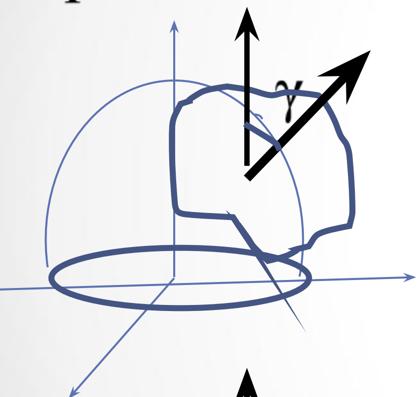
Поток и циркуляция векторного поля

Лекция 3

Ориентированная поверхность. Вектор нормали

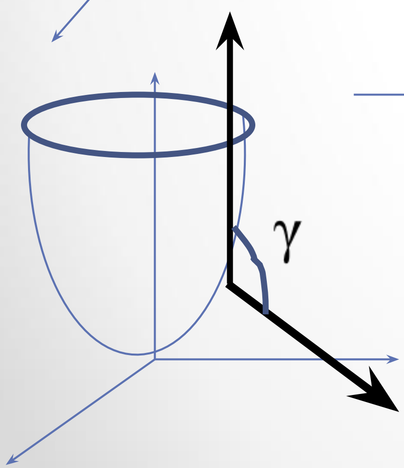
- Пусть $\Sigma: \quad z = f(x,y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:



$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

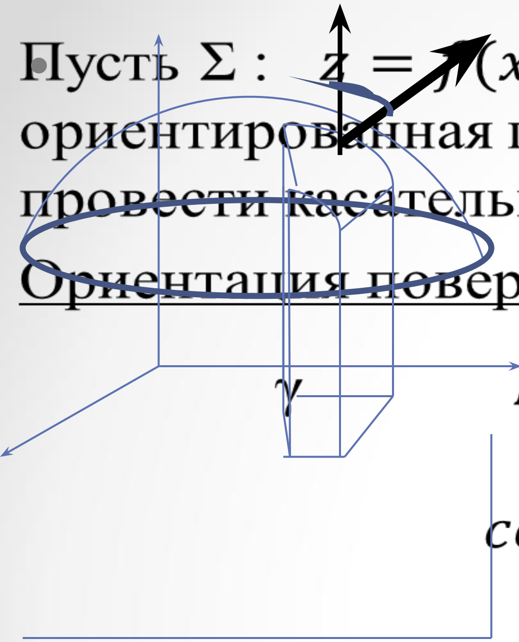


$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

Поток векторного поля

Пусть $\Sigma : \ z = f(x,y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).



<u>Ориентация поверхности</u> задается выбором направления нормали:

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

γ

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

Пример вычисления потока

- Пусть $\Sigma: \quad z = f(x,y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

γ

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

- $\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$
-

Поток через замкнутую поверхность

- Пусть $\Sigma: \quad z = f(x,y)$ – кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:

γ

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

γ

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

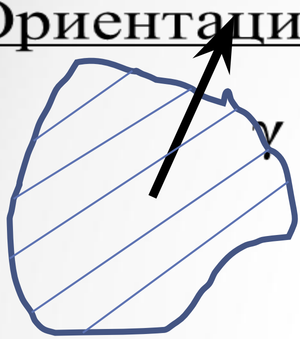
Циркуляция векторного поля

Пусть Σ : $z = f(x, y)$ – кусочно-гладкая двусторонняя

ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности м

провести касательную плоскость и указать нормаль к поверх

Ориентация поверхности задается выбором направления нор



γ

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

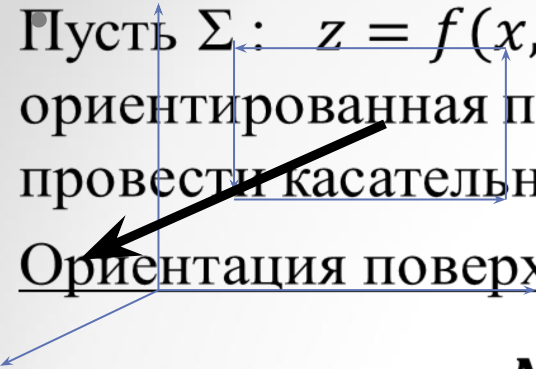
γ

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < 0$$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

Ротор. Теорема Стокса



Пусть $\Sigma: \quad z = f(x,y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:

γ

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ \ 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

γ

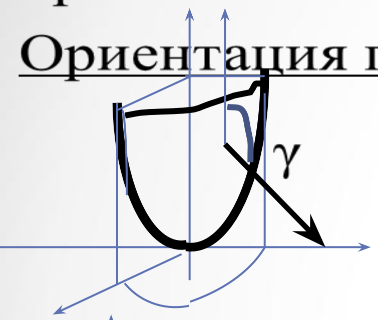
$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

Пример вычисления циркуляции

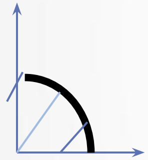
Пусть Σ : $z = f(x, y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:



$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \;1\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$



γ

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \;\frac{\partial f}{\partial y}, \;-1\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \;0$$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \;\frac{\partial f}{\partial y}, \;-1\right)$$

Уравнения Дж. Максвелла (уравнения классической электродинамики)

Пусть $\Sigma: \quad z = f(x, y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

<u>Ориентация поверхности</u> задается выбором направления нормали:

γ $$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad 1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$

γ $$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -1\right)$$