

**БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. КАНТА**

## **РАЗДЕЛ I**

### **ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ СВЯЗИ**

**к.т.н. Олег Романович Кивчун**

**Калининград  
2012**

## ЛЕКЦИЯ № 9

### УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Квазигармоническая форма представления сигнала.
2. Прямое и обратное преобразование Гильберта.
3. Аналитический сигнал и его свойства. Представление действительного сигнала через его квадратурные компоненты.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

#### Основная:

1. Теория электрической связи: Учеб. Для вузов / А.Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В.И. Коржик, М. В. Назаров; Под ред. Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998. – 433 с.

#### Дополнительная:

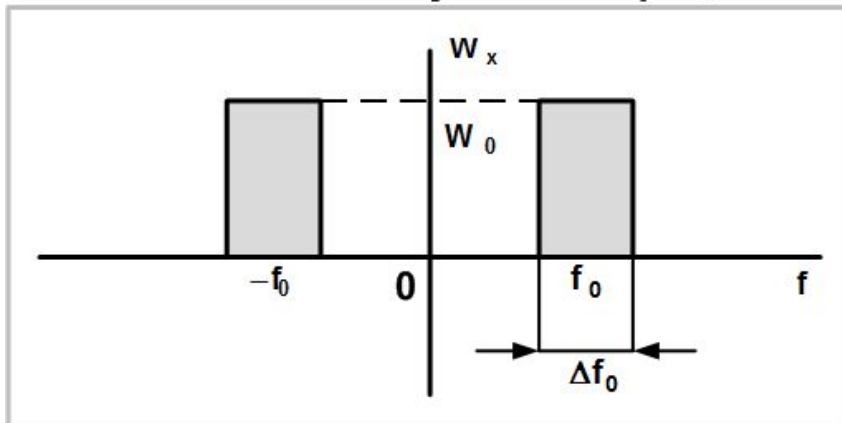
1. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. Бернард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Сухоруков А.С. Теория электрической связи: Конспект лекций. Часть 1. – М.: МТУСИ, ЦЕНТР ДО, 2002. – 65 с.
4. Сухоруков А.С. Теория цифровой связи: Учебное пособие. Часть 2. – М.: МТУСИ, 2008. – 53 с.

# **1. Квазигармоническая форма представления сигнала**

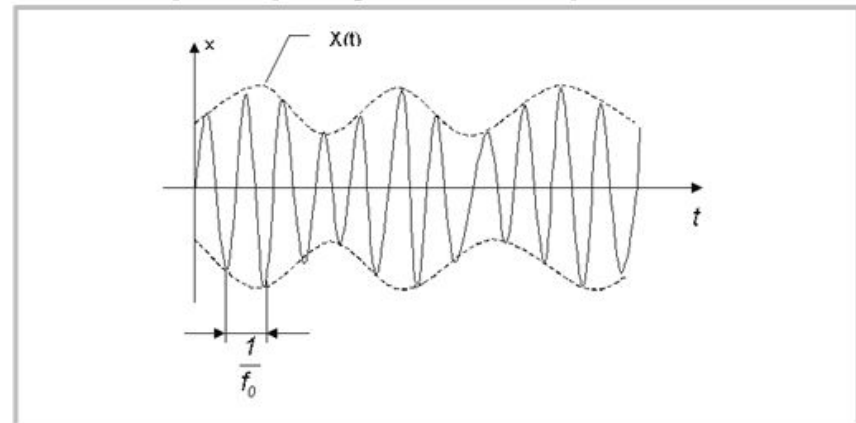
# КВАЗИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФОРМА СИГНАЛА

К УЗКОПОЛОСНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ относят процессы, спектральная плотность мощности которых сосредоточена в относительно узкой полосе частот в окрестности некоторой достаточно высокой частоты  $f_0$ , то есть  $D f \ll f_0$ .

Узкополосный случайный процесс



Пример случайного процесса



Во многих случаях сигнал  $x(t)$  удобно записывать в квазигармонической форме в виде:

$$x(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)],$$

где  $A(t)$  – огибающая;  $\psi(t)$  – полная фаза;  
 $\omega_c$  – средняя частота квазигармонического колебания;  
 $\varphi(t)$  – медленно изменяющаяся начальная фаза.

