Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева»

Г. А. Липина, Г. А. Казунина

Специальные главы математики:

материалы к лекционному курсу
для студентов направления подготовки
140400.62 «Электроэнергетика и электротехника»,
профиль 140404 «Электроснабжение»

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления
140400.62 «Электроэнергетика и электротехника»
в качестве учебного пособия

Кемерово 2013

Жирнова Т.С. – доцент кафедры математики
Ефременко В.М. – заведующий кафедрой электроснабжения

Липина Галина Александровна, Казунина Галина Алексеевна

Специальные главы математики : материалы к лекционному курсу для студентов направления подготовки 140400.62 «Электроэнергетика и электротехника», профиль 140404 «Электроснабжение» очной формы обучения [электронный ресурс] / Г.А. Липина, Г.А. Казунина - электрон. дан.- Кемерово: КузГТУ, 2013. - Систем требования: Pentium IV; 0348 Мб; Windows 97-2003; Microsoft Office Power Point 97- 2003 (CD-ROM дисковод); мышь. Загл.с экрана.

Последовательно, компактно и доступно в форме презентации Microsoft Office Power Point изложен теоретический материал курса «Специальные главы математики» (3 семестр) согласно государственному образовательному стандарту (ФГОС третьего поколения) и рабочей программе по дисциплине «Специальные главы математики» для направления подготовки 140400.62 «Электроэнергетика и электротехника», профиль 140404 «Электроснабжение». Теоретические положения сопровождаются подробно разобранными задачами и служат основой лекционного курса.

Множества и отображения

Лекция 1

Понятие множества

- ***Множество*** – одно из основных понятий математики, является первичным и не имеет строгого определения.
- Под множеством понимают объединение объектов, хорошо различаемых нашей мыслью или интуицией.

Способы задания множеств

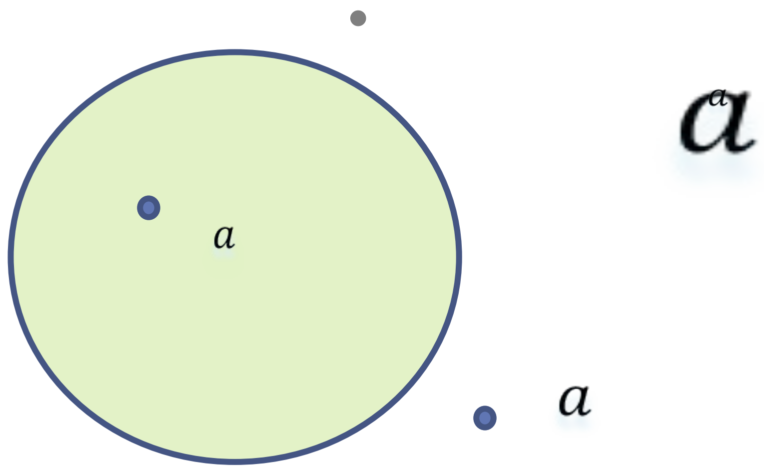
- Множество считается заданным, если перечислены все его элементы или указано свойство, которым обладают элементы, принадлежащие данному множеству.

Пустое множество

- Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим признаком, то оно называется **пустым.**
- Пустое множество обозначается $\varnothing$.

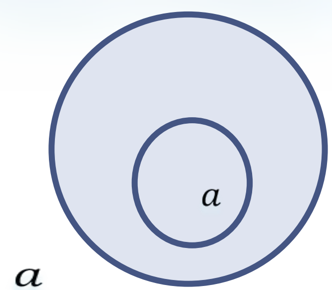
Изображение множеств

- Множества изображают с помощью ***кругов Эйлера*** (диаграмм Венна).



Подмножество

a



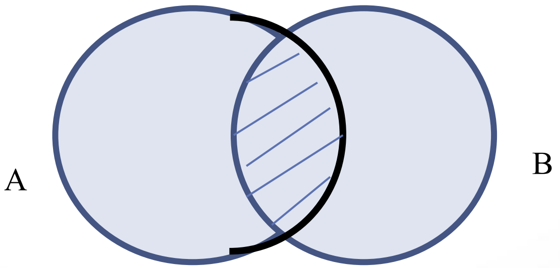
Универсальное множество

$$a$$

Операции над множествами

- К основным операциям над множествами относятся:
  - 1. ***Пересечение*** множеств;
  - 2. ***Объединение*** множеств;
  - 3. ***Разность*** множеств;
  - 4. **Дополнение** к множеству;
  - 5. ***Симметрическая разность.***

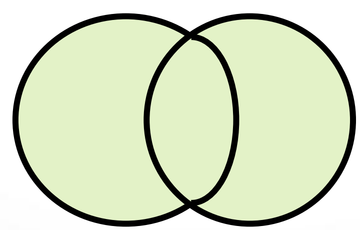
Пересечение множеств



Объединение множеств

-

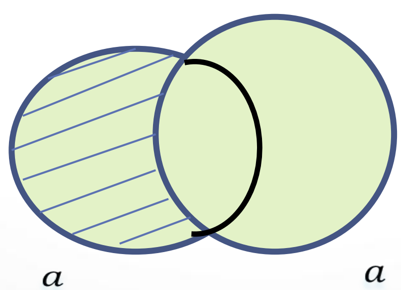
a



a В

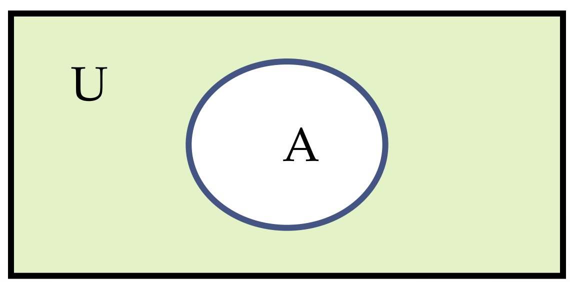
Разность множеств

- a



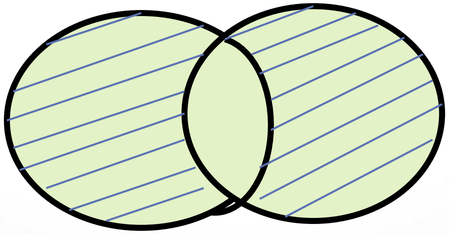
Дополнение к множеству

α



Симметрическая разность

$$\alpha$$



Кортежи и декартово произведение множеств, бинарные отношения,

отображения множеств, функции.

Лекция 2

Кортежи

$$\alpha$$

Равенство кортежей

- Два кортежа **_равны_**, если:
  1. Они имеют одинаковую длину;
  2. Их координаты, стоящие на местах с одинаковыми номерами, равны.

Декартовое произведение множеств

- a

Бинарные отношения

$$\alpha$$

Специальные бинарные отношения

- 1. Рефлексивное отношение;
- 2. Симметричное отношение;
- 3. Транзитивное отношение.

Рефлексивное бинарное отношение

- $$\alpha$$

Симметричное бинарное отношение

$$\alpha$$

Транзитивное бинарное отношение

- $$\alpha$$

Отображение множеств

$$\alpha$$

Составные высказывания. Простейшие связки, другие связки.

Лекция 3

Высказывания

-

$$a$$

составные высказывания

- Составное логическое высказывание – образовано из других высказываний с помощью логических связок.
- Элементарное логическое высказывание – высказывание, не относящееся к составному.

Логические связки

- ***<u>Логическая связка</u>*** – любая логическая операция над высказыванием.

Например, употребляемые в обычной речи слова и словосочетания «не», «и», «или», « если…,то…», «тогда и только тогда, когда» являются логическими связками.

Простейшие логические операции

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	—
Конъюнкция	и	◎
Дизъюнкция	или	◎
Импликация	если…, то	→
Эквивалентность	Тогда и только тогда, когда	↔

Отрицание

X	$\bar{X}$
0	1
1	0

Конъюнкция

X	*Y*	*X* ∧ *Y*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

X	*Y*	*X* ∨ *Y*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация

X	***Y***	$X \rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 1. Отрицание;
- 2. Конъюнкция;
- 3. Дизъюнкция;
- 4. Импликация;
- 5. Эквивалентность.
- Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

ДРУГИЕ СВЯЗКИ

НАЗВАНИЕ	ПРОЧТЕНИЕ	ОБОЗНАЧЕНИЕ
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	Антиэквивалентность	$\oplus$

Штрих Шеффера

X	Y	$X \mid Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса

X	Y	$X \downarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

СУММА ПО МОДУЛЮ ДВА

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логические отношения

Лекция 4

α

- α

Таблица истинности для конверсии импликации

X	Y	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Таблица истинности для контрапозиции

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Импликация $X \to Y$	Контрапозиция $\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

конверсии контрапозиции

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $\overline{X} \to \overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Основные законы, определяющие свойства логических операций

- a

Основные законы, определяющие свойства логических операций.

-

$$a$$

Основные законы, определяющие свойства логических операций

Основные законы, определяющие свойства логических операций

Основные законы, определяющие свойства логических операций

-

$$a$$

Булевы функции. Свойства элементарных булевых функций

Лекция 5

Булевы функции

$$\alpha$$

Равенство булевых функций

- α

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

$$\alpha$$

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Булевы функции одной переменной

$$a$$

Булевы функции двух переменных

$$a$$

Булевы функции двух переменных

- $$a$$

Булевы функции двух переменных

a

Свойства элементарных булевых функций

- 1. Функции: конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю два, стрелка Пирса, штрих Шеффера коммутативны.
- 2. Функции: конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю два ассоциативны и дистрибутивны.

