Теория двойственности в линейном программировании

1. Экономическое содержание двойственной задачи. Правила построения симметричных двойственных задач.
2. Применение теории двойственности.

Экономическое содержание двойственной задачи

- Рассмотрим в качестве исходной задачу определения оптимальной производственной программы

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Экономическое содержание двойственной задачи

- Предположим, предприятие рассматривает в качестве альтернативы продажу ресурсов. Определим, при каких условиях данная альтернатива может быть реализована.

Экономическое содержание двойственной задачи

- Выявить условия заключения сделки возможно на основании учета интересов потенциального покупателя и предприятия как продавца ресурсов
- Интерес продавца – получение дохода, не меньшего, чем доход от продажи продуктов по ценам c_j
- Интерес покупателя – минимизация затрат на приобретение запасов ресурсов b_i

Экономическое содержание двойственной задачи

- Учесть интересы сторон можно, решив задачу следующего содержания

$$\min F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Экономическое содержание двойственной задачи

- В данной задаче $y_i = \Delta Z / \Delta b_i$ представляют собой маржинальные цены ресурсов, отражающие изменение выручки предприятия при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу;
- Целевая функция характеризует интерес потенциального покупателя
- Ограничения характеризуют интерес предприятия как продавца ресурсов

Экономическое содержание двойственной задачи

- Для составления формулы целевой функции необходимо суммировать произведения запасов ресурсов на маржинальные цены

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

Экономическое содержание двойственной задачи

- В каждом ограничении сопоставляется, с одной стороны, оценка ресурсов, требуемых для выпуска единицы изделия, и, с другой стороны, цена продажи изделия

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

Экономическое содержание двойственной задачи

- Для составления левой части ограничения отбираются коэффициенты a_{ij} (нормы расхода ресурсов) по второму индексу, обозначающему номер продукта. В таблице исходных данных эти коэффициенты образуют столбец.

Экономическое содержание двойственной задачи

- Таблица норм расхода ресурсов

	Продукт 1	Продукт 2	….	Продукт n
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

Правила построения двойственных задач

Рассмотренные выше задачи являются симметричными: исходная – симметричная на максимум, а двойственная – симметричная на минимум. Сравнение записи задач позволяет сформулировать правила построения симметричных двойственных задач.

Правила построения двойственных задач

- Если исходная задача – на максимум, то двойственная – на минимум целевой функции;
- Число переменных двойственной задачи равно числу ограничений исходной задачи;
- Число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи;

Правила построения двойственных задач

- Знак неравенств меняется на противоположный;
- Матрица коэффициентов транспонируется; a_{ij}
- Коэффициенты при переменных в целевой функции и свободные члены ограничений меняются местами;
- Переменные обеих задач неотрицательны

Применение теории двойственности

- 2.1. На базе теории двойственности разработаны методы рационализации решения задач, симметричных на минимум;
- 2.2. Двойственные оценки ресурсов (маржинальные цены) применяются в постоптимизационном анализе

Применение теории двойственности (2.1)

- Рассмотрим ЗЛП на составление технологической смеси, которая имеет симметричную на минимум форму записи. Изменение данной записи на каноническую не обеспечивает выделения базиса системы в виде единичной матрицы. Следовательно, получить неотрицательное базисное решение не удается.

Применение теории двойственности (2.1)

- Исходная запись задачи:

$$\min Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Применение теории двойственности (2.1)

- Каноническая система ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m} \end{cases}$$

Применение теории двойственности (2.1)

- Матрица канонической системы ограничений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -1 \end{pmatrix}$$

Применение теории двойственности (2.1)

- Можно преобразовать матрицу методом полного исключения переменных;
- Можно сформировать единичную матрицу с помощью искусственных переменных;
- Можно отказаться от решения прямой задачи и решить двойственную задачу

Применение теории двойственности (2.1)

- Реализация первой или второй альтернативы является, как правило, более трудоемкой;
- Выбираем третью альтернативу;
- По правилам строим двойственную (по отношению к исходной) задачу;
- Решаем двойственную задачу симплекс-методом

Применение теории двойственности (2.1)

- Решив любую (прямую или двойственную) задачу симплекс-методом, мы получаем решения обеих задач. Это следует из доказанных теорем двойственности.

Применение теории двойственности (2.1)

- 1. Если одна из задач имеет оптимальное решение, то оптимальное решение существует и у другой задачи.
- 2. Экстремальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи одинаковы

$$\min Z = \max F$$

Применение теории двойственности (2.1)

- 3. Решение двойственной задачи определяется в индексной строке по правилу соответствия

$$\overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{matrix}}^{\text{первоначальные}} \qquad \overbrace{\begin{matrix} y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} \end{matrix}}^{\text{балансовые}}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} \end{matrix}}_{\text{балансовые}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix}}_{\text{первоначальные}}$$

Применение теории двойственности (2.1)

- Правило соответствия не означает равенства значений указанных переменных. Справедливо следующее утверждение:

$$\left\langle \Delta_1 = x_{n+1}; \Delta_2 = x_{n+2}; \ldots; \Delta_m = x_{n+m} \right\rangle$$

$$\left\langle \Delta_{m+1} = x_1; \Delta_{m+2} = x_2; \ldots; \Delta_{m+n} = x_n \right\rangle$$

Применение теории двойственности (2.2)

- Постоптимизационный анализ – анализ оптимальной производственной программы, основой которого являются маржинальные цены ресурсов -

$$y_i = {\Delta Z}/{\Delta b_i}$$

Применение теории двойственности (2.2)

- Маржинальные цены ресурсов являются основой принятия решений об изменении запаса ресурсов в следующем плановом периоде, поскольку y_i информируют об изменении валового дохода при изменении запаса ресурса на единицу

Применение теории двойственности (2.2)

- Маржинальные цены ресурсов информируют о дефицитности ресурсов;
- Если $y_i = 0$, то ресурс бездефицитен (его запас избыточен);
- Если y_i положительна, то запас ресурса используется полностью

Применение теории двойственности (2.2)

- Маржинальные цены можно использовать при принятии решений о расширении ассортимента;
- Предположим, рассматривается вопрос о целесообразности включения в производственную программу дополнительного вида продукции с номером l

Применение теории двойственности (2.2)

- Цена продукта c_l, а нормы расхода ресурсов a_{il};
- Продукт выгодно включать в программу, если

$$a_{1l} y_1 + a_{2l} y_2 + \dots + a_{ml} y_m \text{ меньше } c_l$$