ГЛАВА 5 ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1 Момент инерции. Момент импульса частицы. Момент силы. Уравнение моментов.

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Момент инерции твердого тела

- **Моментом инерции** твердого тела относительно оси Z называется величина:

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

Здесь m_i – масса i-й частицы тела; R_i – расстояние от этой частицы до оси Z.

Поскольку любое реальное твердое тело плотности ρ и объемом V есть совокупность бесконечно большого числа частиц, то

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV$$

Физический смысл и свойства момента инерции

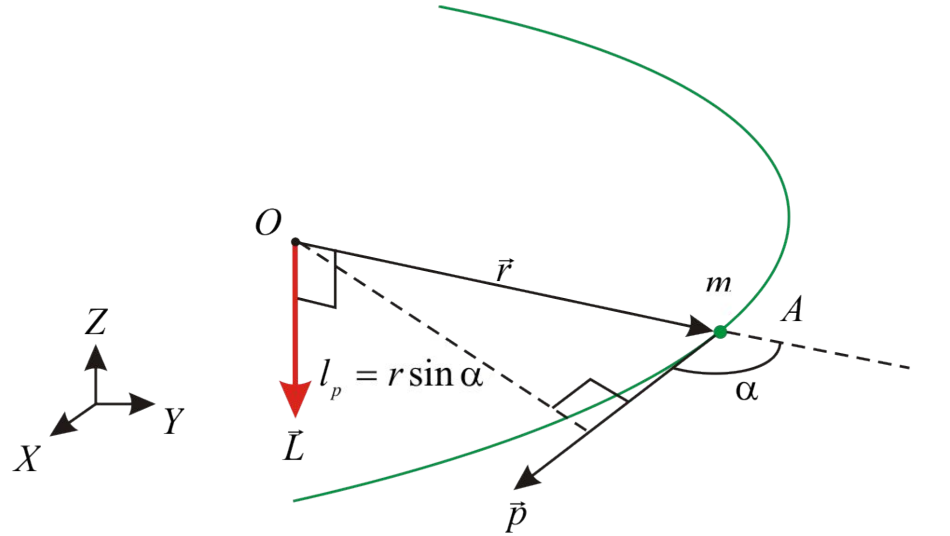
- Момент инерции I характеризует распределение массы тела по его объему.
- Эта величина представляет собой *количественную меру инертности твердого тела по отношению к любым попыткам изменить угловую скорость твердого тела*.
- Момент инерции – величина *аддитивная*: момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции его частей, рассчитанных относительно той же оси.

Моменты инерции некоторых симметричных твердых тел

Форма тела	Положение оси вращения	Момент инерции I
Материальная точка массой *m*	Проходит на расстоянии r от точки	mR^2
Однородный тонкий стержень длиной *l* и массой *m*	Проходит через середину стержня перпендикулярно его оси	$(1/12)ml^2$
	Проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси	$(1/3)ml^2$
Однородный диск (сплошной цилиндр) радиусом *R* и массой *m*	Проходит перпендикулярно плоскости диска (совпадает с осью цилиндра)	$(1/2)mR^2$
Однородный диск радиусом *R* и массой *m*	Проходит вдоль диаметра диска	$(1/4)mR^2$
Однородный тонкостенный полый цилиндр (труба, обруч) радиусом *R* и массой *m*	Совпадает с осью цилиндра (проходит перпендикулярно плоскости обруча)	mR^2
Однородный шар радиусом *R* и массой *m*	Проходит через центр шара	$(2/5)mR^2$
Тонкая прямоугольная пластина массой *m* со сторонами *a* и *b*	Проходит перпендикулярно пластине через точку пересечения диагоналей	$(1/12)m(a^2 + b^2)$

Момент импульса частицы относительно неподвижной точки

- Пусть частица *A* движется со скоростью **v**. Положение частицы в пространстве зададим радиусом-вектором **r**, проведенным из неподвижной точки *O*.
- **Моментом импульса частицы относительно неподвижной точки *O*** называется вектор **L**:



$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

(где **p** = *m***v** – импульс частицы).

$$L = rp\sin\alpha = l_p p$$

Угол α – угол между векторами **p** и **r**; l_p – кратчайшее расстояние от точки *O* до линии, вдоль которой направлен вектор **p** (**плечо импульса**).

