Функциональный степенной ряд. Область сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

Лекция 8

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$
- $|(-1)^{n+1}a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots . a_{n-1} > a_n \ldots .$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Функциональный ряд. Область сходимости

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
- $|(-1)^{n+1} a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots a_{n-1} > a_n \ldots$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится условно.
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ сходится абсолютно (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Равномерная сходимость функционального ряда

-
- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
- $|(-1)^{n+1} a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots . a_{n-1} > a_n \ldots .$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$
- $|(-1)^{n+1} a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots a_{n-1} > a_n \ldots$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Действия со степенными рядами

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots.(-1)^{n+1} a_n \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$
- $|(-1)^{n+1}a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots..a_{n-1} > a_n\ldots..$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots.(-1)^{n+1} a_n \ldots.= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$
- $|(-1)^{n+1}a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots..a_{n-1} > a_n \ldots..$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Разложение функций в ряд Маклорена

-
- $a_1 - \ a_2 + \ a_3 - a_4 + \ldots .(-1)^{n+1}\ a_n\ \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$
- $|(-1)^{n+1}a_n| = |a_n| \ = \ a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 \ > a_2 > a_3 \ \ldots . . a_{n-1} \ > a_n \ldots . .$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Приемы разложения функций в ряд Маклорена

-
- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots(-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$
- $|(-1)^{n+1}a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots a_{n-1} > a_n \ldots$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится <u>абсолютно</u>, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ <u>сходится условно.</u>
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ <u>сходится абсолютно</u> (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ <u>сходится условно</u> т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется