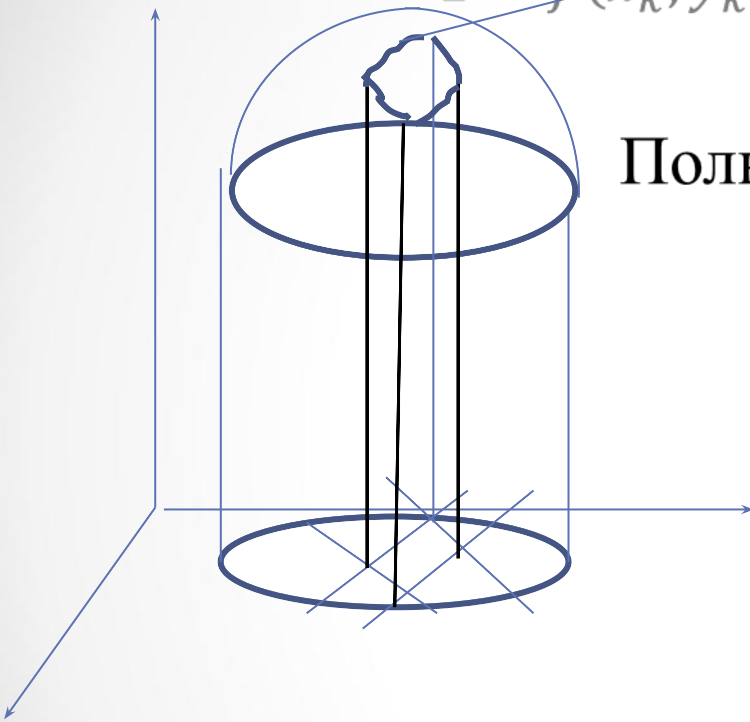
Кратные интегралы

Лекция 1

Двойной интеграл. Задача о вычислении объема



Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$= \iint f(x, y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D

Вычисление двойного интеграла

$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$n \to \infty$

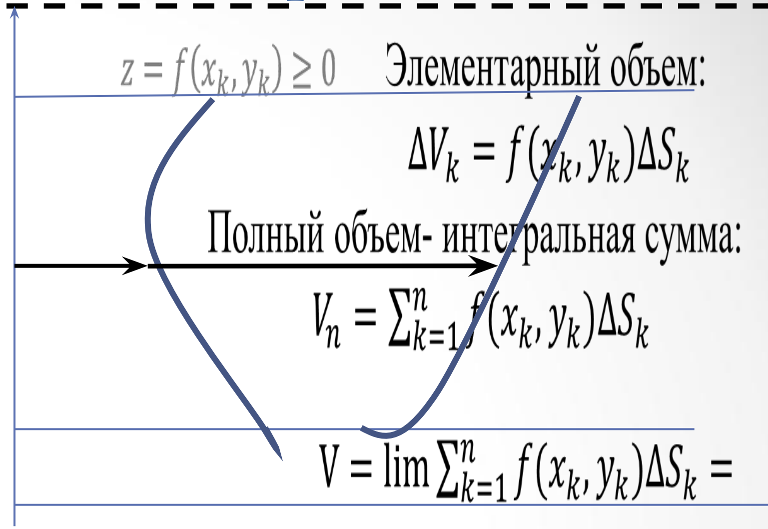
$max \Delta S_k \to 0$

$= \iint f(x,y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$n \to \infty$

$max \Delta S_k \to 0$

$= \iint f(x,y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

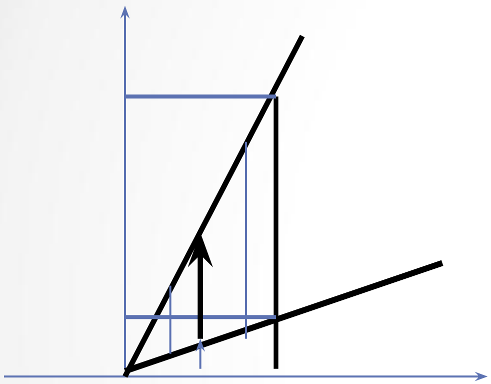
$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D