Вектор **L** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **p** и **r**.

Момент импульса частицы относительно неподвижной оси

- **Моментом импульса** L_z **частицы относительно неподвижной оси** $\boldsymbol{Z}$ называется проекция на эту ось момента импульса **L** частицы, вычисленная относительно неподвижной точки оси Z.

- Момент импульса L_z относительно неподвижной оси является скалярной величиной
- Значение L_z не зависит от выбора точки O на оси Z.

Связь между угловой скоростью вращения твердого тела и моментом импульса

- Таким образом, с учетом определения момента инерции, проекция на ось Z момента импульса тела равна:

$$L_z = I\omega_z$$

- Проекция момента импульса тела L_z на ось Z не зависит от положения точки O на этой оси (поскольку I и ω_z также не зависят от положения точки O).

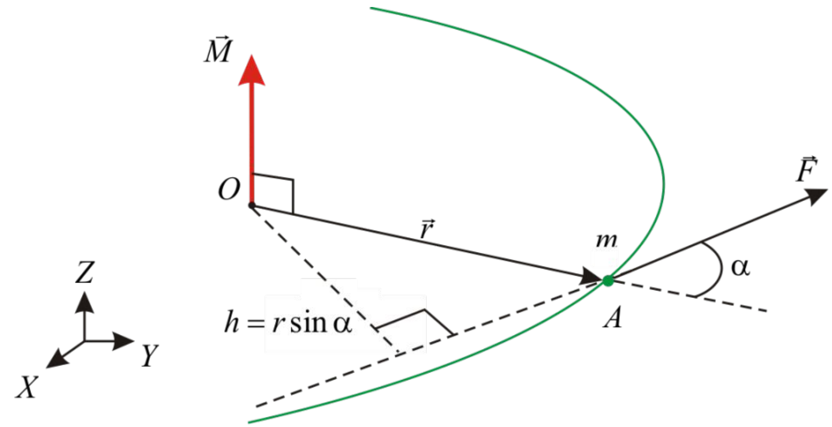
Момент силы

- Пусть к частице *A* приложена сила **F**.
- **Моментом силы F относительно неподвижной точки *O*** называется вектор, равный:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

$$M = rF\sin\alpha = Fh$$

- Здесь α – угол между векторами **r** и **F**, $h = r\sin\alpha$ - **плечо силы** – кратчайшее расстояния между линией действия силы **F** и точной *O*.



Вектор **M** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **F** и **r**.

Момент силы относительно неподвижной оси

- **Моментом силы** M_z **относительно неподвижной оси** Z называется проекция на эту ось вектора момента силы относительно произвольной точки O на оси Z.

- Величина M_z является скалярной и не зависит от выбора точки O на оси Z.

Уравнение моментов

- Найдем производную по времени момента импульса **L**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + [\vec{r} \times \vec{F}]$$

- Производная:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

- Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{v} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \vec{F}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p} \Rightarrow [\vec{v} \times \vec{p}] = 0 \\ [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M} \end{array} \right\} = \vec{M}$$

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

- Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью **ω** вокруг неподвижной оси *Z*. Обозначим через **L** момент импульса тела относительно произвольной точки *O* оси *Z*, а через **M** – сумму моментов всех приложенных к нему внешних сил.

