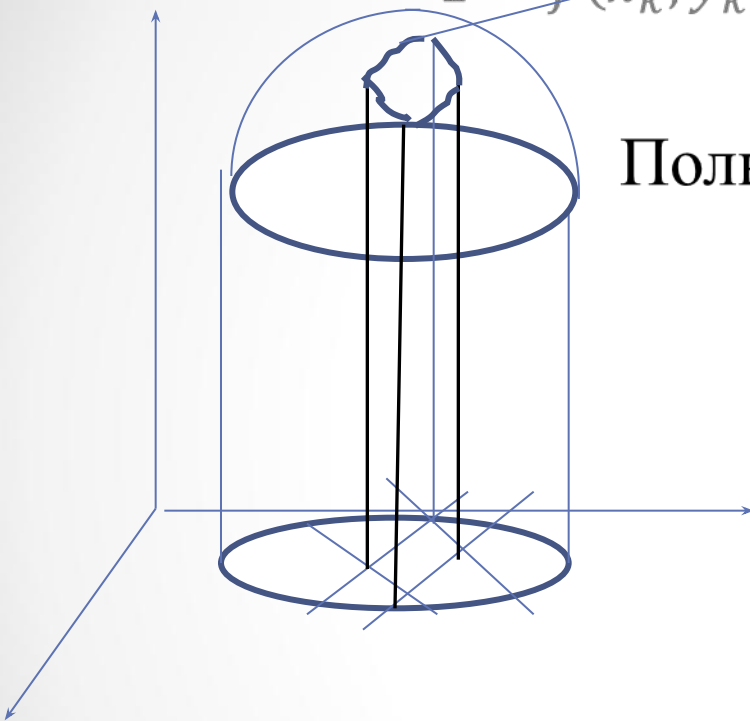


Кратные интегралы

Лекция 1

Двойной интеграл. Задача о вычислении объема

•



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$

$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

• $\iint dS = S$ - площадь области D

•

Вычисление двойного интеграла

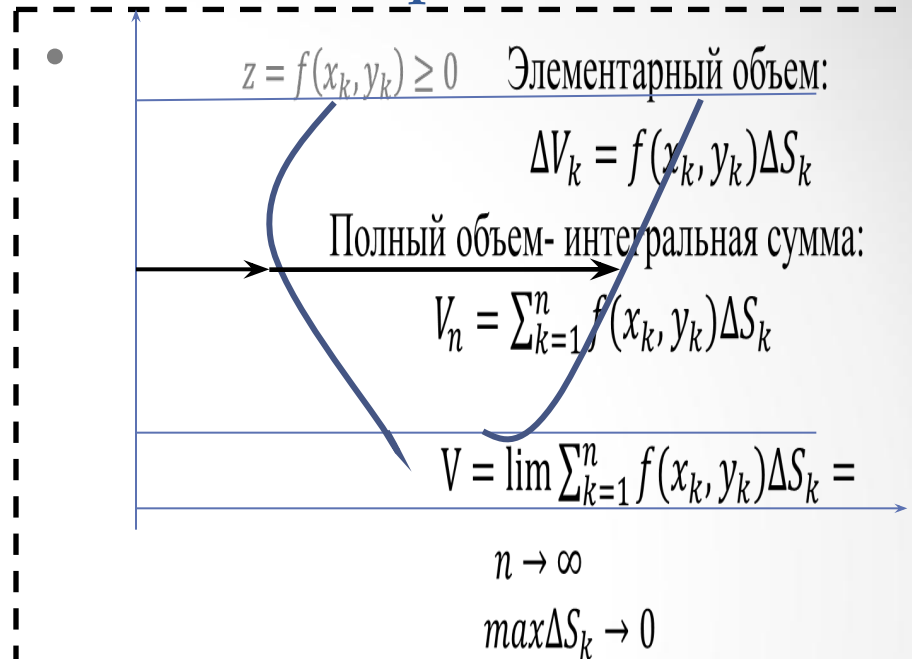


$= \iint f(x, y) dS$ - двойной интеграл

D - область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D



$= \iint f(x, y) dS$ - двойной интеграл

D - область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D

Примеры вычислений двойного интеграла в декартовых координатах

$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

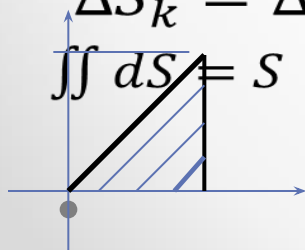
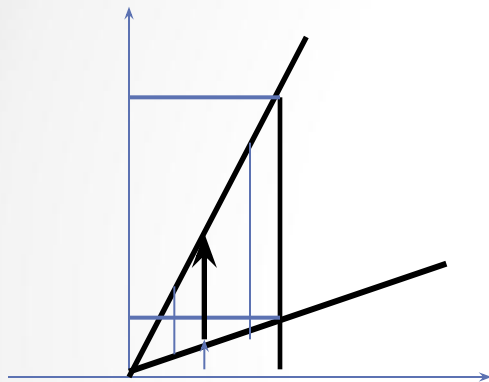
$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$

$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D



Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

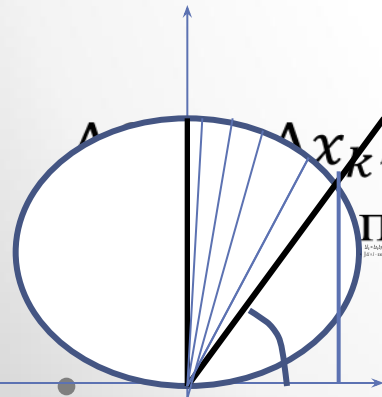
Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования



$\Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

площадь области D

Тройной интеграл

$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$

$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ – элемент площади

$\iint dS \equiv S$ – площадь области D

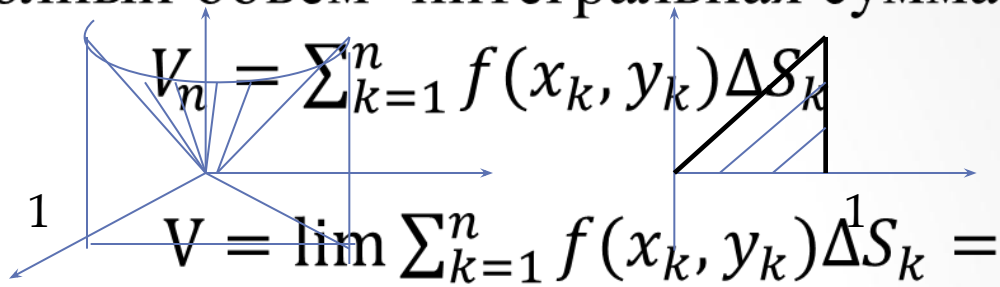


$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$
 Полный объем- интегральная сумма:
 $V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$
 $V = \lim \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$
 $n \rightarrow \infty$
 $\max \Delta S_k \rightarrow 0$
 $= \iint f(x, y) dS$ - двойной интеграл
 D - область интегрирования
 $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

Примеры

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

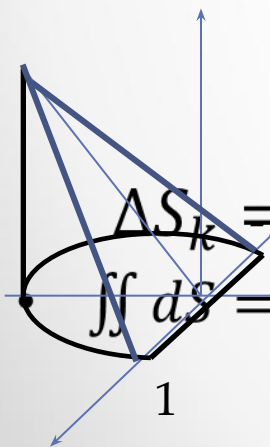


The diagram shows a 3D coordinate system with a surface. On the left, a surface is approximated by several small pyramids with their bases on the surface and vertices at a common point above it. The total volume is labeled $V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$. On the right, a single small pyramid is shown in detail, with its base area ΔS_k and height $f(x_k, y_k)$. Below these diagrams, the volume is defined as the limit of the sum as the number of pyramids goes to infinity and the maximum base area goes to zero:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

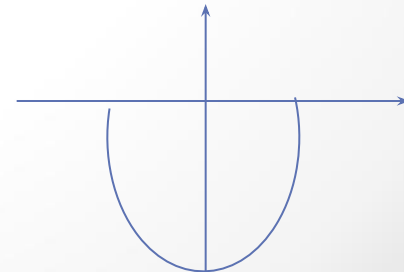
$$= \iint_D f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

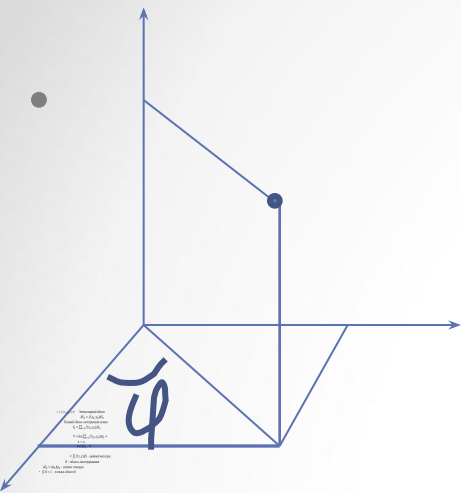


$\Delta S_k \equiv \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint_D dS = S$ - площадь области D



Тройной интеграл в цилиндрической системе координат



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

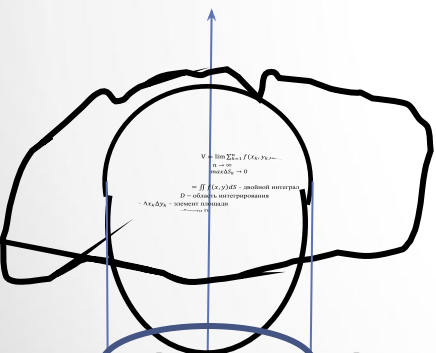
$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$



$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

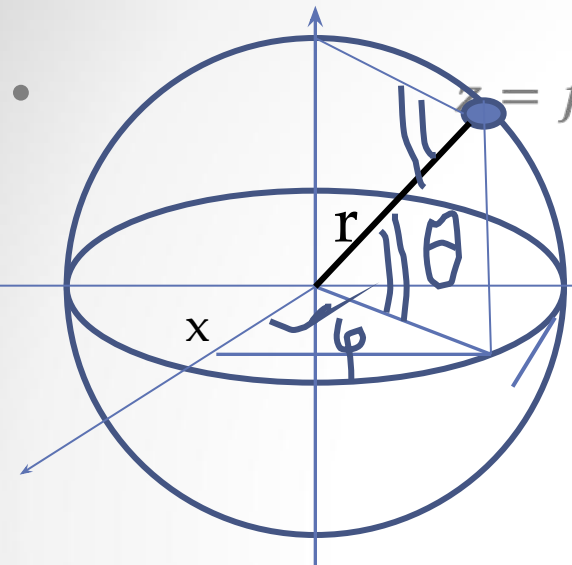
D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D



Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат



$$z = f(x_k, y_k) \geq 0$$

Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$= \iint_D f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

$$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k - \text{элемент площади}$$

$$\iint_D dS = S - \text{площадь области } D$$