Примеры вычислений двойного интеграла в декартовых координатах

- $z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$



Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

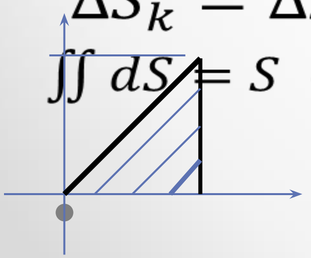
$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$$= \iint f(x, y)dS$$ - двойной интеграл

$D -$ область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D



Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

- $z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

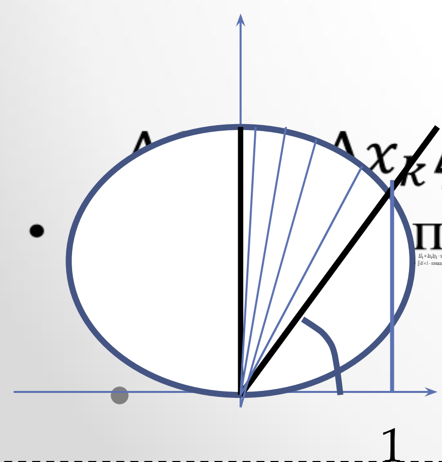
$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$$= \iint f(x, y)dS$$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

Δ … $\Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- … площадь области D



Тройной интеграл

- $z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

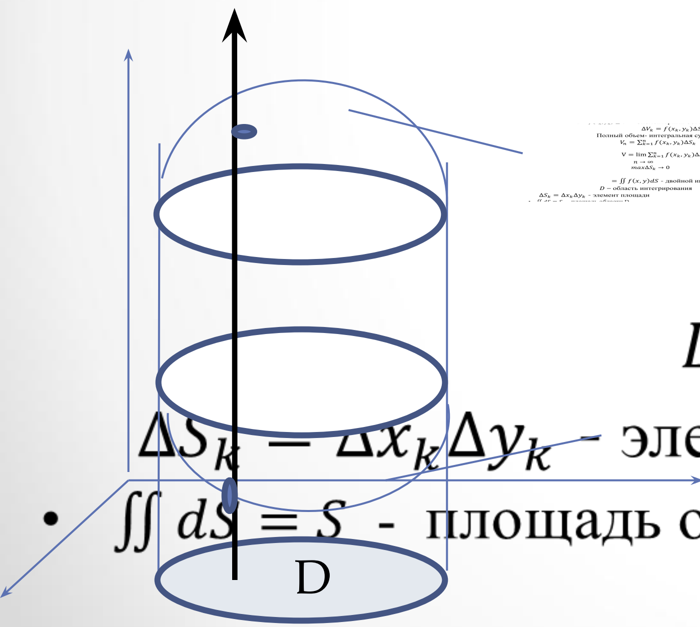
$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$= \iint f(x, y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

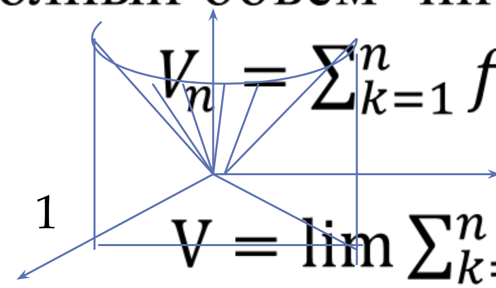
- $\iint dS = S$ - площадь области D

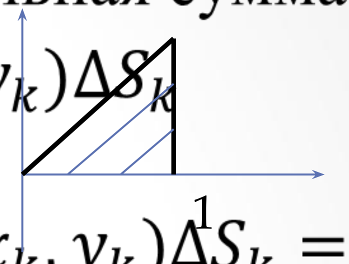


Примеры

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:



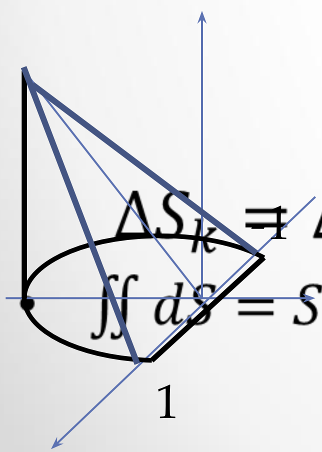


$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

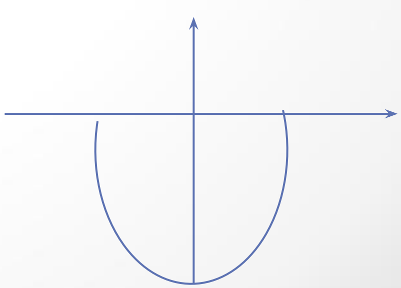
$= \iint f(x, y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