- Для твердого тела как системы материальных точек справедливо уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

- Перепишем его в проекции на ось *Z*:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

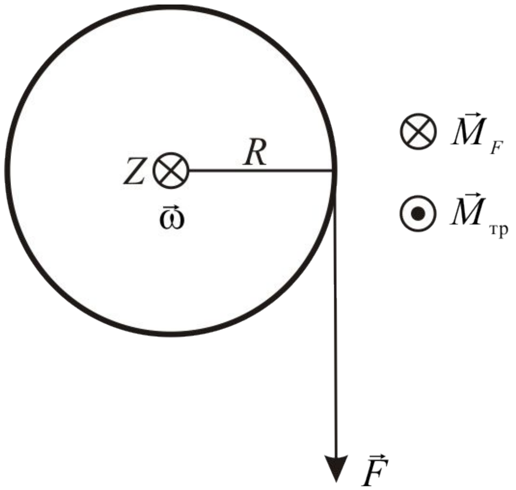
- Поскольку, как было показано выше, проекция на ось Z момента импульса тела равна $L_z = I\omega_z$, то подставляя это выражение в уравнение моментов, получим **уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси**:

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z \Leftrightarrow I\varepsilon_z = M_z$$

- Здесь I – момент инерции твердого тела относительно оси Z, $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$ – проекция на ось Z вектора углового ускорения тела, M_z – проекция на ось Z момента всех внешних сил.

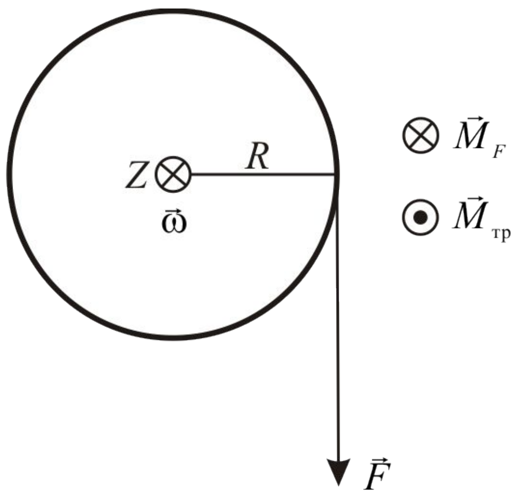
Пример использования уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

- *Пример.* Однородный цилиндр массы m и радиуса R может вращаться с трением вокруг неподвижной оси Z, совпадающей с его осью симметрии. На цилиндр намотана тонкая нерастяжимая невесомая нить, за которую начинают тянуть с постоянной силой **F**. Найти угловые скорость и ускорение цилиндра, если во время вращения на цилиндр действует постоянный момент силы трения $M_{тр}$.



Пример использования уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

- Направим ось Z от нас в плоскость чертежа и запишем уравнение динамики вращения твердого тела:



$$I\varepsilon_z = M_z \Leftrightarrow \frac{1}{2}mR^2 \cdot \varepsilon_z = RF - M_{\text{тр}}$$

- Тогда угловое ускорение цилиндра:

$$\varepsilon_z = \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{mR^2}$$

- Угловая скорость цилиндра:

$$d\omega_z = \varepsilon_z dt \Rightarrow \omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt = \int_0^t \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{mR^2} dt = \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{mR^2} t$$

