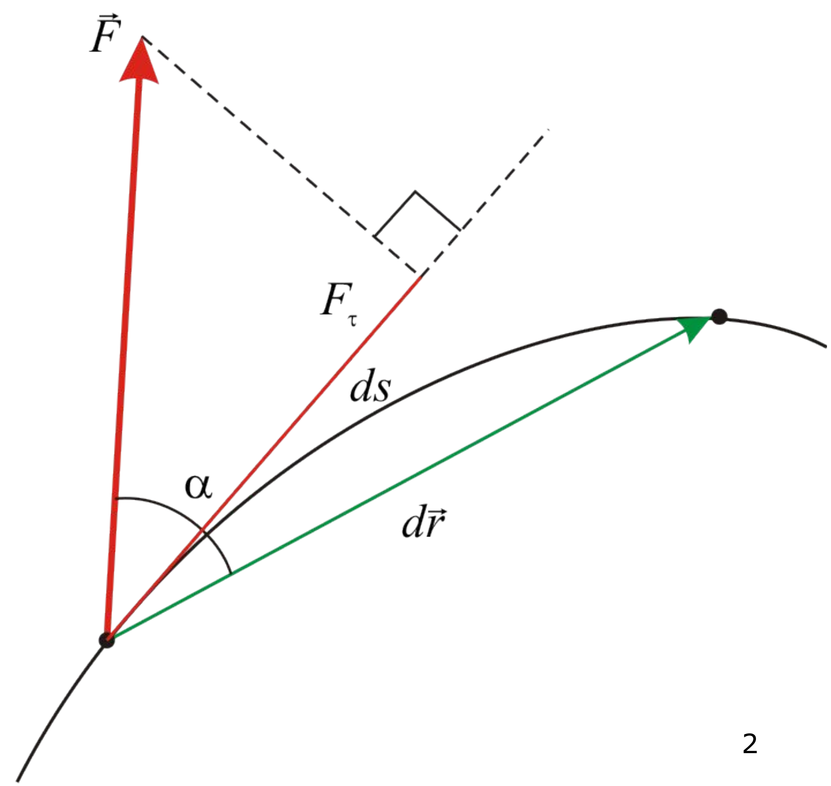
ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.1 Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

- Рассмотрим частицу, которая движется под действием силы **F** (величина и направление **F** может меняться с течением времени).
- Пусть частица совершила элементарное перемещение *d***r** за промежуток времени *dt*, в течение которого силу **F** можно считать постоянной.
- **Элементарной работой** δ*A* силы **F** называется скалярное произведение вектора силы на вектор *d***r** элементарного перемещения :

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Элементарная работа силы

- Элементарную работу можно представить в другой форме:

$$\delta A = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha = |\vec{F}|ds\cos\alpha = F_\tau ds$$

Здесь α – угол между векторами **F** и *d***r**, *ds* – длина пути, пройденного частицей за время *dt*, F_τ – проекция вектора на направление касательной к траектории движения частицы.

- Элементарная работа δA – скалярная величина и алгебраическая:
  - если $\alpha < \pi/2$; $\delta A > 0$,
  - если $\alpha > \pi/2$; $\delta A < 0$,
  - если $\alpha = \pi/2$, $\delta A = 0$, т.е. при условии, что сила **F** перпендикулярна перемещению *d***r** и скорости **v** тела.

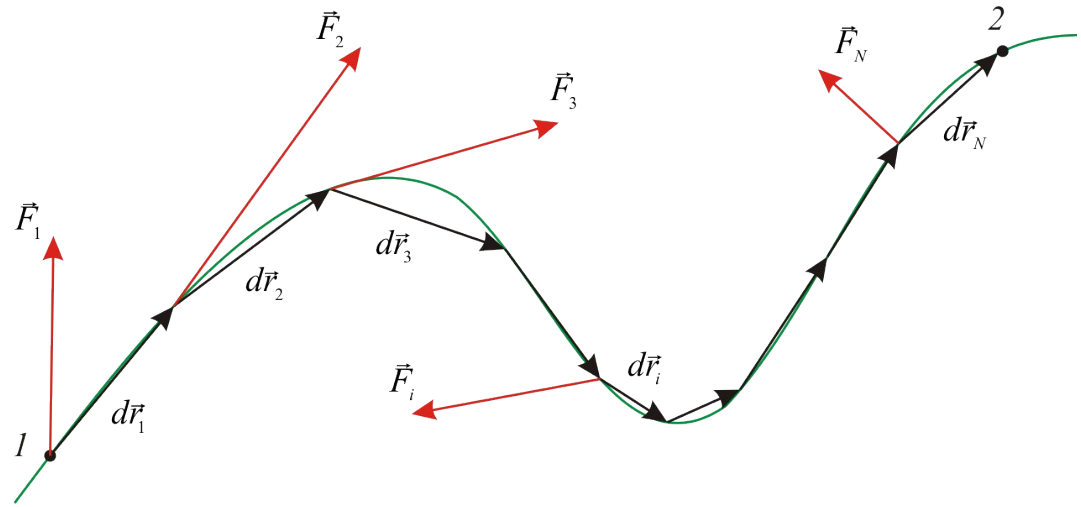
Элементарная работа силы

- В декартовой прямоугольной системе координат элементарную работу силы **F** можно представить в виде

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работа силы на конечном перемещении

- Пусть частица под действием силы переместилась вдоль некоторой траектории из точки *1* в точку *2*.
- Чтобы вычислить работу A силы на пути между точками *1* и *2*, необходимо разделить траекторию на *N* элементарных участков так, чтобы на каждом участке силу $\mathbf{F}_i$ можно было считать величиной постоянной (для этого число *N* должно быть достаточно большим).



Вычислим и сложим элементарные работы на всех участках:

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Работа силы на конечном перемещении

- Таким образом, *работа A силы* **F** *на конечном пути* равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Единицей работы в системе СИ является **джоуль (Дж)**.
- Один джоуль равен работе силы в 1 Н на перемещении 1 м при условии, что направления силы и перемещения совпадают: 1 Дж = 1 Н · м.

Мощность

- **Мощность** – это скалярная физическая величина, которая характеризует работу силы, произведенную в единицу времени.
- Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt сила **F** совершила работу δA.
- **Мгновенной мощностью силы** называется величина, равная

$$P = \frac{\delta A}{dt}$$

- Единицей мощности в системе СИ является **ватт** (**Вт**):

1 Вт = 1 Дж/с.

Мощность

- Мгновенную мощность можно выразить через скорость **v** движения частицы и действующую на нее силу **F**:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Таким образом, в прямоугольной декартовой системе координат

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

Мощность

- Выразим работу *A* силы на конечном пути через мгновенную мощность *P*:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = Pdt$$

- С учетом этого соотношения, работу *A* силы на конечном пути можно представить в виде

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} Pdt$$

ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.2 Кинетическая энергия частицы и системы частиц

Кинетическая энергия частицы

- Пусть частица массы m движется со скоростью **v**.
- **Кинетической энергией частицы** называется величина:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

- Здесь $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – модуль импульса частицы

Кинетическая энергия системы частиц

- **Кинетическая энергия системы частиц**, массы которых m_1, m_2, …, m_i, …, m_N, а скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_i$, …, $\mathbf{v}_N$, равна сумме кинетических энергий каждой из частиц:

$$\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Теорема о кинетической энергии частицы

- Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы **F** (равнодействующая всех сил, приложенных к частице).

- **Теорема о кинетической энергии.** *Работа равнодействующей всех сил, приложенных к частице, равна приращению кинетической энергии частицы*:

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\mathrm{K} \qquad A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Delta\mathrm{K}$$

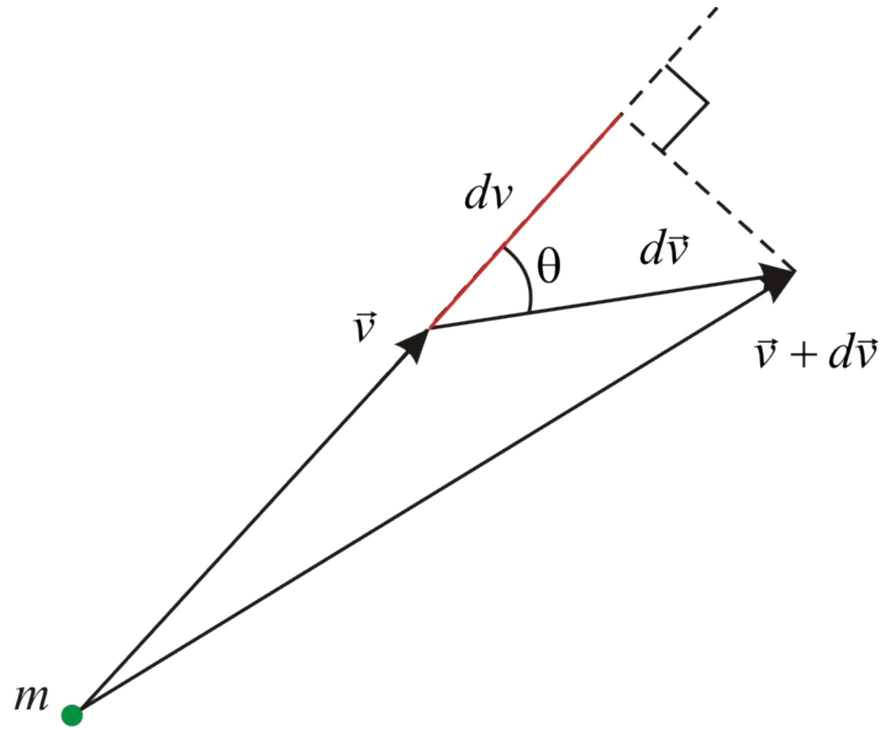
- Здесь $d\mathrm{K}$ – приращение кинетической энергии частицы на элементарном перемещении; v_1 и v_2, K_1 и K_2 – скорости и кинетические энергии частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Доказательство теоремы о кинетической энергии частицы

- Работа силы **F** на элементарном перемещении d**r** равна:

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = md\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$md\vec{v}\cdot\vec{v} = m|\vec{v}||d\vec{v}|\cos\theta = mvdv$$