Свойства элементарных булевых функций

- α

a

Свойства элементарных булевых функций

$$\alpha$$

Свойства элементарных булевых функций

- α

Свойства элементарных булевых функций

$$\alpha$$

Конъюктивная нормальная форма

$$\alpha$$

Дизъюнктивная нормальная форма

Алгоритм построения КНФ и ДНФ

- $$\alpha$$

Алгоритм построения КНФ И ДНФ

- 3) ***Избавиться*** от знаков **двойного отрицания.**
- 4**)** ***Применить*** к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и **формулы поглощения**.

Совершенная конъюктивная нормальная форма

- ***Совершенной конъюктивной нормальной формой*** (СКНф) называется такая её КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам:
- 1) КНФ не содержит двух одинаковых дизъюнкций.
- 2) Ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно двух одинаковых переменных.
- 3) Ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно некоторую переменную и её отрицание.

Совершенная конъюктивная нормальная форма

- $$\alpha$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

- **Совершенной дизъюнктивной нормальной** формой (СДНФ) называется её ДНФ, обладающая свойствами:
- 1) ДНФ не содержит двух одинаковых конъюнкций.
- 2) Ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

-

$$\alpha$$

Основные понятия теории графов. Степень вершины, маршруты, цепи, циклы.

Лекция 6

ПОНЯТИЕ ГРАФА

- Графом называют совокупность объектов со связями между ними или граф $G = (V, X)$ непустое конечное множество вершин (узлов) и множество ребер (дуг) V , оба конца которых принадлежат множеству X

- Объекты V – множество вершин

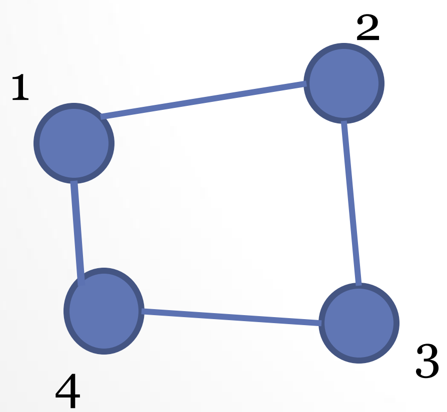
- Связи X – множество ребер

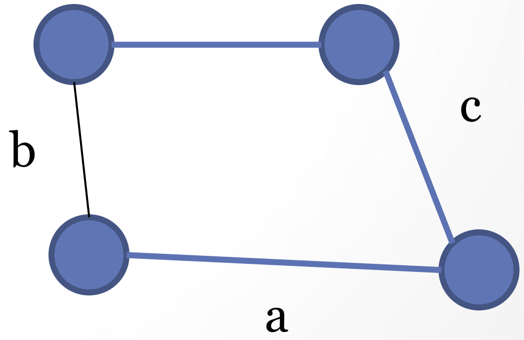
СМЕЖНЫЕ

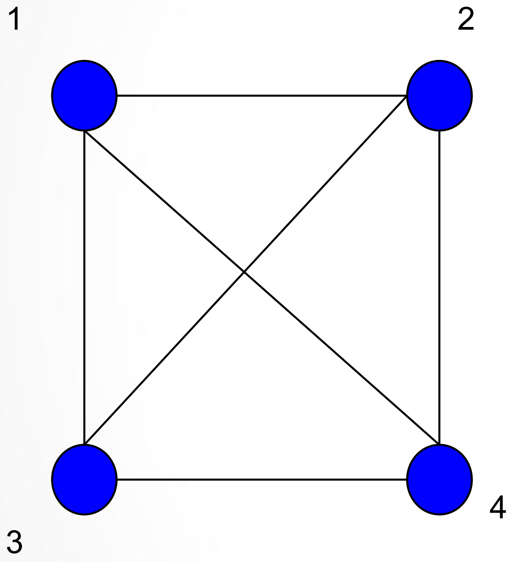
Вершины соединены ребром	Ребра имеют общую вершину

- Вершины 1 и 2 – смежные
- Вершины 1 и 3 не являются смежными

- Ребра a и b – смежные
- Ребра b и c не являются смежными







- ***Инцидентность* вершины и ребра – вершина является началом или концом ребра**

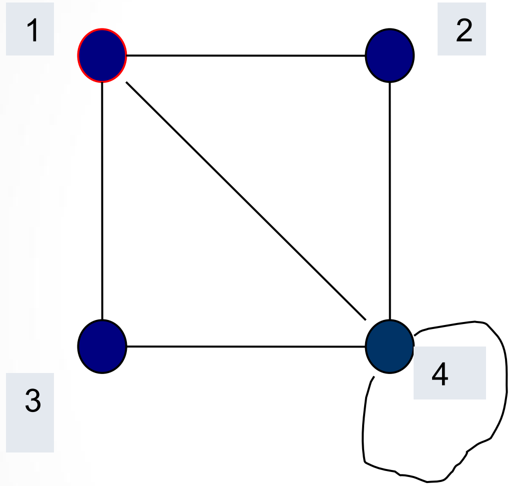
Если ребро графа соединяет две вершины, то это ребро им *инцидентно*.

-

Вершина 1 и ребро (1, 2) – инцидентны.

Вершина 4 и дуга (1,2) не являются инцидентными.

Ребро (1,3) инцидентно вершинам 1 и 3.



Дуга (ребро)-

***петля*, если вход и**

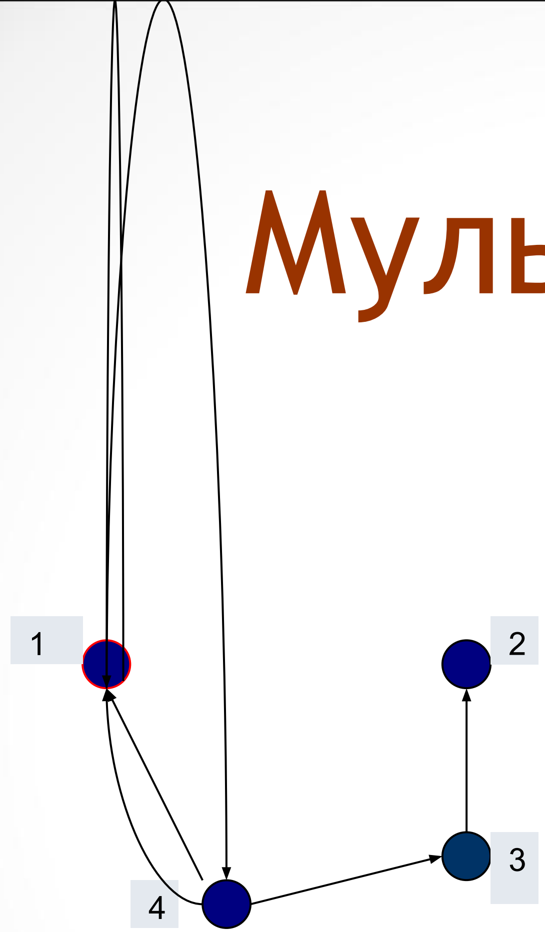
выход дуги

относятся к одной

вершине (начало и

конец совпадают).

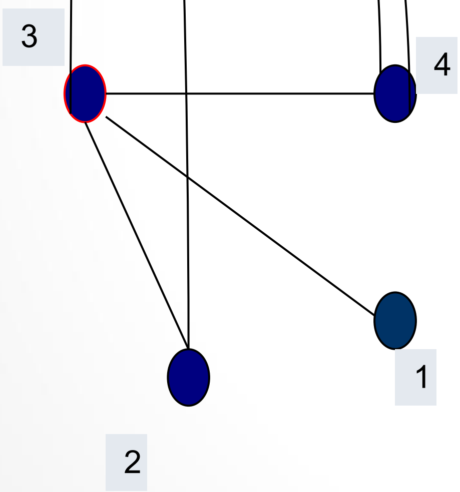
Мультиграф



- - это граф, в котором пара вершин соединяется несколькими ребрами

Степень вершины - $\deg(V)$

- Это число ребер, инцидентных вершине.
- Если вершине инцидентна петля, то она дает вклад в степень, равный 2 (два конца входят в одну вершину)



$$\deg(V_1) = 1$$

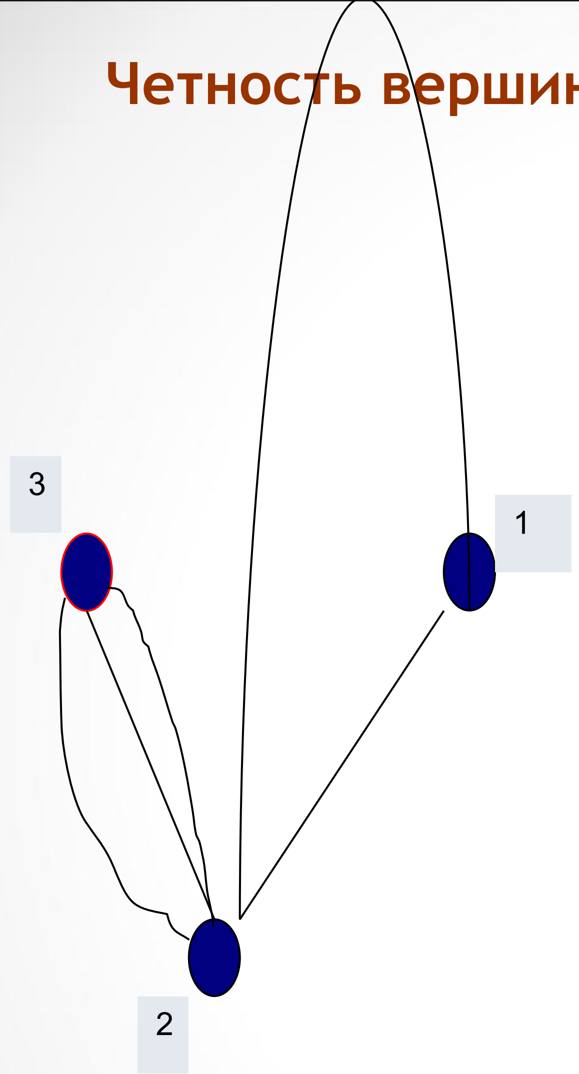
$$\deg(V_2) = 2$$

$$\deg(V_3) = 4$$

$$\deg(V_1) = 1$$

$$\deg(V_4) = 3$$

Четность вершин: число нечетных вершин любого графа четно



Вершина – четная (нечетная), если ее степень четное (нечетное) число:

Вершина 1 -четная

Вершина 2 -нечетная

$$\deg(V_1) = 2$$

Вершина 3 нечетная

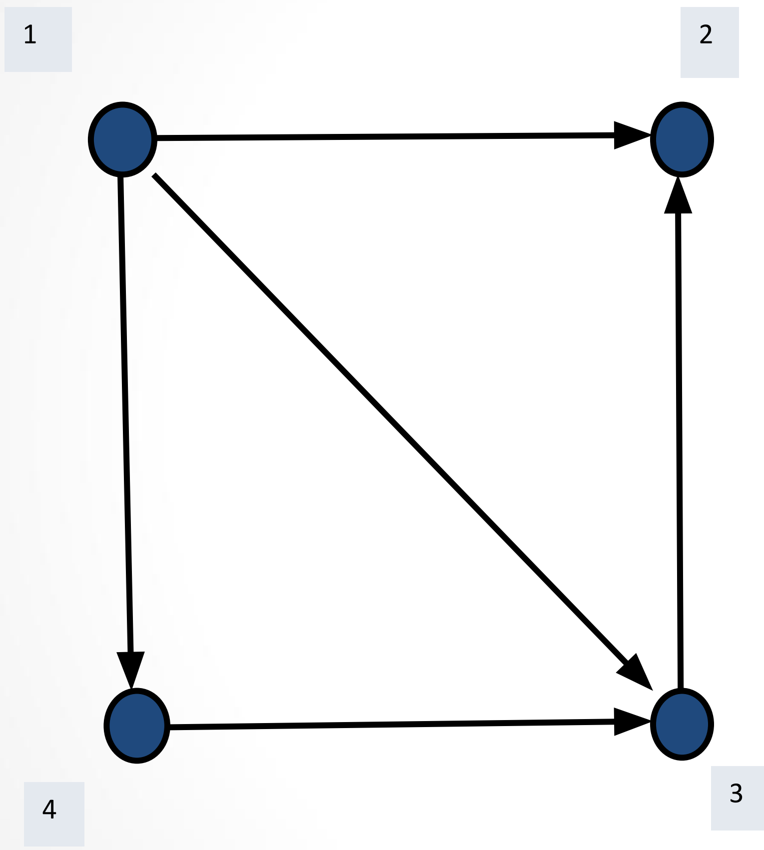
$$\deg(V_2) = 5$$

$$\deg(V_3) = 3$$

Сумма степеней всех вершин графа -четное число, равное удвоенному числу ребер графа

- Число вершин графа $n = |V|$
- Число ребер графа $m = |X|$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$



***Степень выхода вершины* орграфа** $\deg_{-}(V)$ **- число выходящих из вершины ребер**

Степень выхода вершины 1 равна 3,

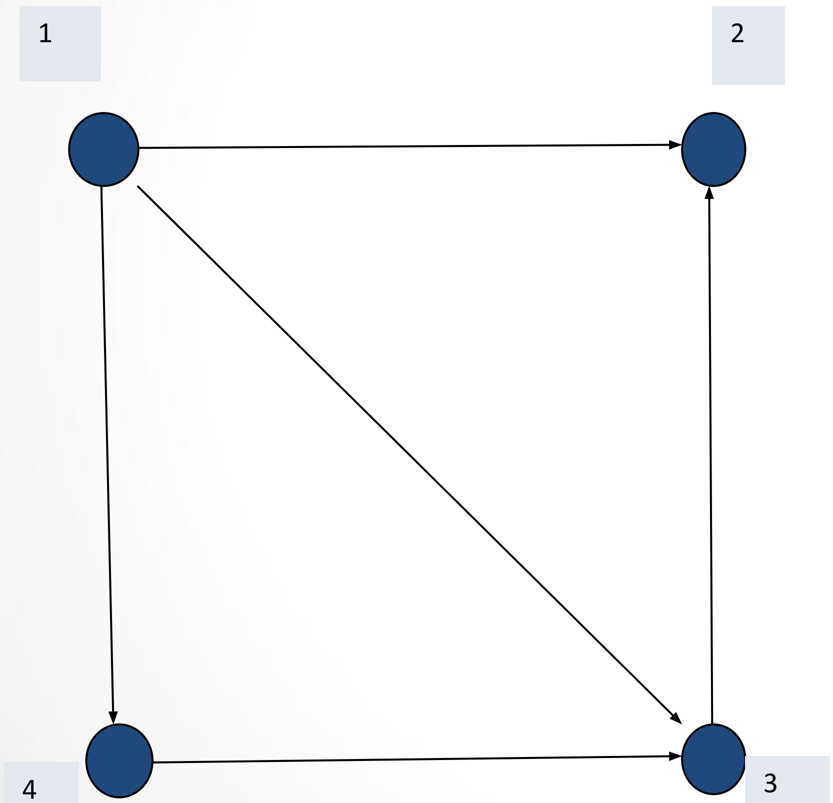
Степень выхода вершины 2 равна 0,

Степень выхода вершины 3 равна 1,

Степень выхода вершины 4 равна 1.

$\deg_{+}(V)$

Степень входа **вершины орграфа** $\deg_{+}(V)$ **- число входящих в вершину ребер**

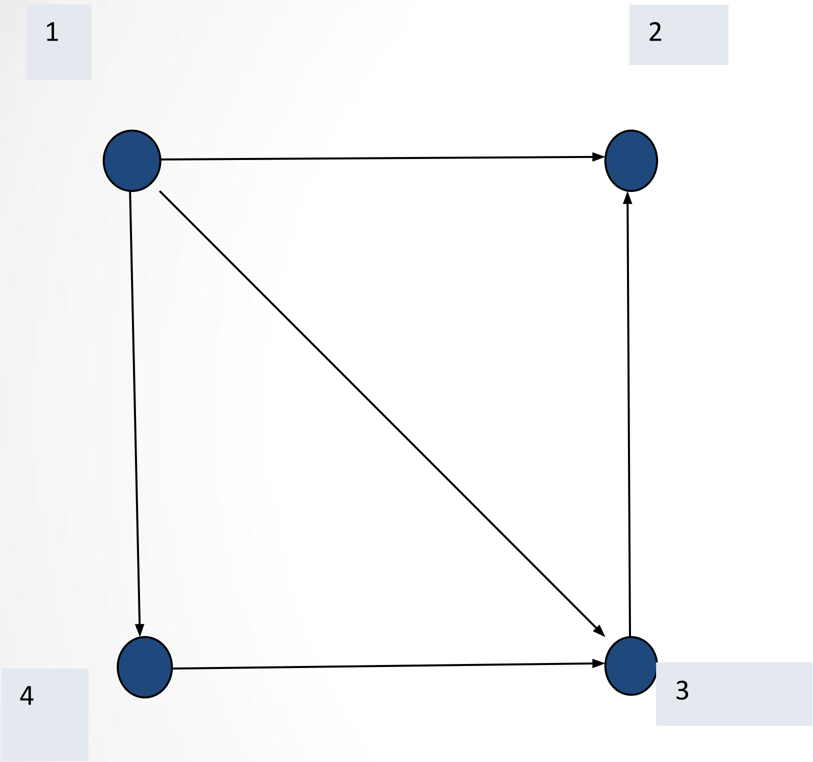


Степень входа вершины 1 равна 0,

Степень входа вершины 2 равна 2,

Степень входа вершины 3 равна 2,

Степень входа вершины 4 равна 1



Источник – вершина, степень выхода которой положительна, степень входа равна нулю.

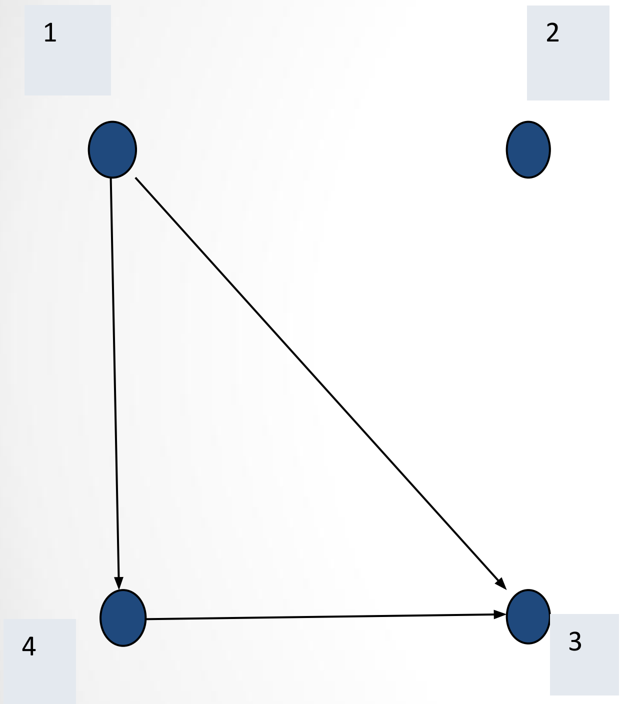
Вершина 1 - источник

Сток – вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю.

Вершина 2 - сток

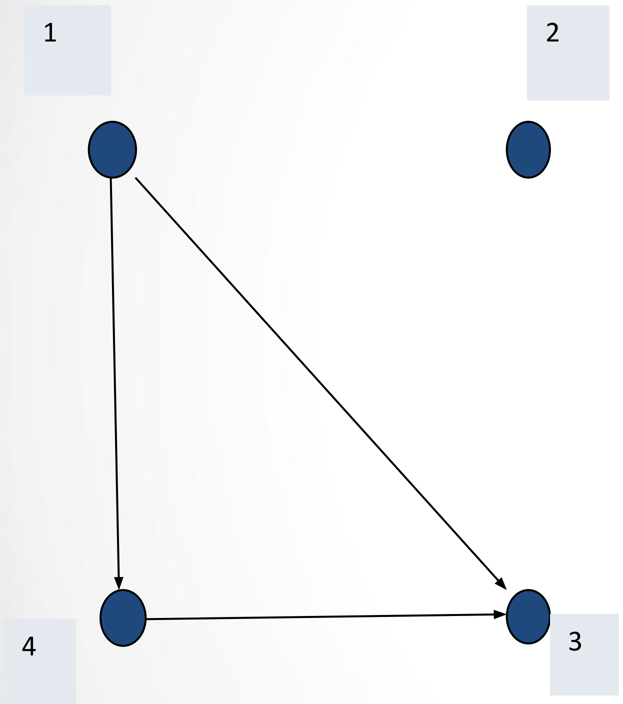
Изолированная

вершина



Изолированная вершина – это вершина, у которой степень входа и степень выхода равны нулю (нет ребер, инцидентных ей)

Вершина 2 - изолированная

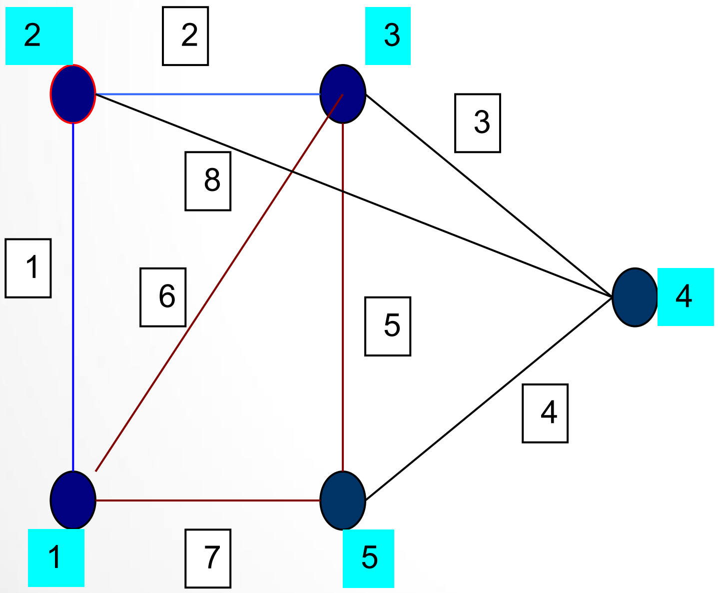


Изолированная вершина

Изолированная вершина – это вершина, у которой степень входа и степень выхода равны нулю (нет ребер, инцидентных ей)

Вершина 2 - изолированная

Маршрут М- последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны

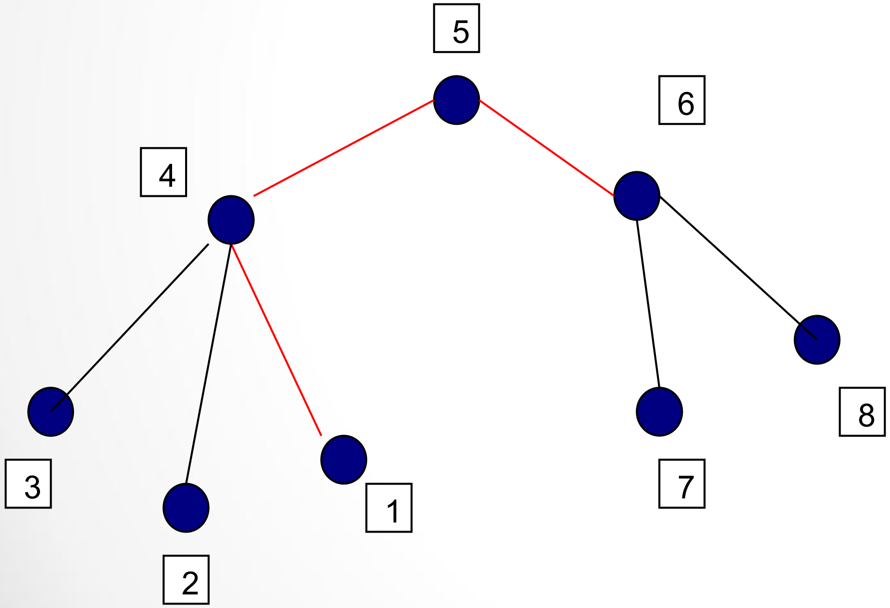


$$M_1 = V_1, x_1 V_2, x_2 V_3$$

$$M_2 = V_1, x_6, V_3, x_5, V_5, x_7, V_1$$

Длина маршрута- число ребер маршрута

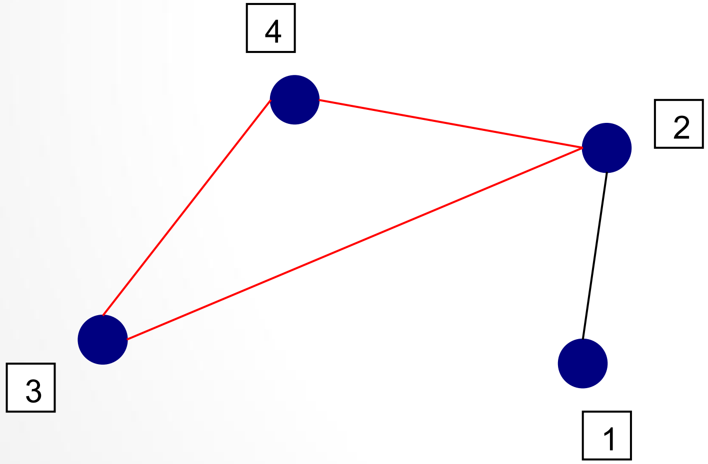
(с повторениями)



$$\left|V_1V_4V_5V_6V_5\right| = 4$$

$$\left|M\right| = 4$$

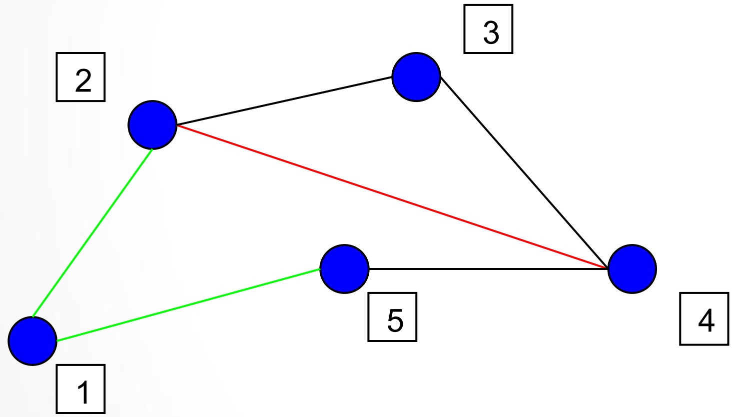
Замкнутый маршрут или цикл – начальная вершина совпадает с конечной



$$V_2\,V_3\,V_4\,V_2$$

$$\left|V_2V_3V_4V_2\right| = 3$$

Расстояние между двумя вершинами -это

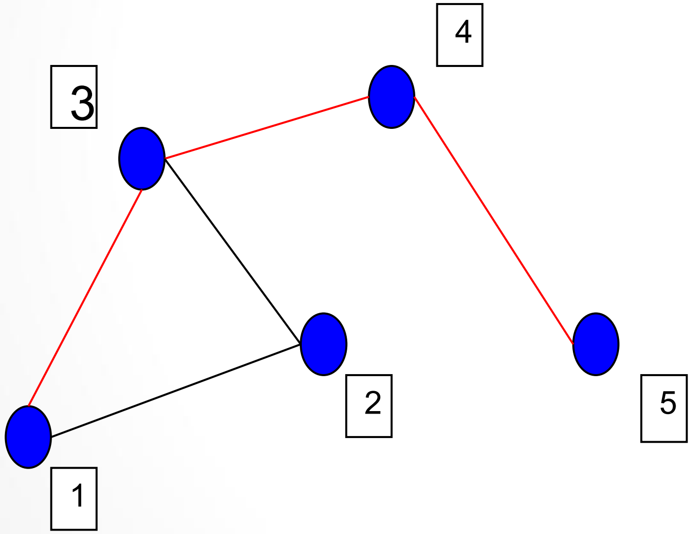


- *Минимальная длина* из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой маршрут. Обозначают:

$$d(V_2V_4) = 1$$

$$d(V_2V_5) = 2$$

Цепь – маршрут, в котором каждое ребро встречается только один раз



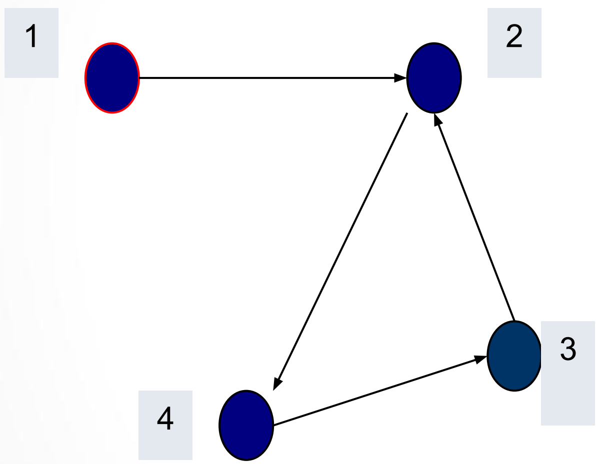
$$V_1V_3V_4V_5 - цепь$$

Ориентированные графы. Изоморфизм графов.