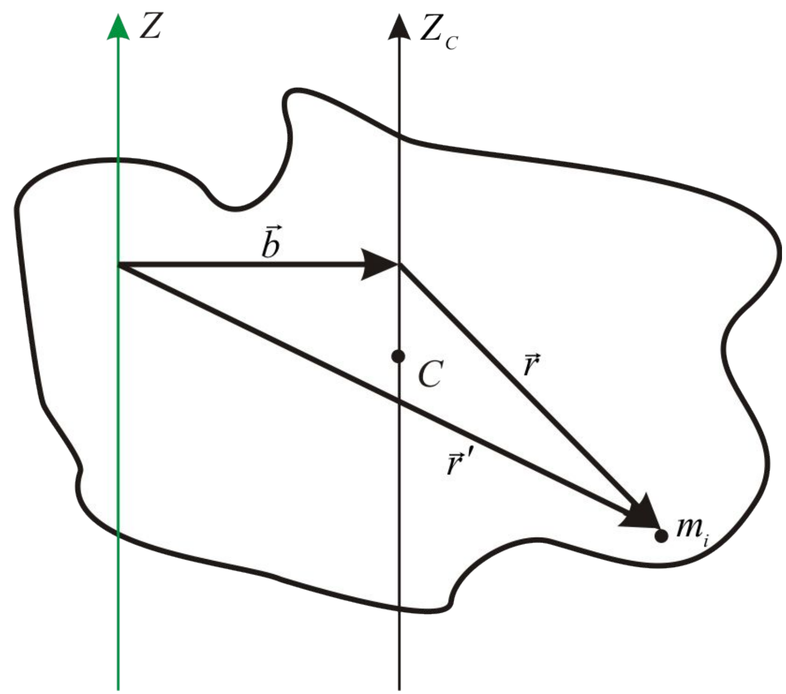
ГЛАВА 5 ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.2 Теорема Гюйгенса – Штейнера

Связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проводит через центр масс

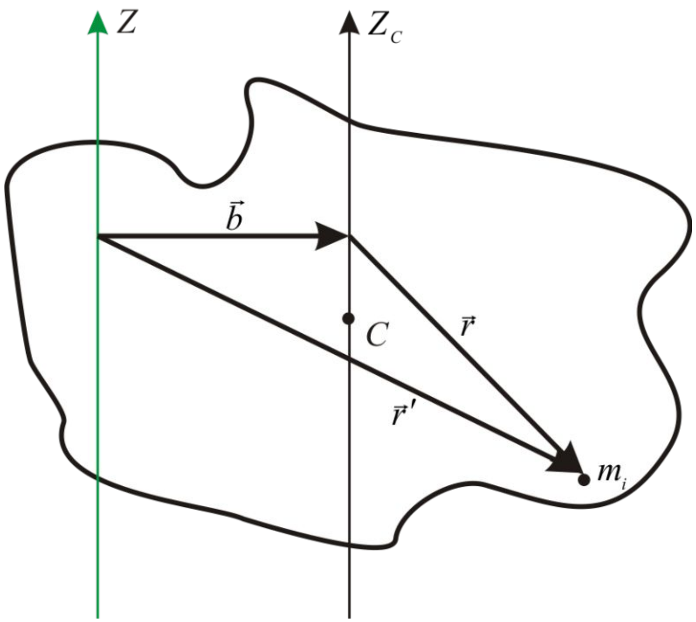
- Найдем связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

- Пусть ось Z_C проходит через центр масс тела, а ось Z параллельна ей и находится на расстоянии b; обозначим $\mathbf{b}$ – перпендикулярный к обеим осям вектор, проведенный от Z к Z_C.



Связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проводит через центр масс

- Мысленно разделим тело на частицы массами m_i; к каждой частице проведем радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_i'$, перпендикулярные осям Z_C и Z.
- Учтем в дальнейшем, что $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{b}$.
- Момент инерции относительно оси Z:



$$I = \sum_i m_i \vec{r}_i'^{\,2} = \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{b})^2 = \sum_i (m_i r_i^2 + 2 m_i \vec{r}_i \vec{b} + m_i b^2) =$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 + 2\vec{b} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i + b^2 \sum_i m_i = I_C + 2\vec{b} \cdot m\vec{r}_C + m b^2$$