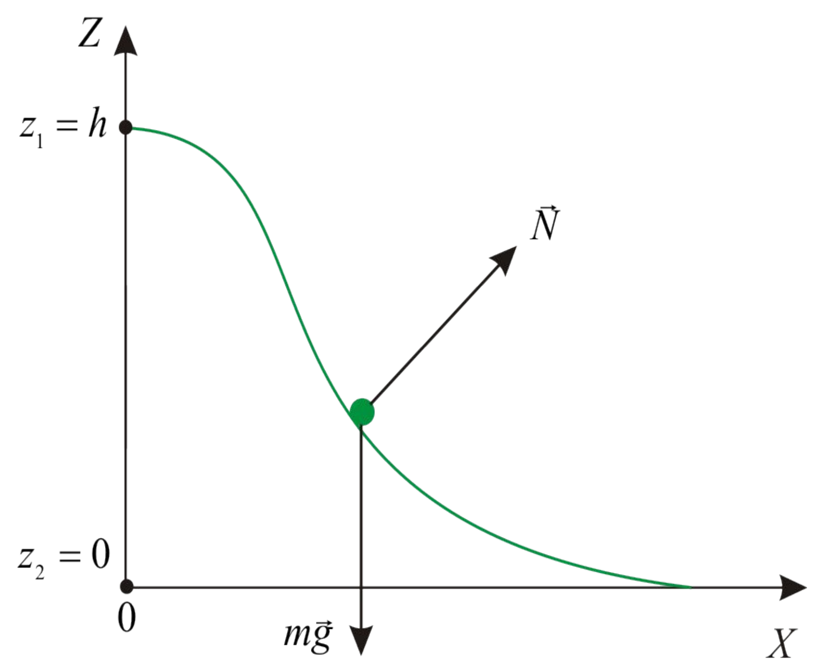
Тогда

$$\delta A = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\mathrm{K}$$

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 d\mathrm{K} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Delta\mathrm{K}$$

Пример использования теоремы о кинетической энергии при решении задач механики

- 1. По гладкой поверхности произвольной формы, плавно переходящей в гладкую горизонтальную плоскость, с высоты *h* с нулевой начальной скоростью спускается тело массой *m*. Найдем скорость *v* тела на горизонтальном участке траектории.
- По теореме о кинетической энергии:



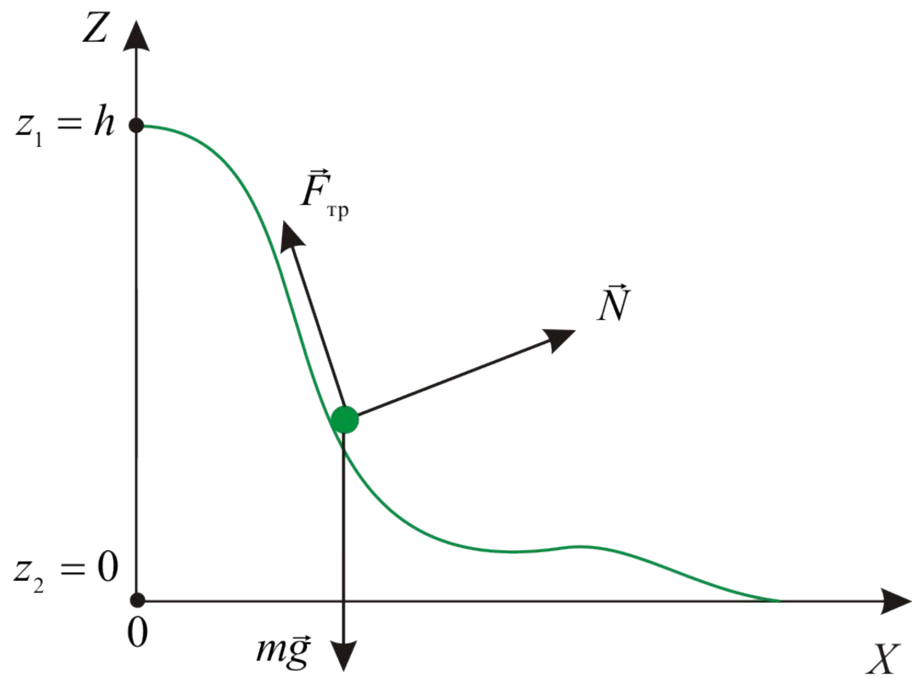
$$A_{тяж} + A_N = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$$

$$A_N = 0 \quad A_{тяж} = mg(z_1 - z_2) = mg(h - 0) = mgh$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Пример использования теоремы о кинетической энергии при решении задач механики

- На шероховатой поверхности произвольной формы, плавно переходящей в шероховатую горизонтальную плоскость, с высоты h с нулевой начальной скоростью спускается тело массой m и останавливается на горизонтальном участке траектории. Найдем работу силы трения на всем пути.
- По теореме о кинетической энергии:



$$A_{тяж} + A_N + A_{тр} = 0$$

$$A_{тяж} = mg(h - 0) = mgh$$

$$A_N = 0$$

$$mgh + 0 + A_{тр} = 0 \Rightarrow A_{тр} = -mgh$$

ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.3 Консервативные силы и их свойства

Силовое поле

- Если на частицу в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют **силовым полем**.
- Если силы поля не зависят от времени, силовое поле называют **стационарным**. Будем рассматривать именно их.

