Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

1.Определение

2. Нахождение СЗ и СВ линейного оператора

3. Свойства СВ

4. Линейный оператор с простым спектром

1. Определения

Определение 1.1. *Оператор* φ *n–мерного векторного пространства* V *называется* ***диагонализируемым****, если в* V *существует базис, в котором матрица линейного оператора диагональная.*

Определение 1.2. *Пусть* φ *– оператор пространства* V*. Если для некоторого ненулевого вектора* $\boldsymbol{v} \in V$ *и числа* λ *имеем*

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v},$$

то число λ *называется* ***собственным значением оператора*** φ*, а вектор* $\boldsymbol{v}$ *называется* ***собственным вектором оператора*** φ***, относящимся к собственному значению*** λ.

2. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть φ – оператор n-мерного пространства V, $\boldsymbol{v}$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к собственному значению λ, т.е. $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$.

Пусть $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ – базис V,

A – матрица линейного оператора φ в базисе $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ и

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{b}_n\ \boldsymbol{v}) = c_1\varphi(\boldsymbol{b}_1) + c_2\varphi(\boldsymbol{b}_2) + \ldots + c_n\varphi(\boldsymbol{b}_n) =$$

$$= (\varphi(\mathbf{b}_1)\,\varphi(\mathbf{b}_2)\ldots\varphi(\mathbf{b}_n)) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора (продолжение)

Получили:

$$A\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A-\lambda I)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

v *– собственный вектор оператора* φ *, относящийся к собственному значению* λ ⇔ *его координаты* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *являются решением (нетривиальным) системы линейных однородных уравнений* $(A-\lambda I)X=O$.

Определения 2.1.

Матрица $A–\lambda I$ называется ***характеристической матрицей оператора*** **φ** (матрицы A) .

Определитель характеристической матрицы, т.е. $det(A–\lambda I)$ – многочлен степени n относительно переменной λ .

Многочлен $det(A–\lambda I)$ называют ***характеристическим многочленом*** **оператора φ** (**матрицы A**).

Корни многочлена $det(A–\lambda I)$ называют ***характеристическими корнями оператора*** **φ** (***матрицы*** **A**).

Теорема 2.2: (Свойства подобных матриц)

Пусть матрицы S и T подобны, тогда

(2) $|S-\lambda I| = |T-\lambda I|$.

Доказательство. $S = P^{-1}TP$

$$\Rightarrow \quad |S-\lambda I| = |P^{-1}TP-\lambda P^{-1}IP| = |P^{-1}||T-\lambda I||P| =$$

$$= |T-\lambda I||P^{-1}||P| =$$

$$= |T-\lambda I||P^{-1}P| =$$

$$= |T-\lambda I||I| = |T-\lambda I|$$

Таким образом, *число λ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем*.

Пример

$$\textit{Проверить, что} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \textit{есть} \quad \textit{СВ} \quad \textit{для} \; A=\begin{bmatrix}2 & -4\\3 & -6\end{bmatrix}.$$

$$\textit{Решение}: \quad A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2 & -4\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\textit{Но для} \quad \lambda=0, \quad \lambda\mathbf{x}=0\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Таким образом, $\mathbf{x}$ *есть собственный вектор* A, *и* $\lambda=0$ *есть собственное значение.*

Пример вычисления СЗ для матрицы $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

3.Свойства собственных векторов

1. Лемма 3.1. *Каждый собственный вектор* ***v*** *оператора* φ *относится к единственному собственному значению.*

Доказательство (от противного).