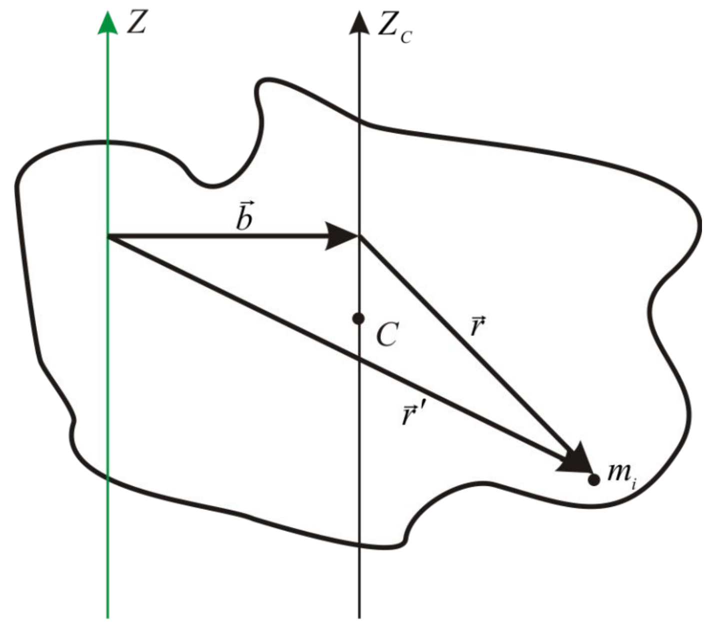
Связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проводит через центр масс

$$I = I_C + 2\vec{b} \cdot m\vec{r}_C + mb^2$$

- Поскольку центр масс C лежит на оси Z_C тела, то, очевидно, $\mathbf{r}_C = 0$. Тогда:

$$I = I_C + mb^2$$

- Это равенство выражает **теорема Гюйгенса – Штейнера** о параллельном переносе оси момента инерции: *момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями.*



Примеры использования теоремы Гюйгенса - Штейнера

- *Пример 1*. Зная момент инерции тонкого стержня массы m и длины l относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (центр масс) $I = (1/12)ml^2$, найдем момент инерции стержня относительно параллельной оси, проходящей через один из концов стержня:

$$I = I_C + mb^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Примеры использования теоремы Гюйгенса - Штейнера

- *Пример 2*. Зная момент инерции однородного шара массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр (центр масс) $I = (2/5)mR^2$, найдем момент инерции шара относительно оси, касательной к поверхности шара:

$$I = I_C + mb^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

ГЛАВА 5 ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.3 Кинетическая энергия и работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Кинетическая энергия твердого тела

- Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Разделим мысленно тело на частицы массами m_i.
- Траекторией каждой из частиц является окружность с центром на оси вращения, лежащая в перпендикулярной к оси вращения плоскости. Обозначим скорость каждой из частиц $v_i = \omega R_i$.
- Кинетическая энергия К твердого тела равна сумме кинетических энергий составляющих его частиц:

$$\mathrm{K} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела

- Таким образом, **кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси**, равна:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

- Здесь I – момент инерции тела относительно оси вращения.

Работа внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

- Пусть на вращающееся вокруг неподвижной оси Z твердое тело действует внешняя сила **F**, проекция на ось Z момента **M** которой равна M_z. Найдем выражение для работы A силы, снова рассматривая твердое тело как систему частиц.

- По теореме о кинетической энергии элементарная работа δA всех сил, действующих на частицы, равна бесконечно малому приращению кинетической энергии $d\mathrm{K}$ системы:

$$\delta A = d\mathrm{K}$$

- Примем без доказательства, что элементарная работа всех *внутренних* сил равна нулю.

Работа внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

- Тогда **теорема о кинетической энергии** применительно к твердому телу звучит так: *работа всех приложенных к твердому телу внешних сил равна приращению его кинетической энергии*:

$$\delta A_{\text{внеш}} = d\mathrm{K}$$

$$d\mathrm{K} = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = I\omega_z d\omega_z$$

- Согласно уравнению вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_{z,\text{внеш}} \Leftrightarrow Id\omega_z = M_{z,\text{внеш}}dt$$

