Дифференциальные уравнения высших порядков

Лекция 5

Теорема существования и единственности для уравнений первого порядка.

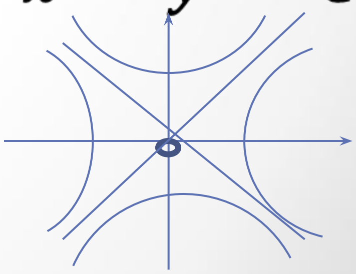
Если для уравнения первого порядка $y^{I} = f(x, y)$ выполняются условия:

- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \longleftrightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{x} \longrightarrow ydy = xdx \longrightarrow x^2 - y^2 = C}$



- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения

Теорема существования и единственности для уравнений первого порядка

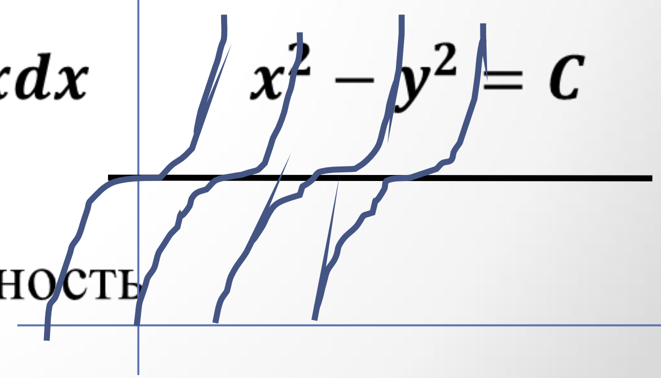
Если для уравнения первого порядка $y^{I} = f(x,y)$ выполняются условия:

- функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x,C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\quad$ $\boldsymbol{ydy = xdx}$ $\quad$ $\boldsymbol{x^2 - y^2 = C}$



- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность правой части уравнения

Дифференциальные уравнения высших порядков . Основные понятия

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x,y)$ выполняются условия:

- функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x,C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\quad ydy = xdx$ $\quad x^2 - y^2 = C$

- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения

условия:
- функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,
то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.
При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.
Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $ydy = xdx$ $x^2 - y^2 = C$
- решение является семейством гипербол

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x,y)$ выполняются условия:

- функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}}$ $\boldsymbol{\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}}$ $\boldsymbol{ydy = xdx}$ $\boldsymbol{x^2 - y^2 = C}$

- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x, y)$ выполняются условия:
- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.
При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.
Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $ydy = xdx$ $x^2 - y^2 = C$
- решение является семейством гипербол

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x, y)$ выполняются условия:

- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\qquad \boldsymbol{ydy = xdx}$ $\qquad \boldsymbol{x^2 - y^2 = C}$

- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения

Дифференциальные уравнения высших порядков, попускающие понижение порядка: **левая и правая части уравнения являются полными производными**

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x, y)$ выполняются условия:

- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\quad ydy = xdx$ $\quad x^2 - y^2 = C$

- решение является семейством гипербол

кроме точки $(0,0)$, где нарушается непрерывность правой части уравнения

Определите тип дифференциального уравнения и решите его

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x, y)$ выполняются условия:

- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\quad ydy = xdx$ $\quad x^2 - y^2 = C$

\- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения

Пример задачи на составление дифференциального уравнения

Если для уравнения первого порядка $y^I = f(x, y)$ выполняются условия:

- функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области D,

то решение уравнения $y = \varphi(x, C)$ в области D существует и единственно. Через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая.

При нарушении условий теоремы в каких –либо точках, решение либо отсутствует, либо не является единственным.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ $\quad ydy = xdx$ $\quad x^2 - y^2 = C$

- решение является семейством гипербол

кроме точки (0,0), где нарушается непрерывность

правой части уравнения