

Основные характеристики функционирования СМО с отказами

Рассмотрим пример задачи на определение показателей эффективности работы СМО с отказами.

В справочный отдел с тремя телефонными каналами поступают запросы. Если заняты все три канала, то вновь поступающий звонок не принимается. Среднее время работы с одним звонком 3 мин.

Интенсивность потока заявок $0,25$ ед./мин.

Найти основные показатели эффективности обслуживания запросов.

Основные характеристики функционирования СМО с отказами

По условию

$$n = 3; \lambda = 0,25; \bar{t}_{обсл} = 3(мин)$$

На основании чего можно определить

$$\mu = 1/3 = 0,33; \quad \alpha = 0,25/0,33 = 0,75$$

Основные характеристики функционирования СМО с отказами

Предельные вероятности состояний «каналы свободны»; «занят один канал» и т.д. определяются по формулам

$$P_0 = \left[1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3}{3!} \right]^{-1} = 0,476;$$

$$P_1 = 0,75 \cdot 0,476 = 0,357; \quad P_2 = \left(\frac{0,75^2}{2!} \right) \cdot 0,476 = 0,134;$$

$$P_3 = \left(\frac{0,75^3}{3!} \right) \cdot 0,476 = 0,033 = P_{отк}$$

Основные характеристики функционирования СМО с отказами

Остальные показатели эффективности
также определяем по ранее
приведенным формулам

$$P_{\text{обсл}} = 1 - 0,033 = 0,967;$$

$$A = 0,25 \cdot 0,967 = 0,242 \text{ ед/мин};$$

$$\bar{k} = \frac{0,242}{0,33} = 0,725$$

Основные характеристики функционирования СМО с отказами

Данные показатели означают следующее. 47,6% времени в отделе нет ни одной заявки. 35,7% имеется одна заявка. 13,4% имеется две заявки. 3,3% времени – три заявки. Следовательно, вероятность отказа (заняты все три канала) – 0,033. Относительная пропускная способность означает, что из каждых 100 заявок отдел обслуживает 96,7. В минуту в среднем обслуживается 0,242 заявки. Среднее число занятых каналов 0,725. Это значит, что каждый канал будет занят обслуживанием заявок в среднем лишь на $72,5:3=24,2\%$.

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

- Рассмотрим пример задачи, описывающей функционирование СМО с неограниченной длиной очереди.

Фирма по ремонту радиоаппаратуры имеет 5 мастеров. В среднем в фирму поступает 10 заявок на ремонт в день. В среднем в день каждый мастер успевает отремонтировать 2,5 радиоаппарата.

За единицу времени принимаем 7-часовой рабочий день.

Основные характеристики функционирования СМО с

ожиданием

На основании условия можем
определить

$$n = 5$$

$$\lambda = 10$$

$$\mu = 2,5$$

$$\alpha = 10 \cdot \frac{1}{2,5} = 4$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

- Предельные вероятности состояний определим по формулам

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!(1 - \frac{4}{5})}} = 0,013$$

$$P_5 = \frac{4^5 \cdot 0,013}{5!(1 - \frac{4}{5})} = 0,554$$

Основные характеристики функционирования СМО с

ожиданием

Среднее время обслуживания (ремонта) одного аппарата

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = \frac{7}{2,5} = 2,8ч \text{ \textit{аппарат}}$$

Среднее время ожидания каждым неисправным аппаратом начала

обслуживания

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0,554 \cdot 2,8}{5 - 4} = 1,55ч$$

Средняя длина очереди (определяет требуемую для хранения аппаратов площадь)

$$\bar{L}_{оч} = \frac{0,554 \cdot 4}{5(1 - \frac{4}{4})} \approx 2,2 \text{ \textit{аппарата}}$$

Основные характеристики функционирования СМО с

ожиданием

Среднее число мастеров, свободных от
работы

$$\overline{N}_0 = 0,013 \left[\frac{5-0}{1} \cdot 1 + \frac{5-1}{1!} \cdot 4 + \frac{5-2}{2!} \cdot 4^2 + \frac{5-3}{3!} \cdot 4^3 + \frac{5-4}{4!} \cdot 4^4 \right] \approx 0,95$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

- В СМО с ограниченной длиной очереди поток заявок поступает изнутри системы. Например, в фирме имеется несколько единиц оборудования, которые случайным образом могут выходить из строя и требовать обслуживания в виде ремонта. Максимальное количество заявок на обслуживание в этом случае оказывается фиксированным. Оно обозначается

m

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

Основными показателями
эффективности работы таких систем
являются следующие.

1. Вероятность того, что занято k
каналов обслуживания при условии, что
число заявок не больше числа каналов
обслуживания

$$P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \alpha^k P_0; \quad (1 \leq k \leq m)$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

2. Вероятность того, что в системе находится k заявок при условии, что число заявок больше числа каналов

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n} n! (m-k)!} \alpha^k P_0; \quad (n \leq k \leq m)$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

3. Вероятность того, что все каналы
свободны

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^m P_k$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

4. Средняя длина очереди

$$M_{оч} = \sum_{k=n+1}^m (k-n)P_k$$

5. Коэффициент простоя обслуживаемого объекта

$$K_{пр.об.} = \frac{M_{оч}}{m}$$

6. Среднее число заявок

$$M = \sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^m kP_k$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

7. Среднее число свободных каналов

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)P_k$$

8. Коэффициент простоя обслуживающего канала

$$K_{пр.кан.} = \frac{\overline{N}_0}{n}$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

- Рассмотрим задачу, описывающую работу СМО с ограниченной длиной очереди.

Рабочий обслуживает группу из трех автоматов. В среднем автоматы требуют обслуживания с интенсивностью 2 авт./час. На обслуживание одного автомата уходит в среднем 12 мин.

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

На основании условий определяем

$$\lambda = 2 \text{ авт/час}$$

$$n = 1; m = 3$$

$$1/\mu = 0,2 \text{ ч/авт}; \quad \mu = 5 \text{ авт/ч}; \quad \alpha = 0,4$$

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

Вероятности состояний определяем по
формулам

$$P_1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0,4 P_0 = 1,2 P_0;$$

$$P_2 = \frac{3!}{1^{2-1} 1!(3-2)!} \cdot 0,4^2 P_0 = 0,96 P_0;$$

$$P_3 = \frac{3!}{1^{3-1} 1!(3-3)!} \cdot 0,4^3 P_0 = 0,384 P_0$$

функционирования СМО с ожиданием

На основании расчетов заполним таблицу

k	$k - n$	$\frac{P_k}{P_0}$	P_k	$(k - n)P_k$	kP_k
0	0	1,0000	0,2822	0	0
1	0	1,2000	0,3386	0	0,3386
2	1	0,9600	0,2709	0,2707	0,5418
3	2	0,3840	0,1083	0,2166	0,3249
	Σ	3,5440	1,0000	0,4875	1,2053

Основные характеристики функционирования СМО с ожиданием

На основании ранее рассмотренных
формул определяем остальные
показатели

$$M_{оч} = 0,4875; M = 1,2053; K_{пр.об.} = 0,1625; K_{пр.кан.} = 0,2822$$