Пусть вектор ***v*** относится к двум различным собственным значениям - λ и μ:

$$\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}, \quad \varphi(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}) = (\lambda - \mu)\mathbf{v} \Leftrightarrow$$

$$\varphi(\Theta) = \Theta = (\lambda - \mu)\mathbf{v}$$

Но вектор ***v*** – ненулевой, поэтому $\lambda = \mu$

QED

Лемма 3.2. *Если* $\boldsymbol{v}_1$ *и* $\boldsymbol{v}_2$ *– собственные векторы оператора* φ, *относящиеся к одному и тому же собственному значению* λ , *то их линейная комбинация* $a\cdot\boldsymbol{v}_1+b\cdot\boldsymbol{v}_2$ *– собственный вектор оператора* φ , *относящийся к тому же собственному значению.*

Доказательство.

$$\varphi\,(a\cdot\boldsymbol{v}_1+b\cdot\boldsymbol{v}_2\,) =$$
$$a\,\varphi\,(\boldsymbol{v}_1)+b\,\varphi(\boldsymbol{v}_2\,) =$$
$$a\,\lambda\boldsymbol{v}_1+b\,\lambda\,\boldsymbol{v}_2 =$$
$$\lambda\,(a\cdot\boldsymbol{v}_1+b\cdot\boldsymbol{v}_2\,)$$

QED

Следствия 3.3.

а) *каждому собственному значению* λ *соответствует бесконечное множество собственных векторов;*

б) *если к множеству всех собственных векторов* $\boldsymbol{x}$ *оператора* φ, *относящихся к собственному значению* λ, *присоединить нулевой вектор, то получится подпространство пространства* V. *Оно называется* ***собственным подпространством оператора*** *и обозначается* V_λ.

Лемма 3.4. *Собственные векторы* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ *оператора* φ, *относящиеся к попарно различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Доказательство (от противного).

Предположим $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ ЛЗ: $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{x}_k = 0$ и хотя бы один из коэффициентов – ненулевой, например,

c_k - ненулевое число.

Проведем две операции: применим оператор φ и умножим на λ_1

$$\varphi(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{x}_k) = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 \ldots + c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k = 0 \text{ и}$$
$$\lambda_1(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{x}_k) = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{x}_2 \ldots + c_k\lambda_1\boldsymbol{x}_k = 0.$$

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 \ldots + c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k = 0$$
$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{x}_2 \ldots + c_k\lambda_1\boldsymbol{x}_k = 0$$

Вычтем из первого второе соотношение:

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_2 \ldots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\boldsymbol{x}_k = 0.$$

Точно также применим оператор φ, умножим на λ_2

$\varphi(c_2\ (\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2\ldots+c_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\boldsymbol{x}_k)=c_2\lambda_2\ (\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2\ldots+c_k\ \lambda_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\boldsymbol{x}_k=0$ и

$\lambda_2(c_2\ (\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2\ldots+c_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\boldsymbol{x}_k)=c_2\lambda_2\ (\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2\ldots+c_2\ \lambda_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\boldsymbol{x}_k=0$

и вычтем:

$$c_3\ (\lambda_3-\lambda_1)\ (\lambda_3-\lambda_2)\ \boldsymbol{x}_3\ldots+c_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\ (\lambda_k-\lambda_2)\ \boldsymbol{x}_k=0.$$

Продолжая так, в конце концов получим

$$c_k\ (\lambda_k-\lambda_1)\ (\lambda_k-\lambda_2)\ \ldots\ (\lambda_k-\lambda_{k-1})\ \boldsymbol{x}_k=0.$$

Собственные значения различны, собственный вектор – ненулевой.

Отсюда следует $c_k=0$, что противоречит предположению. QED

Следствия 3.5:

а) *линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве V, не может иметь более n собственных значений;*

б) *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы оператора.*

Теорема 3.6. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора (таким образом, подобные матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен).*

Доказательство.