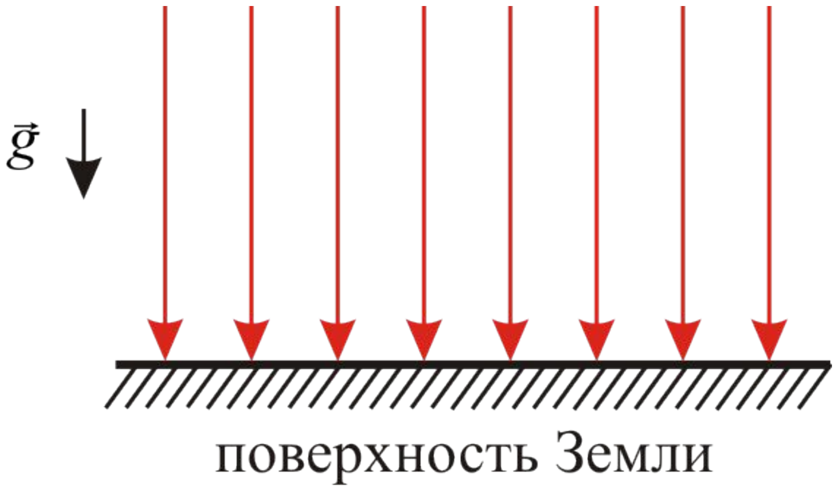
- *Пример.* Тело массой m, расположенное вблизи поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести $m\mathbf{g}$. Величину и направление силы тяжести можно считать приблизительно одинаковыми во всех точках пространства вблизи земной поверхности. Говорят, что в этом случае *тело находится в однородном поле силы тяжести*.
- Планеты Солнечной системы находятся в *гравитационном поле* Солнца. Электрон в атоме водорода движется в *кулоновском поле* атомного ядра.

Силовые линии поля

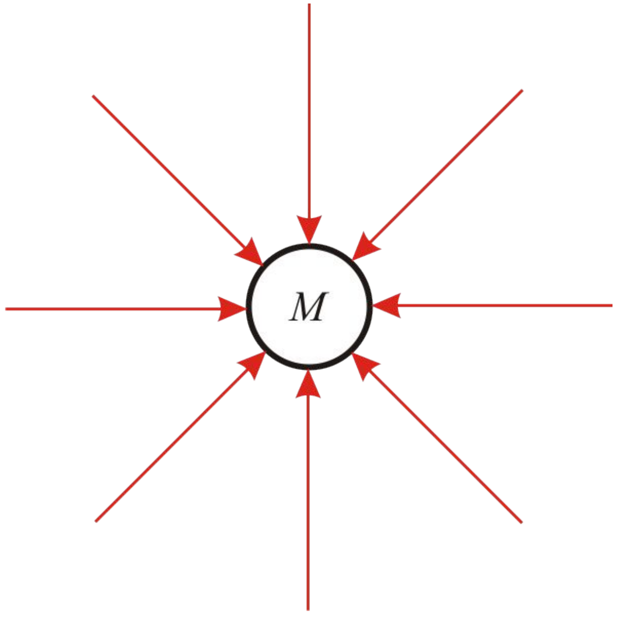
- **Силовой линией** поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с действующей на тело силой этого поля; густота линий пропорциональна модулю силы поля.

Силовые лини поля

Поле однородной силы тяжести



Поле гравитационной силы

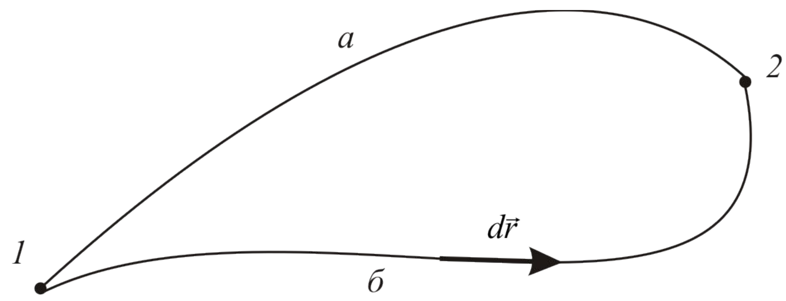


Консервативные силы

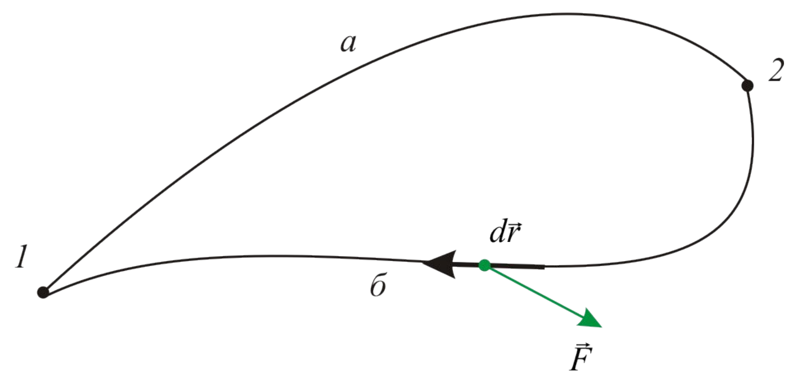
- **Консервативным** называется поле, в котором совершаемая при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение работа сил поля не зависит от формы траектории и характера движения, а определяется только начальным и конечным положениями частицы.
- Силы консервативного поля называются **консервативными силами**.
- Пример сил, которые не являются консервативными, – силы трения, силы сопротивления. Работы силы трения зависит, в частности, от длины пути. Работа силы сопротивления также зависит от формы траектории, а также от характера движения тела (сила сопротивления пропорциональна скорости тела при малых скоростях).