Для определения  $A(t)$  и  $\psi(t)$  введем в рассмотрение комплексный сигнал, получаемый из действительного сигнала  $x(t)$  следующим образом:

$$\dot{x}(t) = x(t) + jx'(t) = A(t)e^{j\psi(t)} = A(t) \cos \psi(t) + jA(t) \sin \psi(t).$$

## **2. Прямое и обратное преобразование Гильберта**

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

По ряду причин, часть из которых станет понятной из дальнейшего, в качестве сопряжённого удобно выбрать преобразованный по Гильберту исходный сигнал:  $x'(t) = \tilde{x}(t) = H[x(t)]$ . Комплексный сигнал вид  $\dot{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$  называют **АНАЛИТИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ**.

С точки зрения схемотехники преобразователь Гильберта – это фазовращатель (рисунок 1) с передаточной функцией, которая представлена следующим выражением:

$$H_H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0; \\ j, & \omega < 0, \end{cases} \quad H_H(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega), \quad \text{где } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

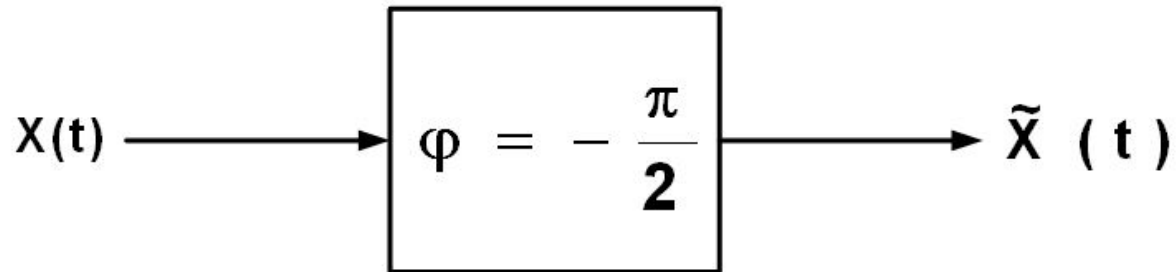
Найдём импульсную характеристику преобразователя Гильберта:

$$g_H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \cos \omega t d\omega}_0 + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \sin \omega t d\omega.$$

Первый интеграл равен 0 в силу интегрирования нечётной функции при симметричных пределах, а второй сводится к табличному интегралу вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \cdot dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2} \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \quad \text{Тогда } g_H(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \omega} \sin \omega t d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{t}{\pi(t^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{\pi t}.$$

# ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА



$$\tilde{x}(t) = x(t) \otimes g_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)}d\tau.$$

где  $\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)}d\tau$  – прямое преобразование Гильберта. Поскольку

$S_{\tilde{x}}(j\omega) = -j\text{sign}(\omega)S_x(j\omega)$ , после умножения обеих частей равенства на  $j\text{sign}(\omega)$  получим

$$j\text{sign}(\omega)S_{\tilde{x}}(j\omega) = \text{sign}^2(\omega)S_x(j\omega) = S_x(j\omega),$$

откуда следует, что передаточная функция обратного преобразования Гильберта  $H^{-1}[x(t)]$  отличается от передаточной функции прямого только знаком.

$$x(t) = H^{-1}[\tilde{x}(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{\pi(t - \tau)}d\tau \text{ – обратное преобразование Гильберта.}$$

**3. Аналитический сигнал и его свойства.  
Представление действительного сигнала  
через его квадратурные компоненты**



# АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Аналитический сигнал является естественным обобщением символического изображения гармонического колебания  $x(t) = A \cos(\omega_c t + \alpha)$  на произвольный сигнал:

$$\dot{x}(t) = A e^{j\varphi} e^{j\omega_c t} = A e^{j\omega_c t} = A \cos(\omega_c t + \alpha).$$

2. Спектр аналитического сигнала располагается только в области положительных частот  $> 0$ :

$$\mathbf{S}_{\dot{x}}(j\omega) = \mathbf{S}_x(j\omega) + j\mathbf{S}_{\tilde{x}}(j\omega) = \mathbf{S}_x(j\omega) + \text{sign}(\omega)\mathbf{S}_x(j\omega) = \begin{cases} 2\mathbf{S}_x(j\omega) & \omega > 0, \\ 0 & \omega < 0. \end{cases}$$

3. Сигналы  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$  ортогональны на интервале  $(-\infty; \infty)$ :

$$(\bar{x}, \tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\tilde{x}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_x(j\omega)\mathbf{S}_{\tilde{x}}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_x(j\omega)j\text{sign}(\omega)\mathbf{S}_x^*(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|\mathbf{S}_x(j\omega)|^2 j\text{sign}(\omega)}_{\text{нечетная функция}} d\omega = 0$$

