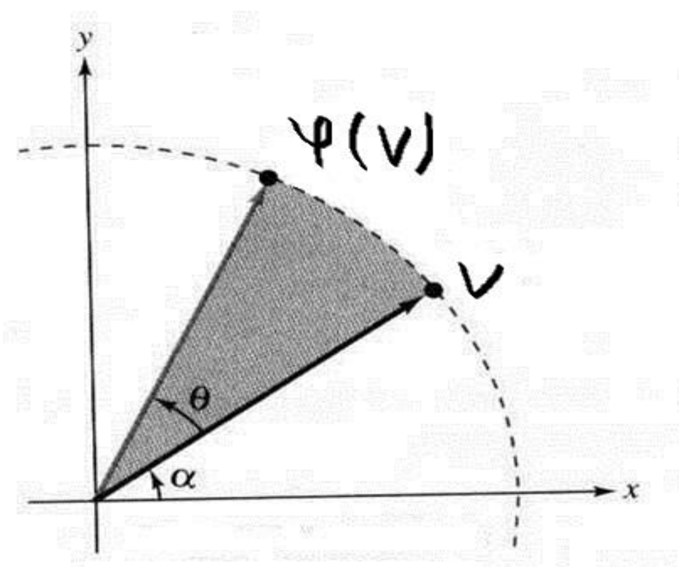
$$\varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$

r: длина $\varphi(\mathbf{v})$

$\theta + \alpha$: угол, отсчитываемый от положительного направления оси $0x$ до вектора φ *(v)* против часовой стрелки.



Следовательно, $\varphi(\mathbf{v})$ есть вектор, полученный **поворотом вектора v против часовой стрелки на угол** θ.

3. Матрица линейного оператора

Пусть задано линейное преобразование $\varphi : U \rightarrow V$ и произвольный базис {$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$} пространства U, тогда образ $\varphi(\mathbf{v})$ произвольного вектора **v** из U можно вычислить из образов $\varphi(\mathbf{b}_1), \varphi(\mathbf{b}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{b}_n)$

базисных векторов. Это можно сделать, выражая **v** как линейную комбинацию базисных векторов

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \ldots + c_n \mathbf{b}_n$$

и затем используя Теорему 1.7:

$$\varphi(\mathbf{v}) = c_1 \varphi(\mathbf{b}_1) + c_2 \varphi(\mathbf{b}_2) + \ldots + c_n \varphi(\mathbf{b}_n)$$

Другими словами, ***линейное преобразование полностью определяется образами векторов из любого из базисов исходного векторного пространства.***

Матрица линейного оператора

Пусть задан линейный оператор $\varphi : V\to V$ и произвольный базис $B=\{\mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \ldots, \mathbf{b}_n\}$ пространства V, тогда образ $\varphi(\mathbf{v})$ произвольного вектора $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \ldots + c_n \mathbf{b}_n$ из V равняется $\varphi(\mathbf{v}) = c_1 \varphi(\mathbf{b}_1) + c_2 \varphi(\mathbf{b}_2) + \ldots + c_n \varphi(\mathbf{b}_n)$

С другой стороны, векторы $\varphi(\mathbf{b}_1), \varphi(\mathbf{b}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{b}_n)$ являются векторами пространства V, поэтому

$$\varphi(\mathbf{b}_1) = t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{b}_n$$

$$\varphi(\mathbf{b}_2) = t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{b}_n$$

……………………………………………………………………..

$$\varphi(\mathbf{b}_n) = t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{b}_n$$

Матрица линейного оператора

Определение 3.1. Матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора в базе *B*.

$$\left(\varphi(\mathbf{b}_1)\varphi(\mathbf{b}_2)\ldots\ \varphi(\mathbf{b}_n)\right) = \left(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\ \mathbf{b}_n\right)T$$

4. Подобные матрицы

Пусть даны два базиса $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ и $G = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ векторного пространства *V* и *P* – матрица перехода от базиса *B* к базису *G:*

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)P$$

Пусть *T* – матрица линейного оператора φ в базисе *B:*

$$(\varphi(\mathbf{b}_1)\varphi(\mathbf{b}_2)\ldots\varphi(\mathbf{b}_n)) = (\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n)T$$

а *S*– матрица линейного оператора φ в базисе *B:*

$$(\varphi(\mathbf{g}_1)\varphi(\mathbf{g}_2)\ldots\varphi(\mathbf{g}_n)) = (\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\ldots\mathbf{g}_n)S$$

Найдем связь между матрицами одного и того же оператора в различных базах.

$$(\varphi(\mathbf{g}_1)\varphi(\mathbf{g}_2)\ldots\varphi(\mathbf{g}_n)) = (\varphi(\mathbf{b}_1)\varphi(\mathbf{b})_2\ldots\varphi(\mathbf{b})_n)P = (\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n)TP =$$

$$= (\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\ldots\mathbf{g}_n)P^{-1}TP = (\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\ldots\mathbf{g}_n)S$$

4. Подобные матрицы (продолжение)

Получим $S = P^{-1}TP$.

Определение 4.1. Две квадратные матрицы *S* и *T* одного размера называются подобными, если найдется невырожденная матрица *P*, такая что

$$S = P^{-1}TP$$

Теорема 4.2. Матрицы линейного оператора в различных базах подобны.

Теорема 4.3: (Свойства подобных матриц)

Пусть матрицы S и T подобны, тогда

$$(1)\ \ |S| = |T|.$$

Доказательство.

$$S = P^{-1}TP \qquad \Rightarrow \qquad |S| = |P^{-1}TP| = |P^{-1}||T||P| =$$

$$= |T||P^{-1}||P| = |T||P^{-1}P| =$$

$$= |T||I| = |T|$$