Свойство консервативных сил

- Покажем, что *при перемещении тела в консервативном поле по замкнутой траектории работа консервативных сил равна нулю.*



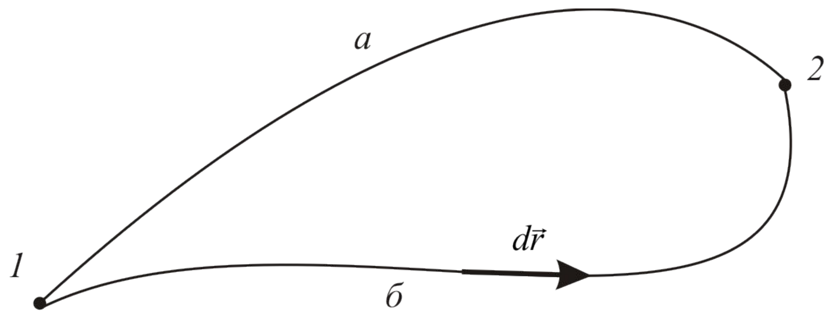
- Пусть частица совершила перемещение по замкнутой траектории *1-а-2-б-1*, где точка *1* – начальное положение тела, точка *2* – произвольное промежуточное положение, буквами *а* и *б* обозначим участки траектории между точками *1* и *2*. Работу сил поля на замкнутой траектории *1-а-2-б-1* можно представить как сумму работа на участках *1-а-2* и *2-б-1*:



$$A_{1-a-2-б-1} = A_{1-a-2} + A_{2-б-1}$$

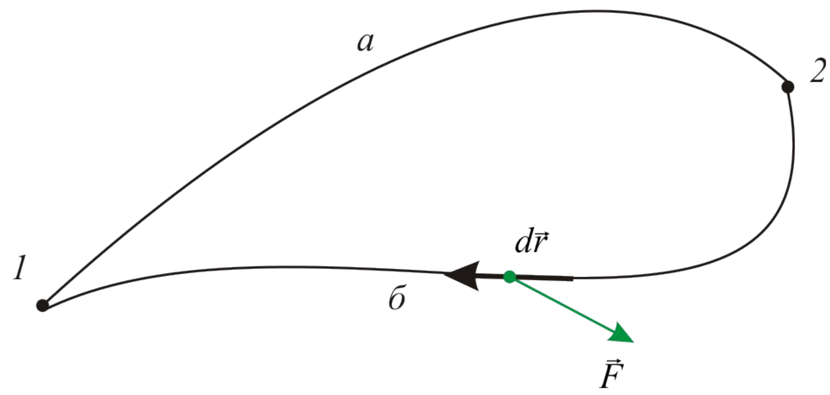
Работа консервативной силы при движении по замкнутой траектории

- Работа сил поля при перемещении частиц из точки *2* в точку *1* по участку *б* равна по величине и противоположна по знаку работе сил поля при обратном перемещении из точки *1* в точку *2* по тому же участку *б*:



$$A_{2-б-1} = -A_{1-б-2}$$

- Причем это равенство справедливо и для элементарных работ. Тогда



$$A_{1-a-2-б-1} = A_{1-a-2} - A_{1-б-2} = 0$$

- Аналогично обратное утверждение: *если работа сил поля по замкнутой траектории равна нулю, поле является консервативным.*

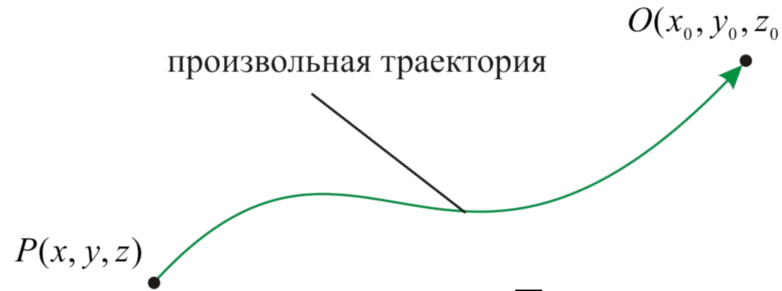
ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.4 Потенциальная энергия частицы и ее свойства

Потенциальная энергия частицы

- Рассмотрим консервативное поле. Частица расположена в точке *P* поля с координатами *x*, *y*, *z*. Выберем произвольную точку *O* с координатами x_0, y_0, z_0 и назовем ее **началом отсчета потенциальной энергии** (в точке *O* потенциальная энергия частицы равна нулю).

  Потенциальной энергией П частицы в точке *P* консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении частицы из данной точки *P* в точку *O*, принятую за начало отсчета потенциальной энергии:



$$\Pi = \int_P^O \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Здесь **F** – сила поля; интеграл вычисляется по *произвольной* траектории между точками *P* и *O*. В силу свойства консервативного поля интеграл не зависит от вида траектории и характера движения частицы, а определяется только положение точек *P* и *O* в пространстве.

Свойства потенциальной энергии частицы

1. *Потенциальная энергия является функцией только координат* x, y, z *точки поля, в которой расположена частица:*

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

Доказательство. Поскольку поле консервативное, интеграл

$$\Pi = \int_P^O \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

зависит только от положения точек P и O, т.е. только от координат этих точек. Поэтому $\Pi = \Pi(x,y,z,x_0,y_0,z_0)$. Положение точки O фиксировано, поэтому ее координаты x_0, y_0, z_0 можно рассматривать в качестве параметров функции П. Следовательно П зависит только от трех переменных x, y, z.

Свойства потенциальной энергии частицы

2. *Работа сил поля при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии частицы*:

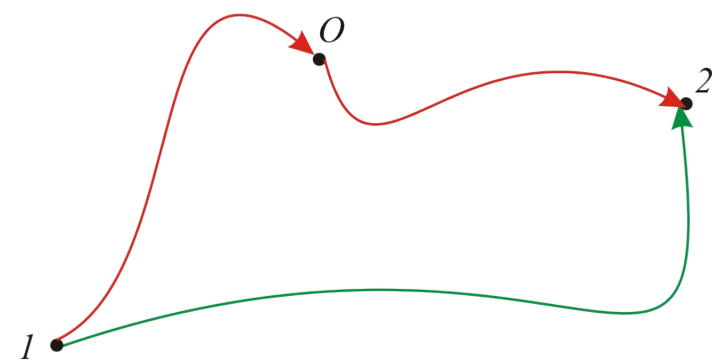
$$A_{12} = -\Delta \Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

Здесь Π_1 и Π_2 – значения потенциальных энергий частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Докажем это свойства

Свойства потенциальной энергии частицы

- Пусть частица перемещается из начального положения (точка *1*) в конечное положение (точка *2*) по двум траекториям, одна из которых проходит через точку O – начало отсчета потенциальной энергии. Работу сил поля на этих траекториях обозначим A_{12} и A_{1O2}. Поскольку поле консервативное, эти работы друг другу:



$$A_{12} = A_{1O2}$$

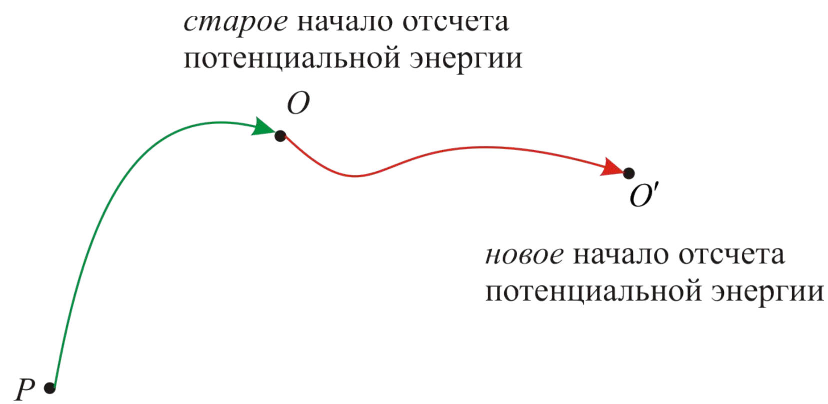
- Представив как сумму работ на участках *1-O* и *O-2* траектории *1-O-2*. получим:

$$A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = \Pi_1 - \Pi_2$$

Свойства потенциальной энергии частицы

- 3. *Потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной постоянной величины.*

- Поясним смысл этого утверждения. Заменим точку O начала отсчета потенциальной энергии на другую точку O' и выразим потенциальную энергию Π', начало отсчета которой находит в точке O', через потенциальную энергию Π, начало отсчета которой – в точке O. С этой целью вычислим работу сил поля по перемещению частицы из точки P в точку O' по траектории P-O-O', проходящей через точку O:



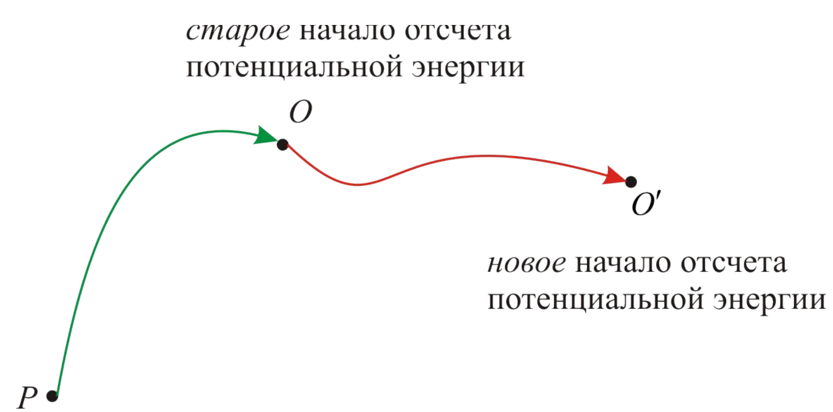
$$\Pi' = A_{PO'} = A_{PO} + A_{OO'} = \Pi + C$$

$$C = A_{OO'} = \int_{O}^{O'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Величина C зависит только от положения точек O и O' и не зависит от траектории перехода.

