

# Представление аналитических функций рядами. Понятие вычета

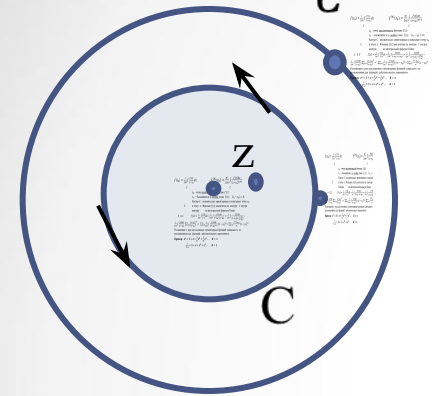


Лекция 9



# Ряд Тейлора (разложение в ряд в окрестности точки аналитичности)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad \longleftrightarrow \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$

$z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;

Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура  $\rightarrow$  по интегральной формуле Коши:

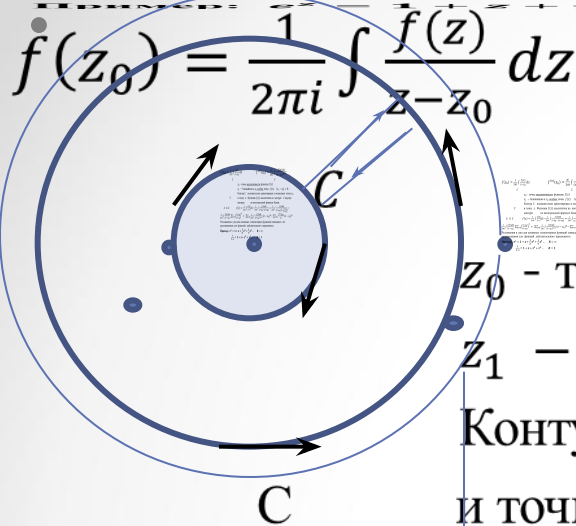
$$\bar{z} \in C \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$



$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$   
 $z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура по интегральной формуле Коши:

$$\begin{aligned}
 \bar{z} \in C \quad f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} = \\
 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n
 \end{aligned}$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 $z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$   
 и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри  
 контура  $C$  по интегральной формуле Коши:  
 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} =$   
 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$   
 Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их  
 разложениями для функций действительного переменного.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$   
 $z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$   
 и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри  
 контура  $C$  по интегральной формуле Коши:

$$\bar{z} \in C \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z} - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их  
 разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$   $\longleftrightarrow$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$

$z_1$  — ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$   
 и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри  
 контура по интегральной формуле Коши:  
 $z \in C$   
 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} =$   
 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$   
 Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их  
 разложениями для функций действительного переменного.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$

$z_1$  — ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;

Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$   
 и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри  
 контура по интегральной формуле Коши:

$$\bar{z} \in C \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z} - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z} - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$

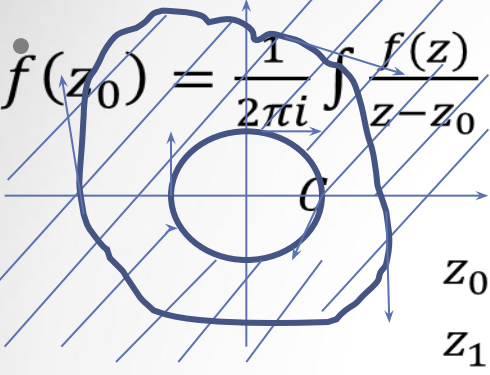
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$   
 $z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура по интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(z-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.  
 Пример:  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$   $R = \infty$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$   
 $z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;  
 Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура по интегральной формуле Коши:

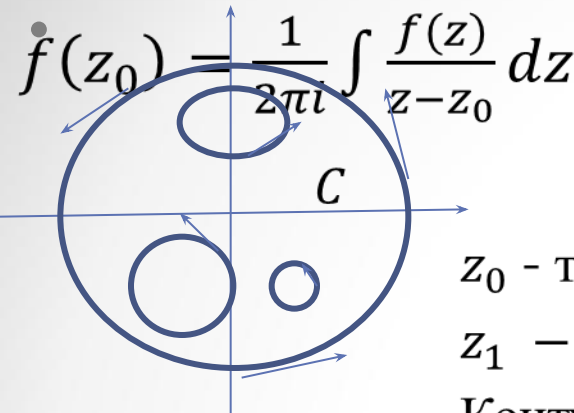
$$\bar{z} \in C \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример:  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$   $R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$
  $R = 1$

# Основные теоремы о вычетах



C

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$

$z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре C внутри контура

по интегральной формуле Коши:

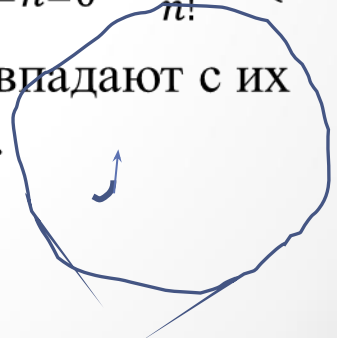
$$\bar{z} \in C \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$



# Вычисление контурных интегралов. Пример.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$

$z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;

Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$

$C$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура по интегральной формуле Коши:

$$\bar{z} \in C \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$



# Вычисление несобственных интегралов. Примеры

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$z_0$  - точка аналитичности функции  $f(z)$

$z_1$  - ближайшая к  $z_0$  особая точка  $f(z)$ ;  $|z_1 - z_0| = R$ ;

Контур  $C$  положительно ориентирован и охватывает точку  $z_0$

$C$  и точку  $z$ . Функция  $f(z)$  аналитична на контуре  $C$  внутри контура по интегральной формуле Коши:

$$\bar{z} \in C \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0) \left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\bar{z}) d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

**Пример:**  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 \dots \quad R = \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \quad R = 1$$