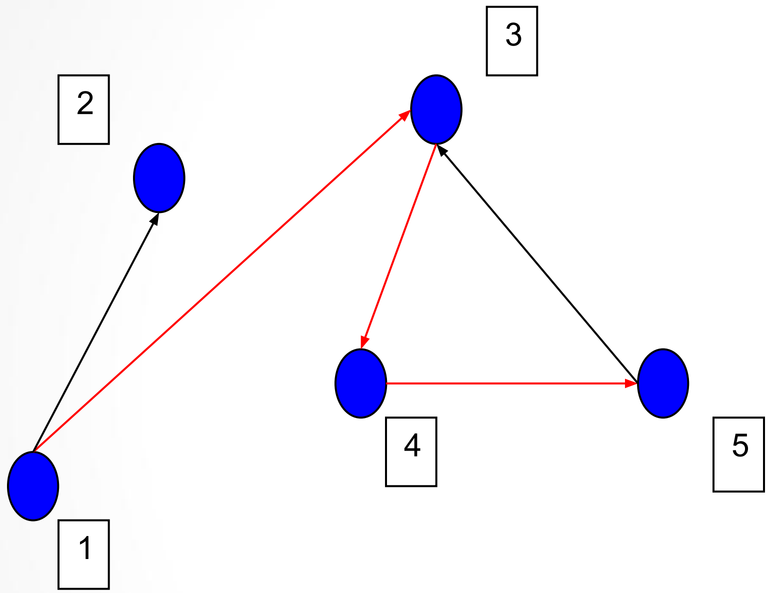
Операции над графами.

Лекция 7

Ориентированный граф (орграф)



- Ребро графа называется *ориентированным*, если одну вершину называют началом, а другую концом.
- На рисунке такое ребро обозначают стрелкой.
- Граф, у которого все ребра ориентированы называется ориентированным



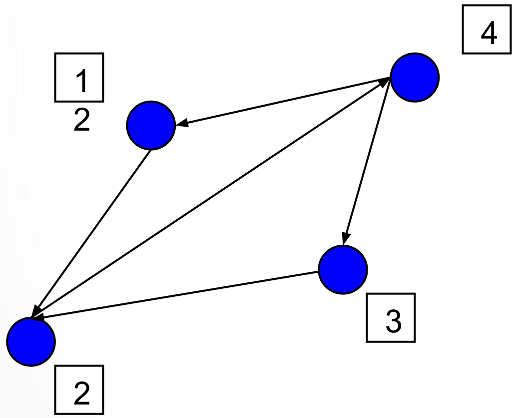
Маршрутом в орграфе называют - путь:

1. Направление каждого ребра совпадает с направлением пути
2. Ни одно ребро пути не повторяется дважды

$$V_1V_3V_4V_5 - путь$$

$$|V_1V_3V_4V_5| = 3$$

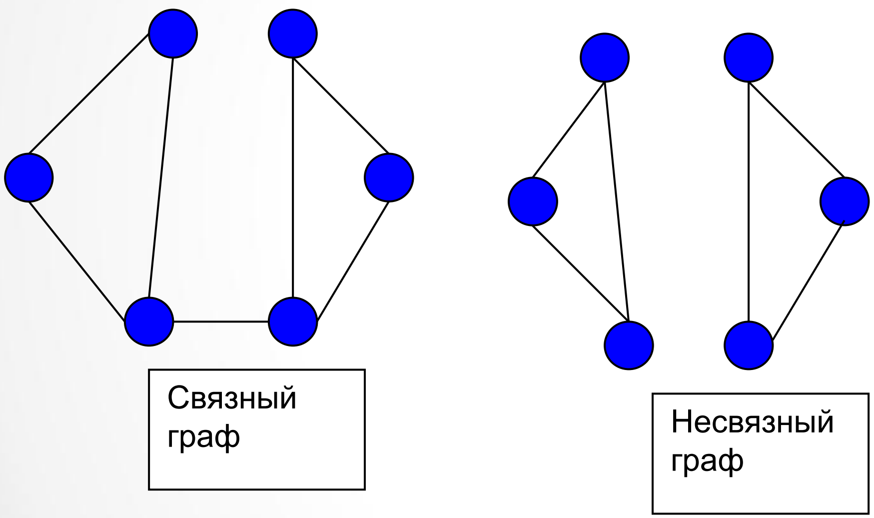
Цепь, путь, цикл – простые, если они проходят через любую из вершин не более одного раза



$V_1V_2V_4V_3V_2 - путь$

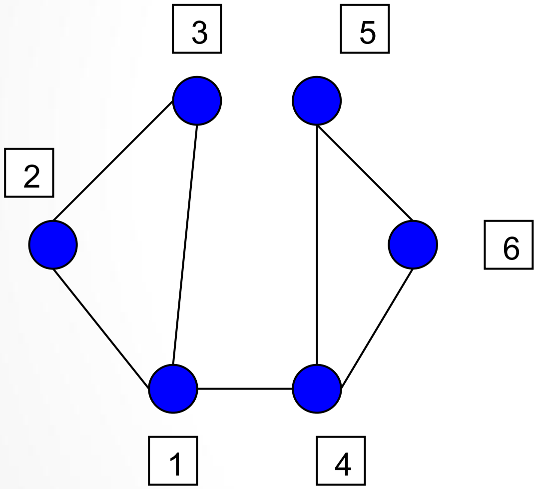
$V_1V_2V_4V_3 - простой\ путь$

Связность графа



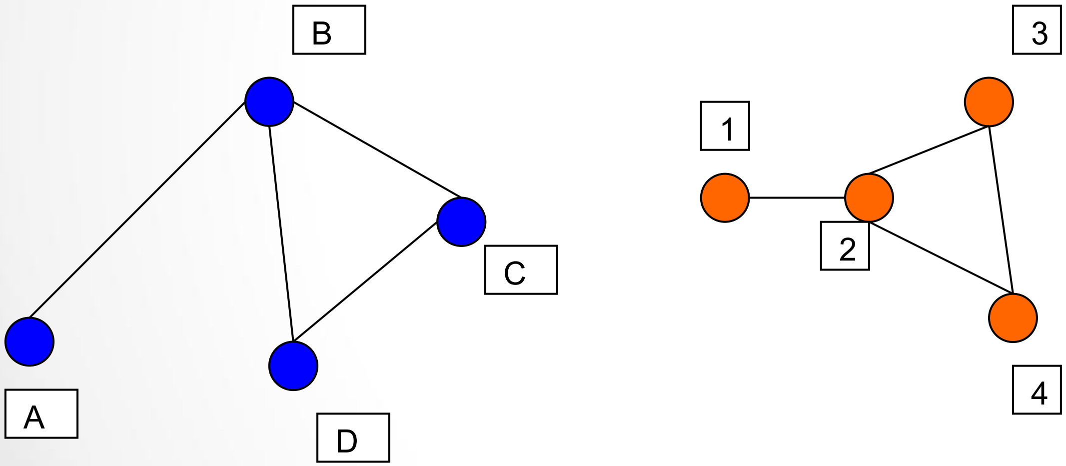
- Граф $G=(V,X)$ связный, если все его вершины связаны между собой (между двумя любыми его вершинами есть маршрут)