Свойства потенциальной энергии частицы

- Таким образом, при изменении начала отсчета потенциальная энергия П частицы в произвольной точке *P* изменится на постоянную величину *C* и станет равна П′. Величина *C* не зависит от положения точки *P*. Следовательно, при *изменении начала отсчета потенциальная энергия во всех точках поля изменится на одинаковую величину C*.



- Поскольку начало отсчета потенциальной энергии выбирается произвольно, можно утверждать, что *потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной величины.*

ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.5 Связь между силой консервативного поля и потенциальной энергией частицы

Описание взаимодействия частицы с другими телами

- Взаимодействие частицы с другими телами можно описывать 2-мя способами:
  - с помощью *сил* (этот способ обладает большей общностью);
  - с помощью *потенциальной энергии* (этот способ применим только к консервативным силам).

Задача: установить связь между потенциальной энергией П и силой поля **F** (т.н. определить поле сил по заданной потенциальной П(**r**))

Вывод формулы связи между потенциальной энергией частицы и силой консервативного поля

- Работа сил консервативного стационарного поля при элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ частицы может быть представлена как убыль ее потенциальной энергии:

$$\delta A = -d\Pi$$

- С другой стороны, согласно определению работы:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- Пусть частица переместилась вдоль оси X, тогда $dy = dz = 0$:

$$\delta A = F_x dx = -d\Pi \Rightarrow F_x = -\left.\frac{d\Pi}{dx}\right|_{y,z=\mathrm{const}}$$

Вывод формулы, связи между потенциальной энергией частицы и силой консервативного поля

- Если аналогично взять частные производные потенциальной энергии частицы по координатам y и z, найдем:

$$F_y = -\frac{d\Pi}{dy}\bigg|_{x,z=\mathrm{const}}, F_z = -\frac{d\Pi}{dz}\bigg|_{x,y=\mathrm{const}}$$

- Теперь найдем сам вектор консервативной силы:

$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Вывод формулы связи между потенциальной энергией частицы и силой консервативного поля

- Величину, стоящую в скобках, называют *градиентом скалярной функции* П и обозначают:

$$\mathrm{grad}\Pi \equiv \nabla\Pi$$

Здесь векторный оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Таким образом, связь между силой поля и потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\nabla\Pi$$

Формула связи между потенциальной энергией частицы и силой консервативного поля

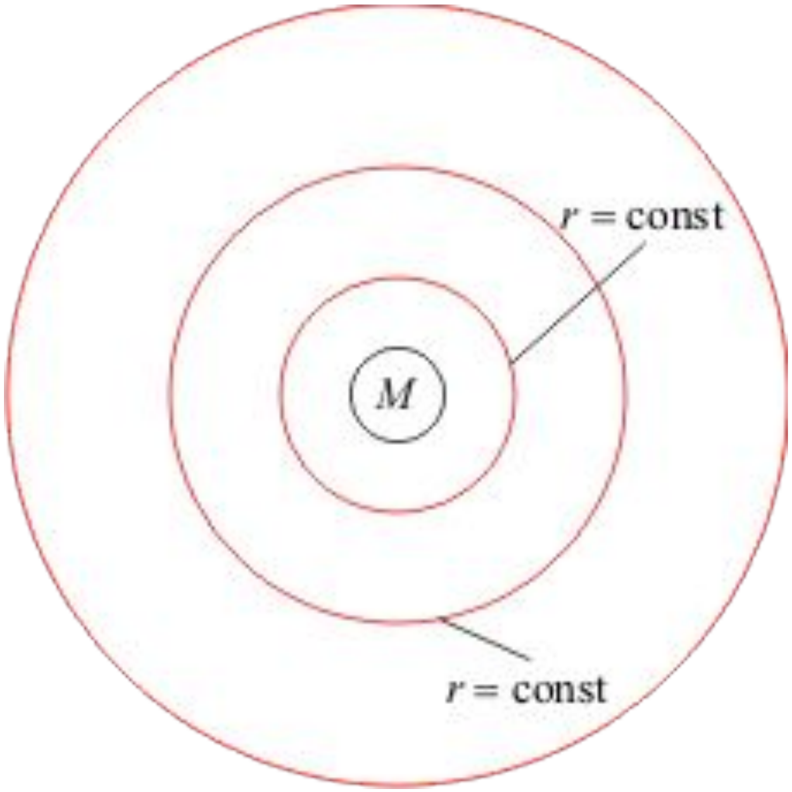
- Таким образом, *сила* **F** *консервативного поля взятому со знаком минус градиенту потенциальной энергии* частицы в данной точке поля.