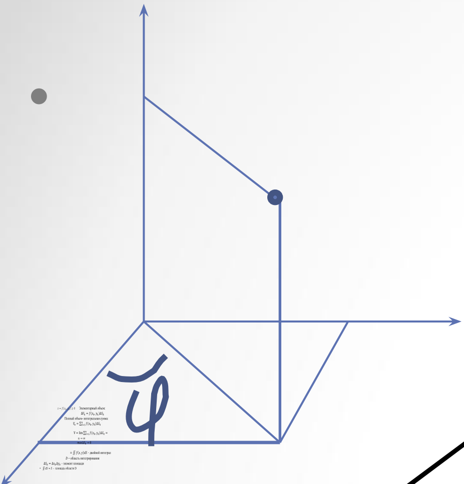


$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D



Тройной интеграл в цилиндрической системе координат



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$

Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

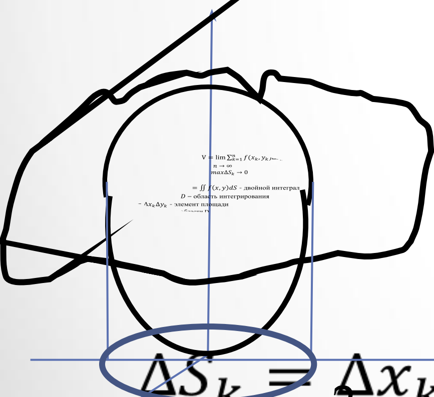
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

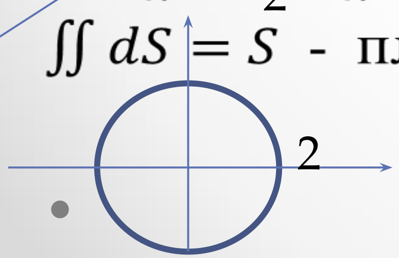
$$= \iint f(x,y)dS$$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

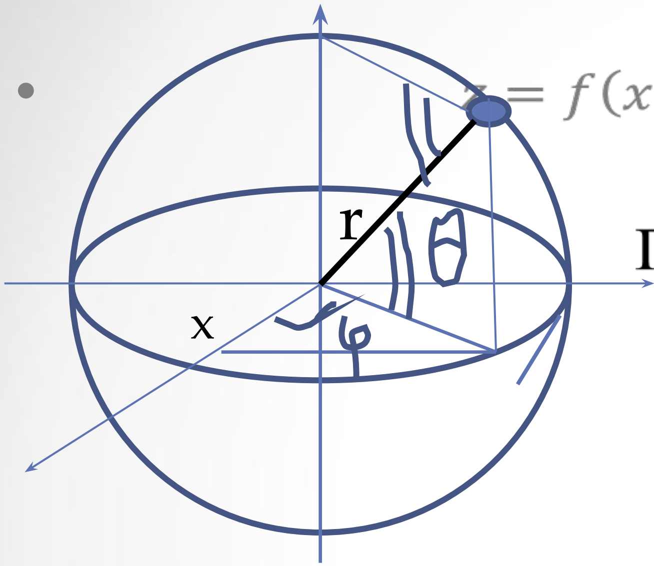
$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади



- $\iint dS = S$ - площадь области D



Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$

Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

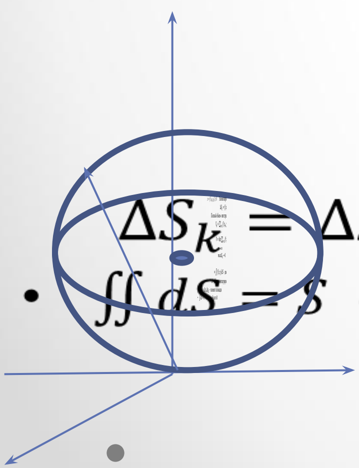
$$\mathrm{V} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$n \to \infty$

$max\Delta S_k \to 0$

$= \iint f(x, y)dS$ - двойной интеграл

D – область интегрирования



$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D