Преобразования Лапласа. Свойства. Восстановление функции по изображению

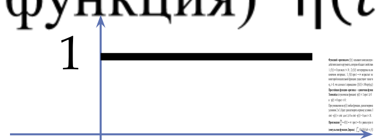
Лекция 10

Оригинал и изображение по Лапласу

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:



При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$ (**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Оригинал и изображение по Лапласу

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$

и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$

(**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Свойства преобразований Лапласа

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$

(импульсная функция Дирака): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Свойства преобразований Лапласа

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$

и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

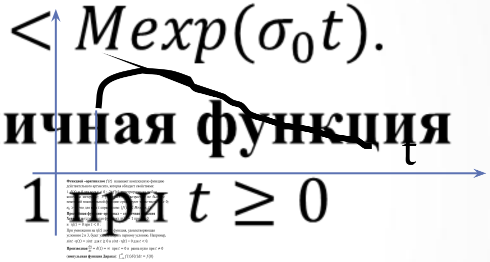
Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$

(**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Свойства преобразований Лапласа

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.



Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$ **(импульсная функция Дирака)**: $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Восстановление функции –оригинала по изображению (обратное преобразование Лапласа)

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < M exp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$ (**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Теоремы разложения

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$ (**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Примеры восстановления оригинала по изображению

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:

При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$

(**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$