$$\vec{F} = -\nabla \Pi$$

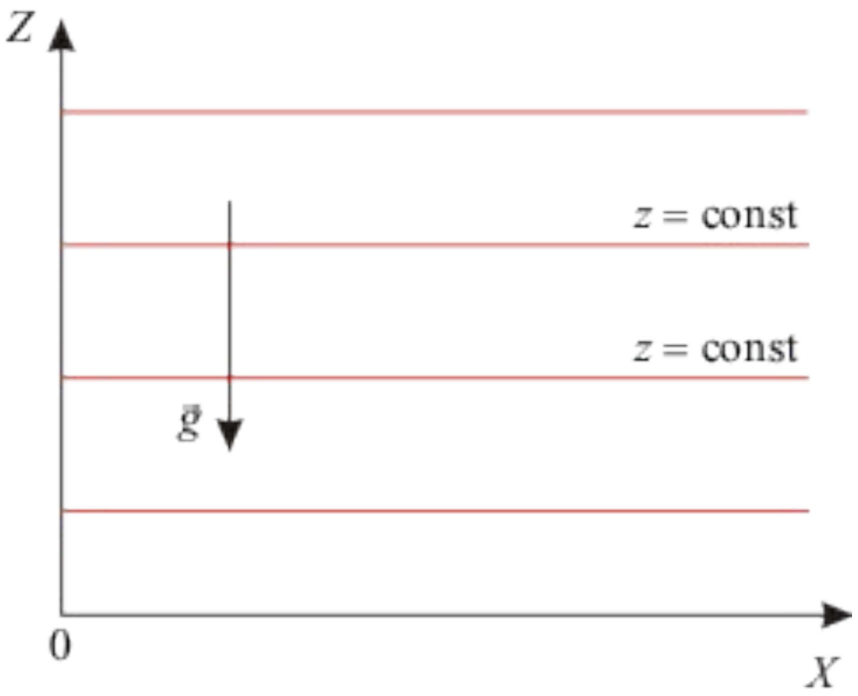
- Смысл градиента становится нагляднее, если ввести понятие **эквипотенциальной поверхности** – поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия П имеет одно и то же значение (каждому значению П соответствует своя эквипотенциальная поверхность).
- **Градиент скалярной функции** П – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону наибольшего возрастания функции П.

Эквипотенциальные поверхности

Поле гравитационной силы



Поле однородной силы тяжести



ГЛАВА 4
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.6 Закон сохранения полной механической энергии частицы

Полная механическая энергия частицы

- Пусть частица движется в консервативном силовом поле со скоростью v, а потенциальная энергия частицы задана функцией $\Pi(x,y,z)$.

- **Полная механическая энергия** E частицы – это сумма ее кинетической К и потенциальной П энергий:

$$E = \mathrm{K} + \Pi = \frac{mv^2}{2} + \Pi$$

Закон сохранения полной механической энергии частицы

- **Закон сохранения полной механической энергии частицы.** *Если на частицу действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия сохраняется:*

$$E = \mathrm{K} + \Pi = \mathrm{const}$$

или

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Доказательство закона сохранения полной механической энергии частицы

- Пусть частица переместилась из произвольного положения *1* в произвольное положение *2*. Тогда, согласно теореме о кинетической энергии,

$$A_{12} = \Delta\text{K} = \text{K}_2 - \text{K}_1$$

- где $\text{K}_{1,2}$ – кинетические энергии частицы в начальном и конечном положениях соответственно.
- Поскольку в процессе движения на частицу действуют только консервативные силы, то

$$A_{12} = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

Доказательство закона сохранения полной механической энергии частицы

- Таким образом,

$$\mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Pi_1 - \Pi_2 \Leftrightarrow \mathrm{K}_1 + \Pi_1 = \mathrm{K}_2 + \Pi_2 \Leftrightarrow E_1 = E_2$$

- Поскольку начальное и конечное положения были выбраны произвольно, то, можно утверждать, что полная механическая энергия частицы в процессе движения сохраняется, что и требовалось доказать.

Сторонние силы

- Пусть теперь на частицу при ее движении, помимо консервативных сил, действуют любые другие силы – **сторонние силы** (силы трения и сопротивления или силы иной физической природы)

- **Диссипативные силы** – силы, действие которых приводит к уменьшению полной механической энергии частицы. К ним относят силы трения и силы сопротивления. Работа этих сил отрицательна.

Закон изменения полной механической энергии частицы

- **Закон изменения полной механической энергии частицы.** *Если на частицу помимо консервативных сил, действуют сторонние силы, то работа сторонних сил $A_{12\text{стор}}$ при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна приращению (изменению) полной механической энергии частицы:*

$$A_{12\text{стор}} = \Delta E = E_2 - E_1 = (\mathrm{K}_2 + \Pi_2) - (\mathrm{K}_1 + \Pi_1) = \Delta\mathrm{K} + \Delta\Pi$$

- Здесь E_1 и E_2 – полная механическая энергия частицы в начальном и конечном положениях.

Доказательство закона об изменении полной механической энергии частицы

- Пусть частица переместилась из произвольного положения *1* в произвольное положение *2*. Тогда, согласно теореме о кинетической энергии,

$$A_{12} = \Delta \mathrm{K} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1$$

- Та же работа A_{12} складывается из работы $A_{12\text{конс}}$ консервативных сил поля и работы $A_{12\text{стор}}$ сторонних сил:

$$A_{12} = A_{12\text{конс}} + A_{12\text{стор}} = \Pi_1 - \Pi_2 + A_{12\text{стор}}$$

- Тогда

$$\mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Pi_1 - \Pi_2 + A_{12\text{стор}} \Leftrightarrow A_{12\text{стор}} = \Delta \mathrm{K} + \Delta \Pi = \Delta E$$