Пусть P и Q – матрицы одного и того же линейного оператора в различных базах. Тогда

$$R = P^{-1}SP \quad \Leftrightarrow \quad R - \lambda I = P^{-1}SP - \lambda I = P^{-1}SP - \lambda P^{-1}IP =$$

$$= P^{-1}(S - \lambda^{-1}I)P \quad \Leftrightarrow \quad \left|R - \lambda I\right| = \left|P^{-1}(S - \lambda^{-1}I)P\right| = \left|P^{-1}\right|\left|S - \lambda^{-1}I\right|\left|P\right| =$$

$$= \left|P^{-1}\right|\left|P\right|\left|S - \lambda^{-1}I\right| = \left|S - \lambda^{-1}I\right|. \quad QED$$

Следствие 3.7. *Множество собственных значений линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора (таким образом, подобные матрицы имеют один и тот же набор собственных значений).*

Теорема 3.8 (необходимое и достаточное условие диагональности матрицы оператора) .

Матрица **A** *оператора* φ *в базисе* $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ *имеет диагональный вид* ⇔ *все базисные векторы* $\boldsymbol{b}_i$ *являются собственными векторами этого оператора.*

Доказательство.

$$(\varphi(\mathbf{b}_1)\varphi(\mathbf{b}_2)\ldots\varphi(\mathbf{b}_n)) = (\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n)\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i: \quad \varphi(\mathbf{b}_i) = \lambda_i \mathbf{b}_i \qquad \text{QED}$$

Теорема 3.9. (Условие диагонализуемости оператора)

$n\times n$ матрица A подобна диагональной т.и т.т.к. она имеет n линейно независимых собственных векторов.

Доказательство.

$\Rightarrow$

A подобна диагональной матрице D. Тогда существует невырожденная матрица P такая что $D = P^{-1}AP$. Пусть $P_1,\ldots,P_n$ - столбцы матрицы P, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - диагональные элементы матрицы D .

$$PD = (P_1P_2\ldots P_n)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1P_1 & \lambda_2P_2 & \cdots & \lambda_nP_n\end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$PD = AP = A\cdot(P_1P_2...P_n) = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1P_1 & \lambda_2P_2 & \cdots & \lambda_nP_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, $AP_i = \lambda_i P_i$, $i = 1,2,...,n$ и столбцы матрицы P являются собственными векторами матрицы *A (матричный линейный оператор)*. В силу невырожденности *P,* все эти векторы линейно независимы.

$\Leftarrow$

А имеет n линейно независимых собственных столбцов, обозначим их $P_1,...,P_n$, относящихся к собственным значениям $\lambda_1,...,\lambda_n$ $\Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$, $i = 1,2,...,n.$
Обозначим $P = (P_1P_2...P_n)$, тогда P – невырожденная матрица и

$$AP = A\cdot(P_1P_2...P_n) = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1P_1 & \lambda_2P_2 & \cdots & \lambda_nP_n \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = (P_1 P_2 \ldots P_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \cdots & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$$

Получили

$$AP = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

А так как P - невырожденная матрица, то $P^{-1}AP$ - диагональная матрица.

QED

- Критерий диагонализируемости оператора: *оператор* φ *диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве* V *существует базис, каждый из векторов которого является собственным вектором оператора* .

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 2 \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0$$

СЗ □ $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$

Пример (продолжение)

$$(1)\lambda = 4 \Rightarrow \textit{уравнение для нахождения СВ}:$$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 3 & 0 \\ 3 & 1-4 & 0 \\ 0 & 0 & -2-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(2)\lambda = -2 \Rightarrow$ *уравнение для нахождения СВ*:

$$\begin{bmatrix} 1+2 & 3 & 0 \\ 3 & 1+2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

так что $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4.Линейный оператор с простым спектром

Определение 4.1 Набор всех собственных значений оператора называется спектром оператора.

Определение 4.2. Линейный оператор n-мерного векторного пространства, имеющий n попарно различных собственных значений, называется оператором с простым спектром.

Следствие 4.3.

(1) Матрица оператора с простым спектром подобна диагональной матрице, у которой на диагонали стоят собственные значения оператора.

Пример: матрица $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ является матрицей

оператора с простым спектром

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

собственные векторы для

$$\lambda_1 = 2 \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 4 \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$