Примеры экономических задач линейного программирования

1. Задача определения оптимальной производственной программы
2. Задача определения оптимального состава технологической смеси
3. Транспортная задача

1. Задача определения оптимальной производственной программы

Предприятие выпускает **n видов продуктов**, используя **m видов ресурсов**, запасы которых в рассматриваемом периоде изменить нельзя.

Известны:

- цены продажи изделий - c_j

- запасы ресурсов - b_i

- нормы расхода ресурсов a_{ij}

Требуется: определить объемы выпуска изделий, обеспечивающие предприятию максимум выручки.

Вектор **x**, компоненты x_j которого обозначают объемы выпуска изделий.

Целевая функция:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Таблица коэффициентов a_{ij}

	Продукт 1	Продукт 2	….	Продукт n
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}
. .	. . .	. . .	. . .	. . .
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

Ограничения по ресурсам:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{array}\right\}$$

2, Задача определения оптимального состава технологической смеси

Смесь включает **m компонентов**. Для ее изготовления доступны **n продуктов**. Содержание компонентов не может быть ниже установленного минимума.

Известны:

- цены продуктов c_j

-показатели минимально допустимого содержания компонентов b_i

- показатели концентрации компонентов в продуктах a_{ij}

Требуется составить смесь минимальной стоимости.

Вектор **x**, компоненты которого обозначают количества продуктов x_j для составления смеси.

Формула целевой функции:

$$\min Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Таблица коэффициентов a_{ij}

	Продукт 1	Продукт 2	….	Продукт n
Компонент 1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
Компонент 2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Компонент m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

Ограничения по компонентам:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{array}\right\}$$

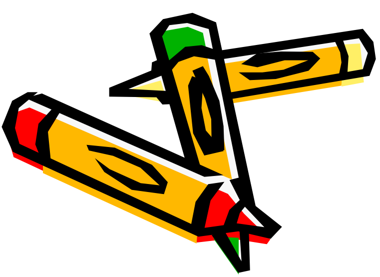
3,Транспортная задача

В распоряжении **m грузоотправителей** имеется некоторый запас однородного груза, который необходимо доставить **n грузополучателям**, в соответствии с объемами их потребностей.

Известны:

- тарифы на доставку единицы груза c_{ij}
- показатели запасов груза d_i
- показатели потребностей в грузе e_j

.



Требуется: составить план перевозок груза, минимизирующий затраты на доставку.

Таблица тарифов c_{ij}

:	Получатель 1	Получатель 2	…… …….	Получатель n	Запас груза
Отправитель 1			…… ……. .		
Отправитель 2	c_{11}	c_{12}	…… …….	c_{1n}	d_1
. . .	. . . c_{21}	. . . c_{22}		. . . c_{2n}	. . . d_2
Отправитель m	c_{m1}	c_{m2}	…… …….	c_{mn}	d_m
Потребность в грузе	e_1	e_2	…… ……. .	e_n	

Совокупность переменных задачи x_{ij}

обозначает количество груза, доставляемого *i*-тым отправителем *j*-тому получателю.

Формула целевой функции: $$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i; i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = e_i; j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \geq 0; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Пример ЗЛП.

Определить оптимальную производственную программу.

Таблица исходных данных:

	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия, физ. ед.		Запас ресурса, физ.ед.
	Для продукта 1	Для продукта 2	
Ресурс 1	**1**	**1**	**18**
Ресурс 2	**0,5**	**1**	**12**
Емкость рынка, физ. ед.	**12**	**9**	
Цена единицы изделия, ден. ед.	**4**	**6**	

Математическая модель задачи:

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 \le 12 \\ 0 \le x_1 \le 12 \\ 0 \le x_2 \le 9 \end{array} \right\}$$

Для построения ОДР проведем в координатной плоскости линии ограничений:

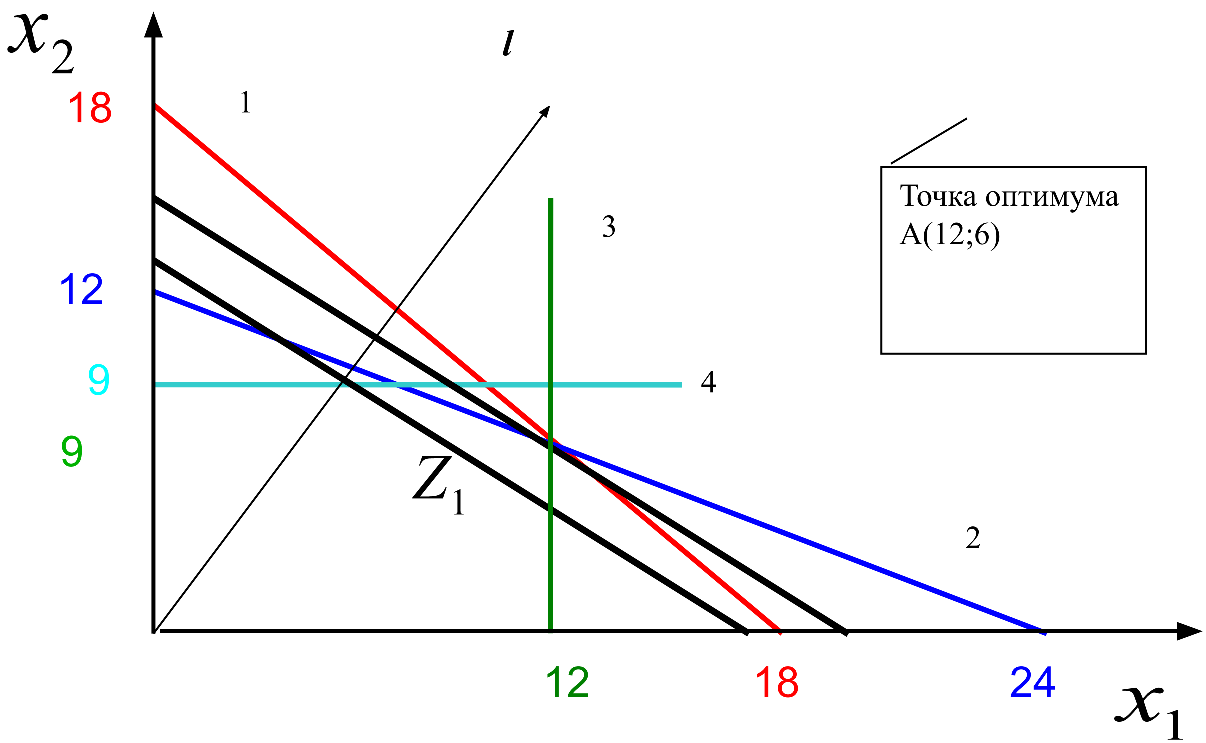
$x_1 + x_2 = 18$ (1) $0{,}5x_1 + x_2 = 12$ (2)

