Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Лекция 6

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

- $y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$

$P_{n-1},\ P_{n-2},\ P_{n-3} \dots \dots P_{1,} \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

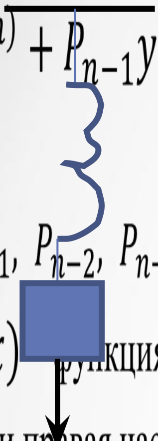
Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

$P_{n-1}, \ P_{n-2}, \ P_{n-3} \ldots \ldots P_1, \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.
$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$
Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:
$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$
Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**
Уравнение порядка $n = 2$ имеет вид

Механические колебания

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$



$P_{n-1}, \ P_{n-2}, \ P_{n-3} \ldots \ldots P_1, \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

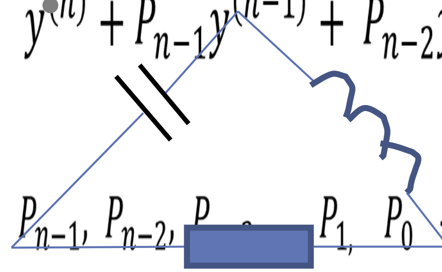
Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Электрические колебания

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$



$P_{n-1}, \ P_{n-2}, \ P_{n-3} \ldots \ldots P_1, \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Структура **общего решения однородного уравнения**

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$

$P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} \ldots \ldots P_{1,} \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

Уравнение порядка $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Виды корней многочленов

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$

$P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} \ldots \ldots P_{1,} \; P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Общее решение однородного уравнения. Примеры

- $y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$

Вид корней	Базисные решения	Общее решение y_{oo}	Примеры
D> 0, $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = e^{\lambda_2 x}$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y^{II} + 5y^I + 4y = 0$ $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ $y_{oo} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}$
D= 0; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$	$y_1 = e^{\lambda_0 x}$; $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$	$y^{II} + 10y^I + 25y = 0$ $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ $y_{oo} = C_1 e^{-5x} + xC_2 e^{-5x}$
D< 0; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x$	$e^{\alpha x}(C_1 e^{\alpha x} cos\beta x +$ $+ C_2\, e^{\alpha x} \sin\beta x)$	$y^{II} + 4y^I + 5y = 0$ $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ $y_{00} = e^{-2x}(C_1 \cos x +$ $C_2 sinx)$

Структура решения неоднородного уравнения

- $y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$

$P_{n-1},\ P_{n-2},\ P_{n-3} \dots \dots P_{1,} \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение

называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Вид правой части $f(x)$	Контрольное число	Общий вид частного решения
Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots a_1 x + a_0$ $P_0 = a_0$ - число $P_1 = a_1 x + a_0$ $P_2 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$\lambda = 0$ не является корнем характер. уравнения $\lambda = 0$ корень *кратности* r характер. уравнения	$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \dots + b_1 x + b_0$ $x^r Q_n(x)$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	$\lambda = \alpha$ не является корнем характер. уравнения $\lambda = \alpha$ корень кратности r характер. уравнения	$e^{\alpha x} Q_n(x)$ $x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$
$P_n(x) cos\omega x + Q_m(x) sin\omega x$	$\lambda = \pm i\omega$ не является корнем характер. Уравнения $\lambda = \pm i\omega$ корень кратности r характер. уравнения	$M_k(x) cos\omega x + N_k(x) sin\omega x$ $x^r (M_k(x) cos\omega x + N_k(x) sin\omega x)$ $k = \max(n, m)$
$e^{\alpha x}(P_n(x) cos\omega x + Q_m(x) sin\omega x)$	$\lambda = \alpha \pm i\omega$ не является корнем характер. уравнения $\lambda = \alpha \pm i\omega$ корень кратности r характер. уравнения	$e^{\alpha x}(M_k(x) cos\omega x + N_k(x) sin\omega x)$ $x^r e^{\alpha x}(M_k(x) cos\omega x + N_k(x) sin\omega x)$

Подбор частного решения по правой части специального вида. Пример.

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots. + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$

$P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} \dots \dots P_1, \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

		$\boldsymbol{y}_{\text{чн}}$
$f(x) = x + 2$	$\lambda = 0$ является корнем характ. уравнения $r = 2$	$x^2(Ax + B)$
$f(x) = e^{2x}$	$\lambda = 2$ не является корнем характ. уравнения	Ae^{2x}
$f(x) = sinx$	$\lambda = \pm i\omega = \pm i$ не является корнями характ. уравнения	$Acos\omega x + Bsin\omega x$

Уравнение порядка $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$