4. Сдвиг всех сигналов спектральных составляющих действительного сигнала  $x(t)$  на некоторый угол соответствует умножению его аналитического сигнала на  $e^{j\theta}$

$$\begin{aligned} x_{\theta}(t) &= \text{Re}[\dot{x}(t)e^{j\theta}] = \text{Re} \{ [x(t) + j\tilde{x}(t)](\cos \theta + j\sin \theta) \} \\ &= x(t)\cos \theta - \tilde{x}(t)\sin \theta. \end{aligned}$$

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ И ЕГО СВОЙСТВА (СЛАЙД 2)

5. Преобразование частоты сигнала  $x(t)$  (смещение его спектра на интервал  $\Delta\omega$  по оси частот) эквивалентно умножению его аналитического сигнала  $\dot{x}(t)$  на  $e^{j\Delta\omega t}$ . Это видно из пункта 4 при замене  $\Theta$  на  $\Delta\omega t$ :

$$\dot{x}_{\Delta\omega}(t) = e^{j\Delta\omega t} \sum_k A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} = \dot{x}(t) e^{j\Delta\omega t}.$$

Из этого выражения вытекает широко используемый алгоритм преобразования частоты:

$$x_{\Delta\omega}(t) = \operatorname{Re} [\dot{x}_{\Delta\omega}(t)] = x(t) \cos \Delta\omega t - \tilde{x}(t) \sin \Delta\omega t.$$

Любой действительный сигнал  $x(t)$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} [\dot{x}(t)] = \operatorname{Re} [A(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_c t}] = \\ &= \operatorname{Re} \{A(t) [\cos \varphi(t) + j \sin \varphi(t)] (\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t)\} = \\ &= \underbrace{A(t) \cos \varphi(t)}_{A_c(t)} \cos \omega_c t - \underbrace{A(t) \sin \varphi(t)}_{A_s(t)} \sin \omega_c t. \end{aligned}$$

$A_c(t)$  – косинусная квадратурная компонента сигнала;

$A_s(t)$  – синусная квадратурная компонента сигнала;

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СИГНАЛА

Комплексная огибающая

$$\dot{A}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} = A(t)\cos\varphi(t) + jA(t)\sin\varphi(t) = A_c(t) + jA_s(t).$$

Обработку узкополосных сигналов можно выполнить проще и точнее через обработку их квадратурных компонентов. Действительно, если выполняется условие узкополосности сигнала, то спектр комплексного сигнала вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{A}(t)e^{j\omega_c t} = [A_c(t) + jA_s(t)] \cdot (\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t) = \\ &= \underbrace{A_c(t)\cos\omega_c t - A_s(t)\sin\omega_c t}_{x(t)} + j\underbrace{[A_c(t)\sin\omega_c t + A_s(t)\cos\omega_c t]}_{\tilde{x}(t)}, \end{aligned}$$

получаемого сдвигом спектра огибающей  $\dot{A}(t)$  вверх на  $\omega_c$ , полностью располагается в области положительных частот, следовательно, этот сигнал – аналитический и его мнимая часть является преобразованием Гильберта действительной части:

$$x(t) = A_c \cos\omega_c t - A_s \sin\omega_c t$$

$$x(t) = A_c \sin\omega_c t + A_s \cos\omega_c t = A_c H[\cos\omega_c t] - A_s H[\sin\omega_c t]$$

**Таким образом, в результате изучения лекции № 9 удалось сделать следующие выводы:**

- квазигармоническая форма представления сигнала удобна для построения демодуляторов;**
- узкополосные сигналы удобно представлять в виде аналитического сигнала;**
- приём узкополосных сигналов осуществляется с помощью операции разложения его на квадратурные компоненты.**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. Бернард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Сухоруков А.С. Теория электрической связи: Конспект лекций. Часть 1. – М.: МТУСИ, ЦЕНТР ДО, 2002. – 65 с.
4. Сухоруков А.С. Теория цифровой связи: Учебное пособие. Часть 2. – М.: МТУСИ, 2008. – 53 с.
5. Аджемов А.С. Мир информационной реальности. – М.: ИРИАС, 2006. – 296 с.
6. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: Учеб. пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 542 с.
7. Стеценко О.А. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. шк., 2007. – 432 с.
8. Санников В.Г. Сборник задач по курсу «Теория электрической связи»: Учеб. пособие. Часть 1. – М.: МТУСИ, 1992. – 62 с.
9. Санников В.Г. Сборник задач по курсу «Теория электрической связи»: Учеб. пособие. Часть 2. – М.: МТУСИ, 2001. – 65 с.
10. Санников В.Г. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция: Учеб. пособие. – М.: МТУСИ, 2006. – 56 с.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**