Работа внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

- Тогда элементарное приращение кинетической энергии твердого тела:

$$d\mathrm{K} = I\omega_z d\omega_z = M_{z,\text{внеш}}\omega_z dt = M_{z,\text{внеш}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = M_{z,\text{внеш}} d\varphi$$

- Здесь ϕ – угловая координата, *d*ϕ – угол, на который поворачивается тело за бесконечно малый промежуток времени *dt*.
- Таким образом,

$$\delta A_{\text{внеш}} = M_{z,\text{внеш}} d\varphi \qquad A_{\text{внеш}} = \int_0^{\varphi} M_{z,\text{внеш}} d\varphi$$

ГЛАВА 5
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.4 Закон сохранения момента импульса системы частиц

Закон сохранения момента импульса системы частиц

- Из уравнения моментов вытекает **закон сохранения импульса системы частиц:** *момент импульса* **L** *замкнутой системы частиц с течением времени не изменяется (т.е. сохраняется)*.

- Действительно, если система замкнута, т.е. внешние силы отсутствуют, то:

$$\vec{M}_{\text{внеш}\,i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\text{внеш}} = M_{\text{внеш}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

- Однако, в некоторых случаях момент импульса незамкнутой системы частиц может сохраняться. Рассмотрим эти случаи.

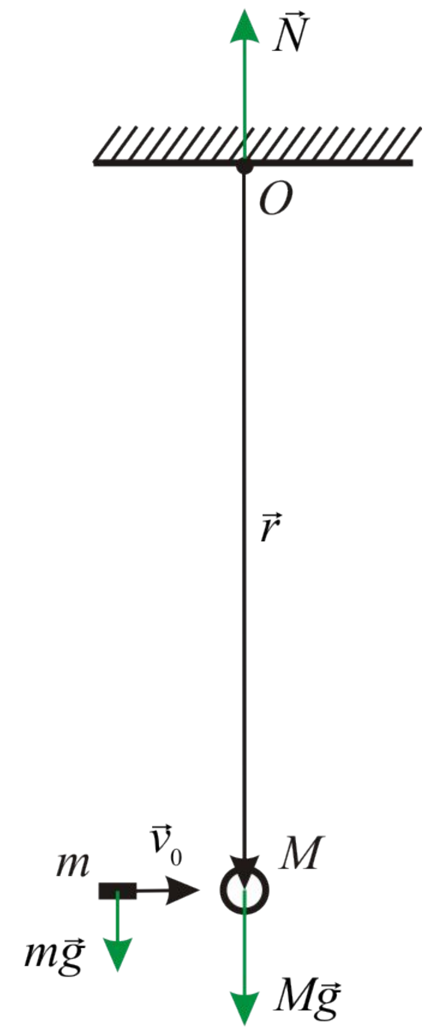
Частные случаи закона сохранения момента импульса незамкнутой системы частиц

- 1. *Если система не замкнута, но моменты внешних сил, вообще говоря, отличны от нуля, но при этом сумма моментов внешних сила равна нулю, то момент импульса системы сохраняется:*

$$\vec{M}_{\text{внеш}\,i} \neq 0, \ \text{но} \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\text{внеш}} = M_{\text{внеш}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Частные случаи закона сохранения момента импульса незамкнутой системы частиц

- Пример. Летевшая горизонтально пуля со скоростью $\mathbf{v}_0$ массой m застревает в небольшом деревянном шаре массой M, подвешенном на вертикальном стержне, который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O.