Мост- ребро в графе, если после его удаления граф становится несвязным



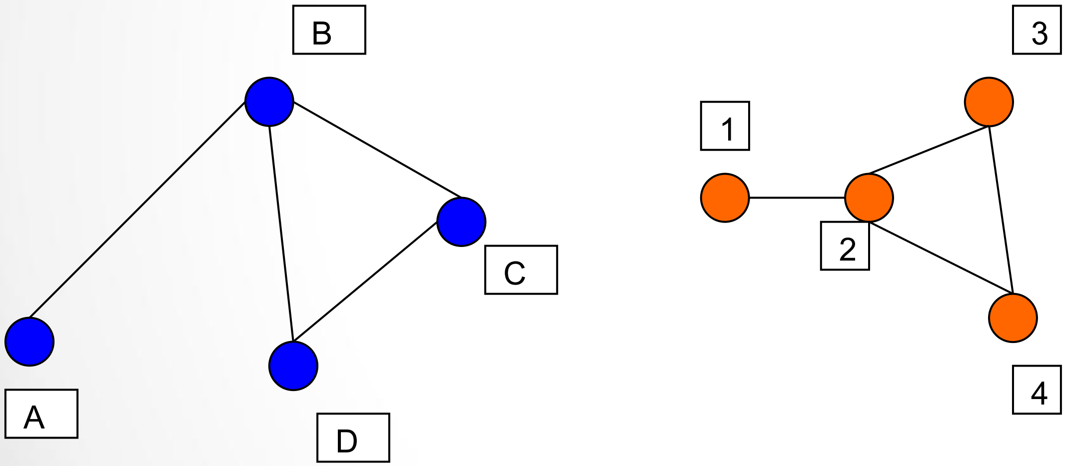
- Ребро (1, 4) - мост

Изоморфные графы



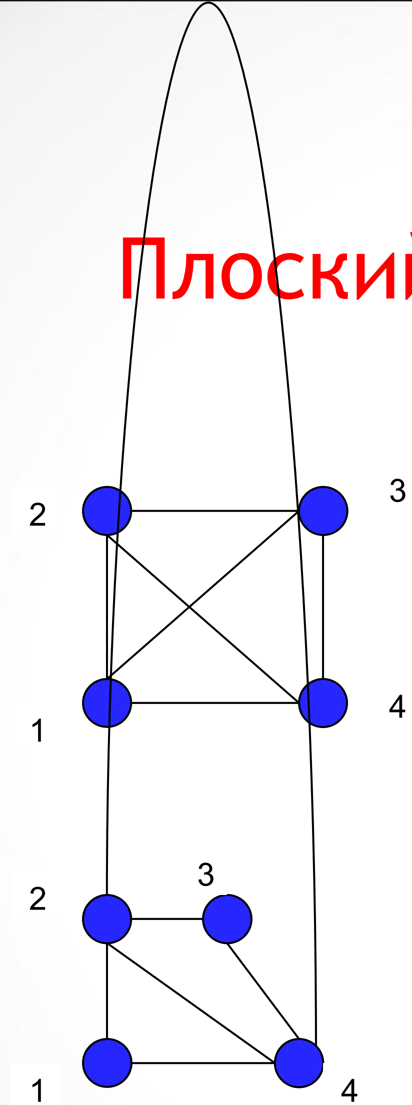
- Графы называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между ними, сохраняющее смежность вершин

Изоморфные графы



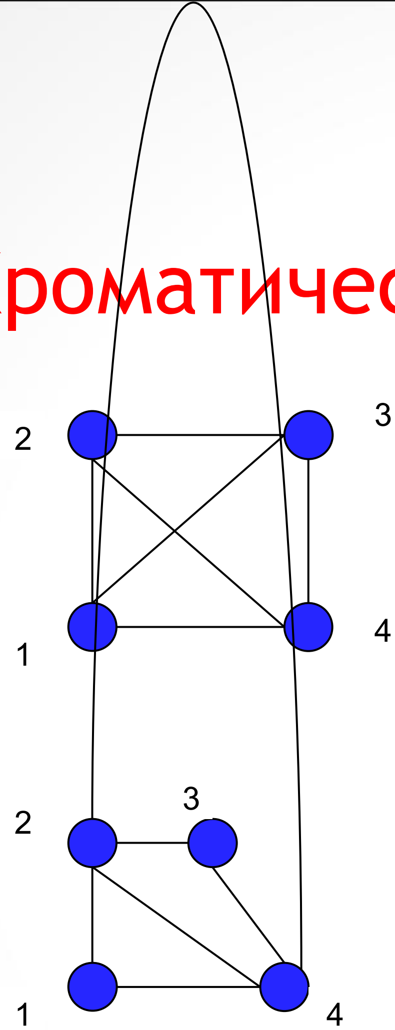
- Графы называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между ними, сохраняющее смежность вершин

Плоский (планарный)граф



- Граф называется **плоским**, если существует изоморфный ему граф, в изображении которого ребра пересекаются только в вершинах
- **Карта** графа – изображение графа на плоскости без пересечения ребер

Хроматическое число $\chi(G)$ - это



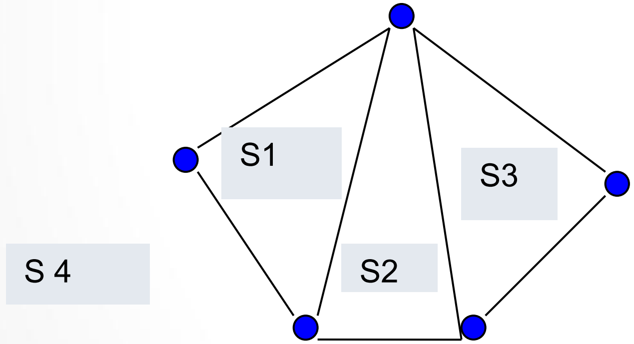
$$\chi(G) = 4$$

- Минимальное число цветов для раскрашивания карты графа таким образом, чтобы каждая область имела цвет, отличающийся от цвета, граничащей с ней области

$n - m + r = 2$

разбивает плоскость на r областей (включая

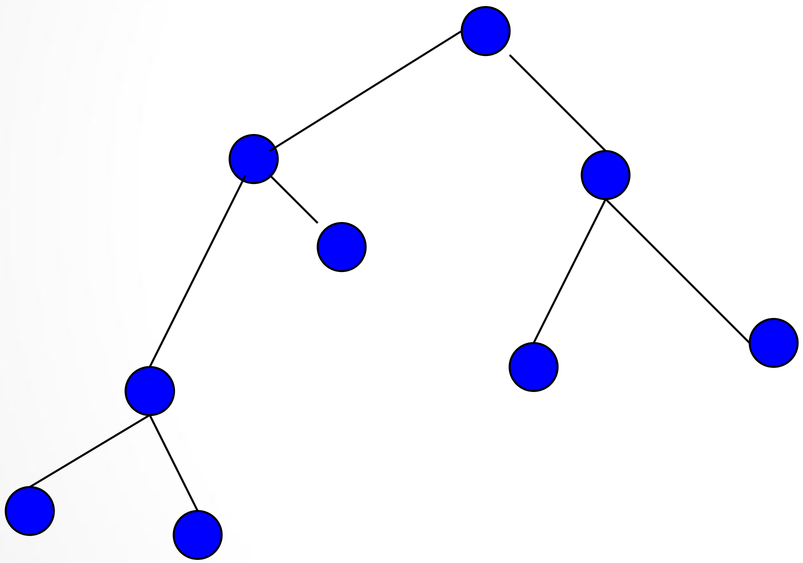
внешнюю). При этом справедливо:



$$n - m + r = 2$$

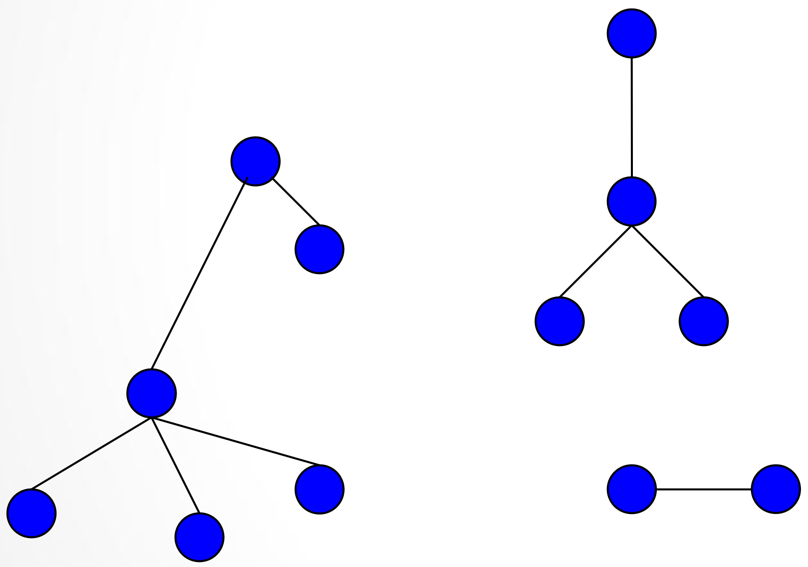
$$n = 5$$
$$m = 7$$
$$r = 4$$

Деревья



- Дерево – конечный связный граф без циклов

Лес



$$C(G) = 3$$

- Упорядоченное объединение деревьев, представляющее собой несвязный граф.
- При этом число связных графов в объединении называют числом связных компонент

$$C(G)$$

Цикломатическое число графа:

$$\nu(G) = m(G) + C(G) - n(G)$$

$m(G)$ -число ребер графа

$C(G)$ -число связных компонент графа

$n(G)$ -число вершин графа

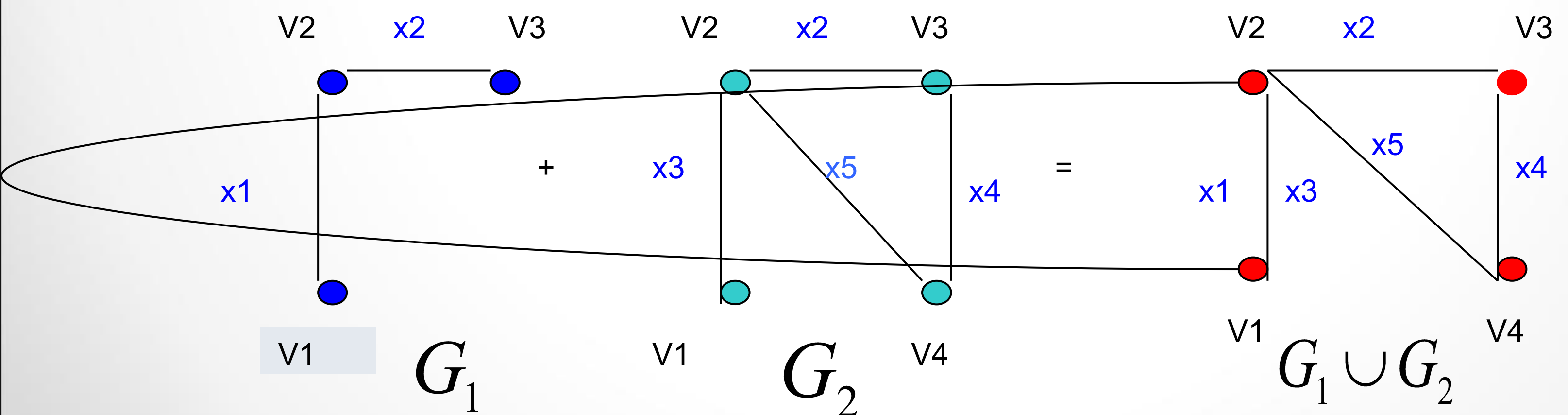
$$\nu(G) = 8 + 1 - 5 = 4$$

$G(V,X) = G_1 \cup G_2$

Операции над графами:

объединение графов

- Объединение графов $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ - это новый граф $G(V,X) = G_1 \cup G_2$, у которого множество вершин $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$

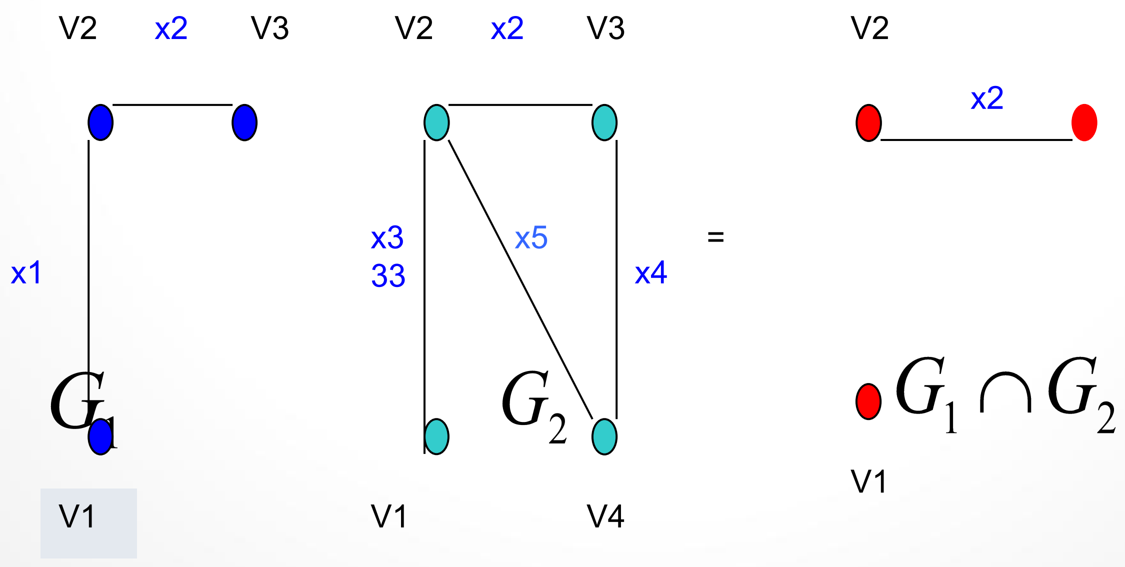


G_2

Операции над графами:

пересечение графов

- Пересечение графов G_1 и G_2 - это граф, для которого $V = V_1 \cap V_2$ - множество вершин, а $X = X_1 \cap X_2$ - множество ребер

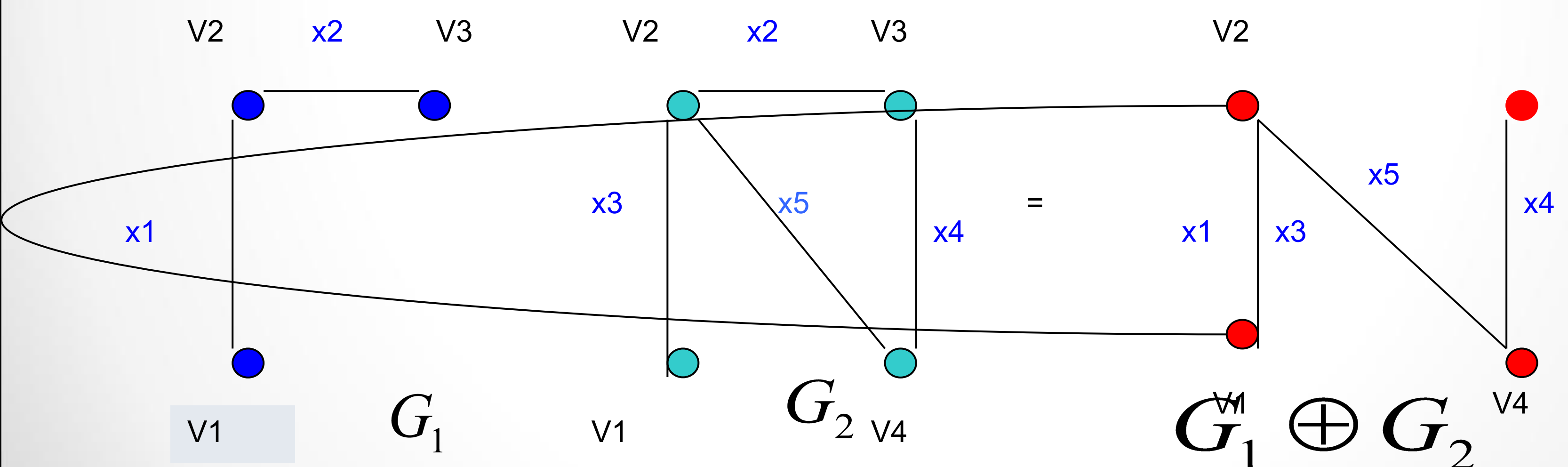


Кольцевая сумма графов G_1 и G_2

это граф

$$G(V,X)=G_1\oplus G_2,\quad V=V_1\cup V_2,$$

$$X=(X_1\cup X_2)/(X_1\cap X_2)$$



Способы задания графов. Матрицы смежности,

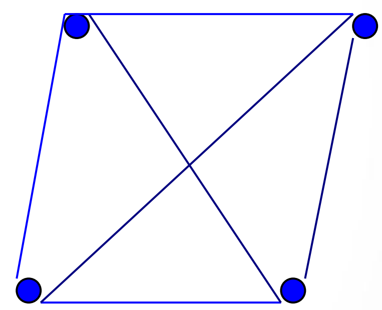
инцидентности графов.

Лекция 8

O **Пустой граф** - все вершины имеют нулевые степени

Полный граф G – каждые две различные вершины соединены одним и только одним ребром

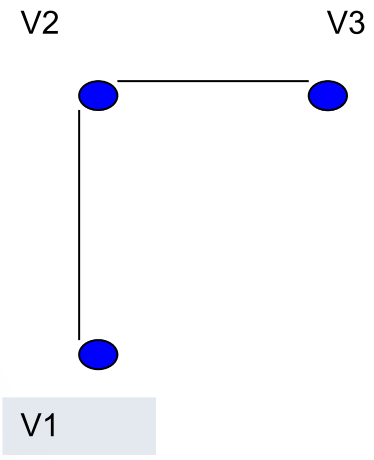
O_4



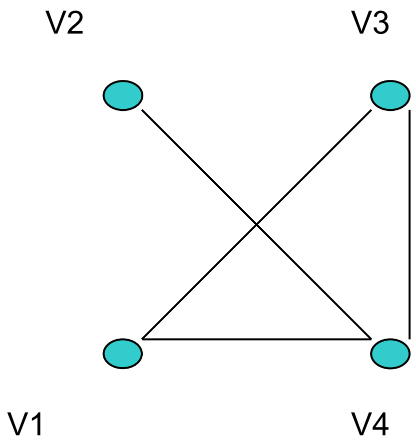
K_4

G

Дополнение графа G –это другой граф $\overline{G}$, с теми же вершинами, что и данный граф и *ребрами, которые надо добавить к первому графу, чтобы получился полный граф*



G



$\overline{G}$

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

Матрица инцидентности графа G с конечным числом вершин n и числом ребер — это m прямоугольная матрица B размерности $n \times m$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина } x_i \quad \textit{инцидентна ребру } v_j \\ \quad 0 \quad \textit{во всех других случаях} \end{cases}$$

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

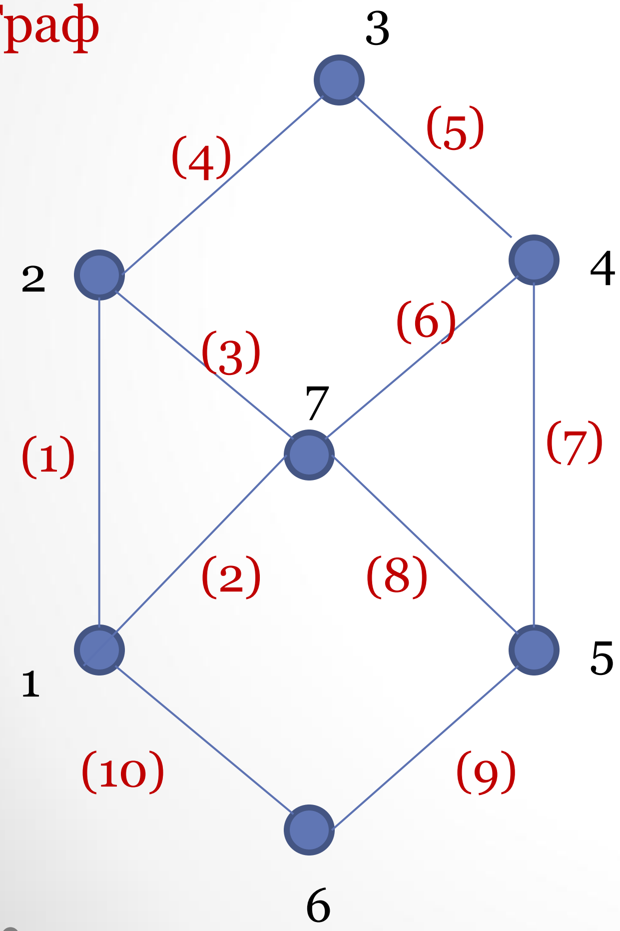
- Матрицей инцидентности орграфа называется прямоугольная матрица G размерности $n \times m$
- n- число вершин, m - число ребер.