$x_1 = 12$ (3)

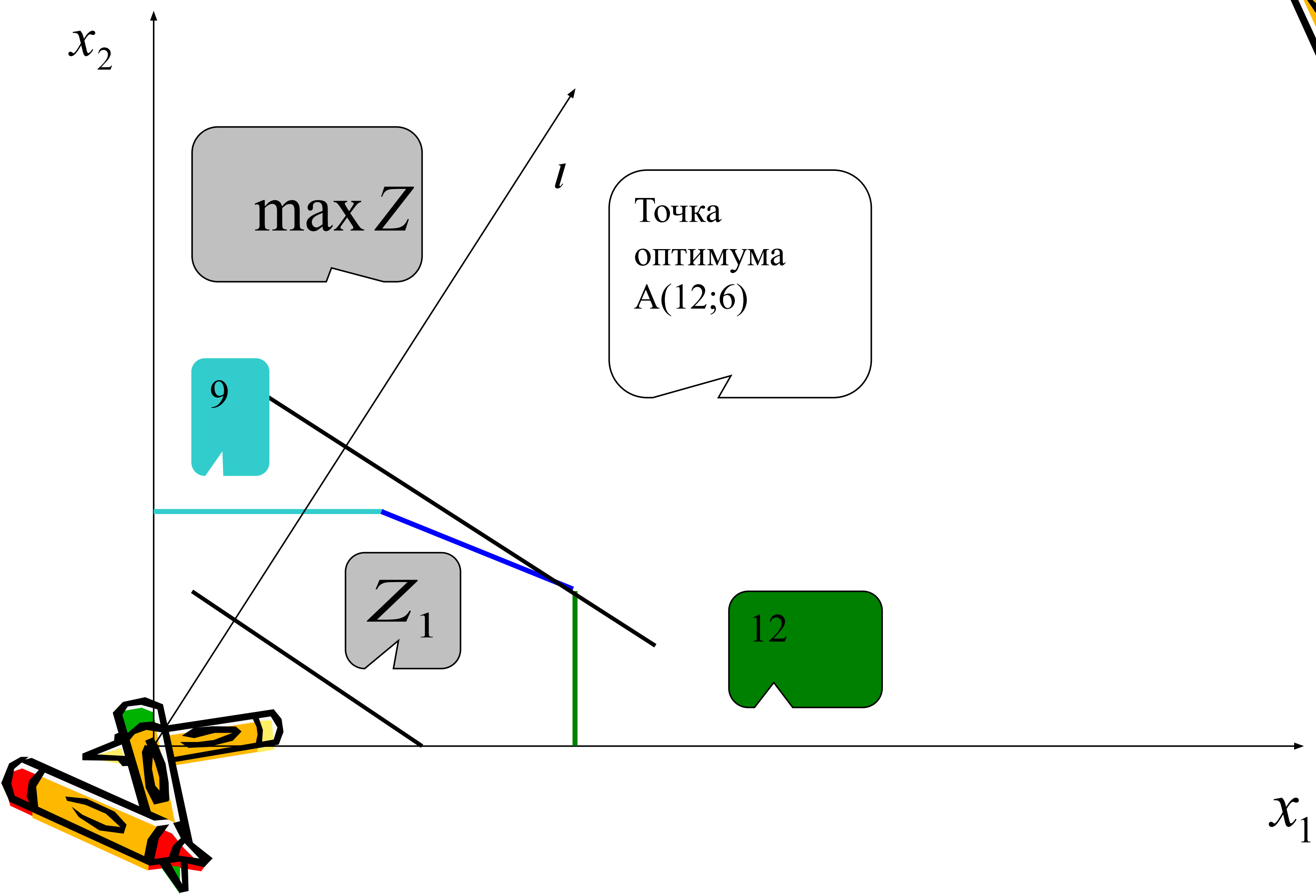
$x_2 = 9$ (4)

Для построения линий уровня Z воспользуемся градиентом $\nabla Z = (4;6)$

или кратным ему вектором ***l***=(12;18).



x2
18
12
9
9
l
1
3
4
2
Z1
12
18
24
x1
Точка оптимума
A(12;6)


x_2
$\max Z$
l
Точка
оптимума
A(12;6)
9
Z_1
12
x_1