- На пулю и шар действуют внешние силы $m\mathbf{g}$, $M\mathbf{g}$ и N (сила N в момент удара пули может быть очень большой). Однако, если за время удара стержень не успевает значительно отклониться, то моменты всех внешних сил относительно точки O равны нулю (линии действия этих сил проходят через точку O), то момент импульса системы сохраняется:

$$[\vec{r} \times m\vec{v}_0] = [\vec{r} \times (M + m)\vec{v}]$$

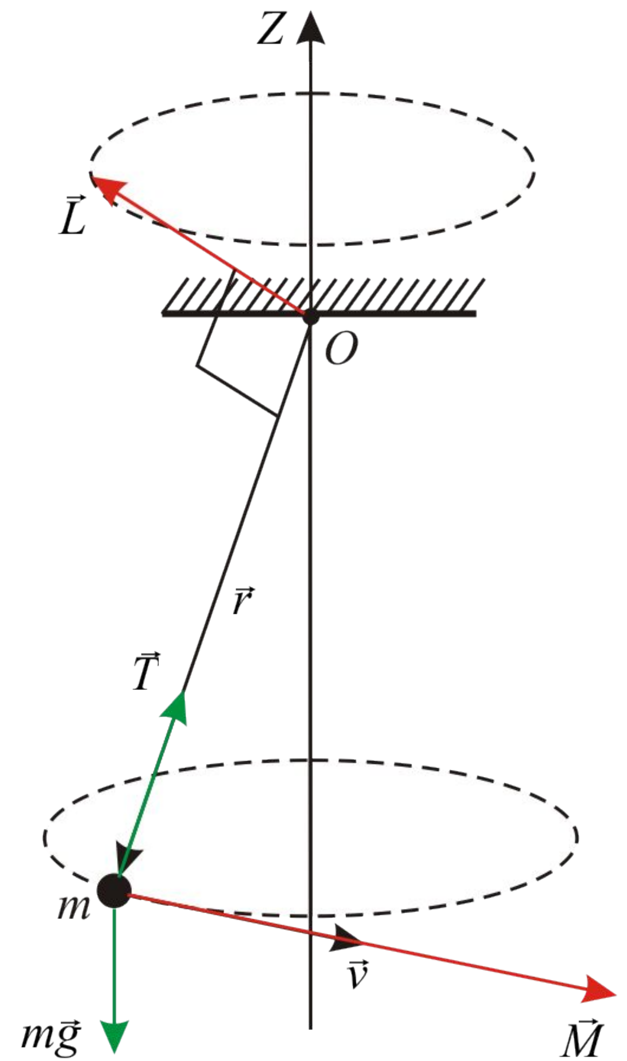
Частные случаи закона сохранения момента импульса незамкнутой системы частиц

- 2. *Если проекция на некоторую неподвижную ось Z момента всех внешних сил равна нулю, то в проекции на ось Z момент импульса L_z сохраняется:*

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\text{внеш}} = M_{\text{внеш}} \neq 0, \text{ но } M_z = 0 \Leftrightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}$$

Частные случаи закона сохранения момента импульса незамкнутой системы частиц

- Пример. Подвешенный на нити шарик вращается с постоянной скоростью в горизонтальной плоскости по окружности. В этом случае проекция на проходящую через точку подвеса *O* вертикальную ось *Z* момента импульса шарика сохраняется в процессе движения.
- Действительно, на шарик действуют: сила натяжения нити **T** (не создающая момента, т.к. линия ее действия проходит через точку *O*); сила тяжести, момент которой $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times m\mathbf{g}]$ в проекции на ось *Z* равен нулю (см. рисунок). Поэтому $L_z = \text{const}$.
- Вектор **L** имеет постоянную длину и вращается в пространстве вместе с шариком, описывая поверхность кругового конуса, в то время как его проекция на ось *Z* остается постоянной.



Частные случаи закона сохранения момента импульса незамкнутой системы частиц

- 3. *Момент импульса системы приблизительно сохраняется, если момент* $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$ *ограниченной по модулю внешней силы действует в течение короткого промежутка времени* Δt (т.е. $\Delta t \approx 0$):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M}_{\text{внеш}} dt;$$

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^{\Delta t} \vec{M}_{\text{внеш}} dt = \left\langle \vec{M}_{\text{внеш}} \right\rangle \Delta t \approx 0 \Rightarrow \vec{L} \approx \text{const}$$