Элемент матрицы принимает значение 1, если вершина – *начало ребра*,

- Элемент матрицы принимает значение -1 , если вершина – *конец ребра*
- Элемент равен 2, если у вершины есть петля
- Элемент равен 0, если вершина не инцидентна ребру

СВОЙСТВА МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ: 1. Число строк равно числу вершин 2. Число столбцов равно числу ребер 3. В каждом столбце ровно две единицы, соответствующие концам данного ребра

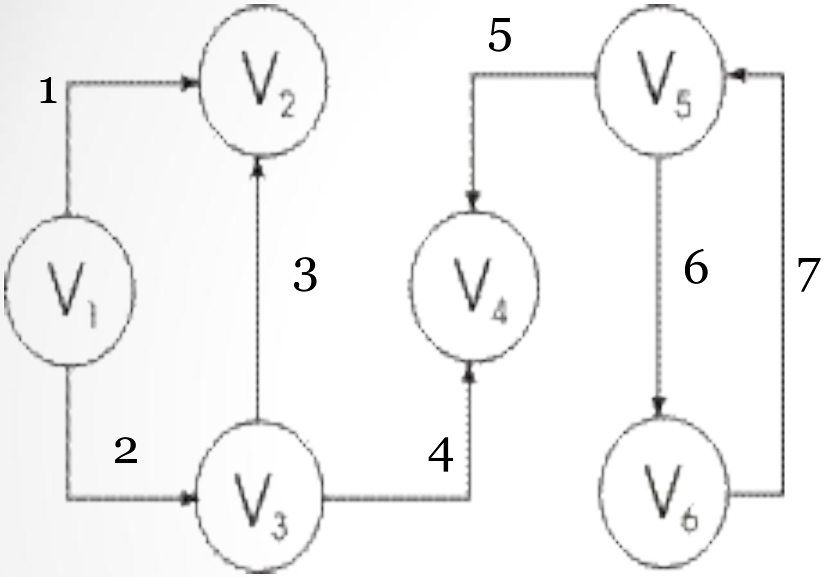
- Граф



- Матрица инцидентности

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ГРАФ



- Задаем нумерацию дуг графа:

1. (1, 2)
2. (1,3)
3. (3,2)
4. (3,4)
5. (5,4)
6. (5,6)
7. (6,5)

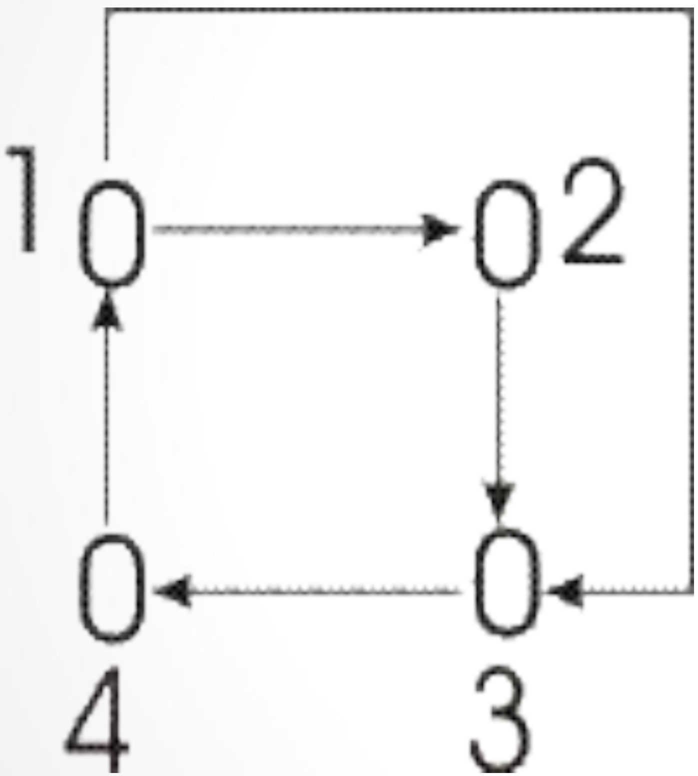
МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ ГРАФА

- *Матрица смежности графа G* с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A порядка n, в которой значение элемента a_{ij} равно числу ребер из i-й вершины графа в j-ю вершину.

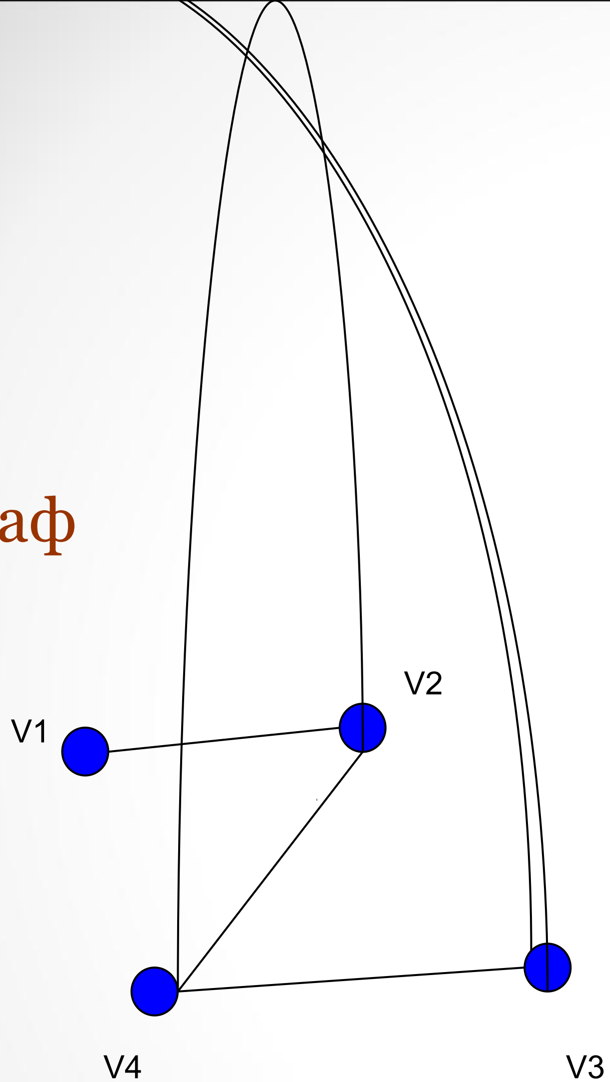
Граф



Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

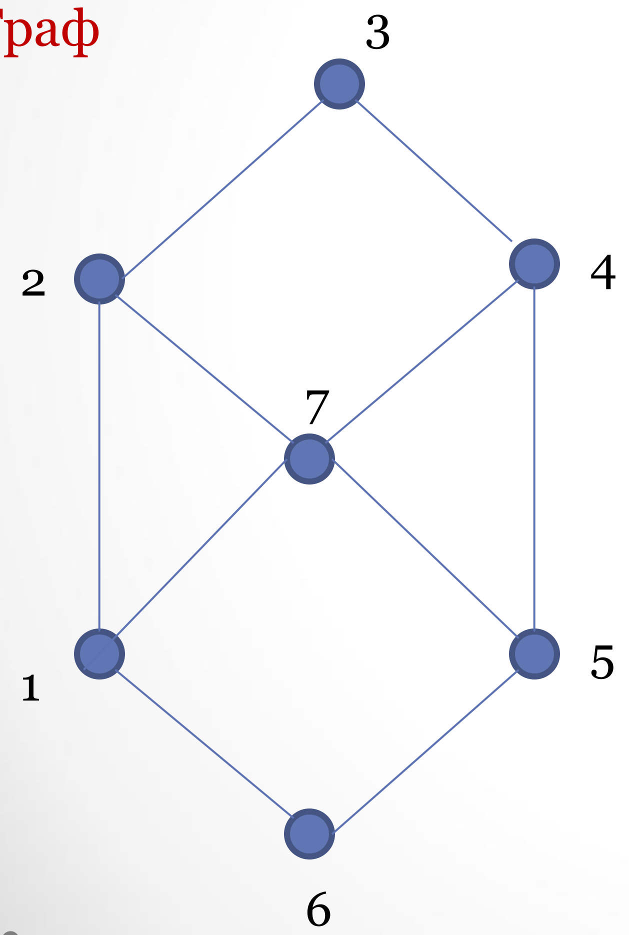
- Граф



- Матрица смежности

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Граф



-

- Матрица смежности

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$