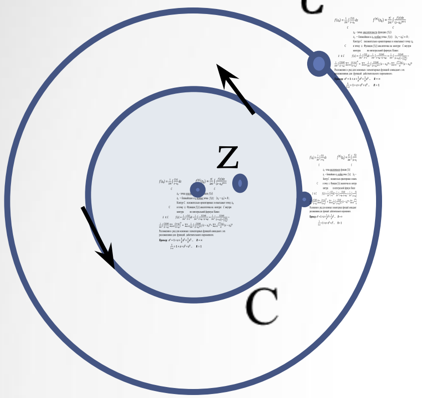
Представление аналитических функций рядами. Понятие вычета

Лекция 9

Ряд Тейлора (разложение в ряд в окрестности точки аналитичности)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad \longleftrightarrow \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0 и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри контура ⟶ по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-\mathbf{z_0}-(z-\mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

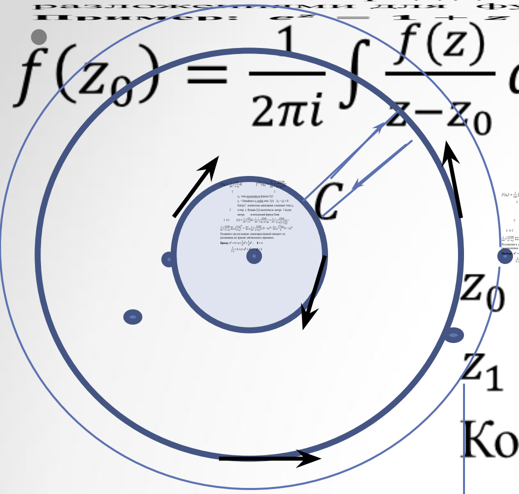
$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad\qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



C

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур С положительно ориентирован и охватывает точку z_0 и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри контура по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-\mathbf{z_0}-(z-\mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \dots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \qquad R = 1}$$

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$
z_1 — ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;
Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0
C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри
контура по интегральной формуле Коши:
$\bar{z} \in C$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$
$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их
разложениями для функций действительного переменного.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad\qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 — ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0

C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри

контура по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-\boldsymbol{z_0}-(z-\boldsymbol{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

z_1 — ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;
Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0
C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри
контура по интегральной формуле Коши:
$\bar{z} \in C$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$
$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их
разложениями для функций действительного переменного.
Пример: $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3$ ... $R = \infty$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad\qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0

C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри

контура по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-\mathbf{z_0}-(z-\mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

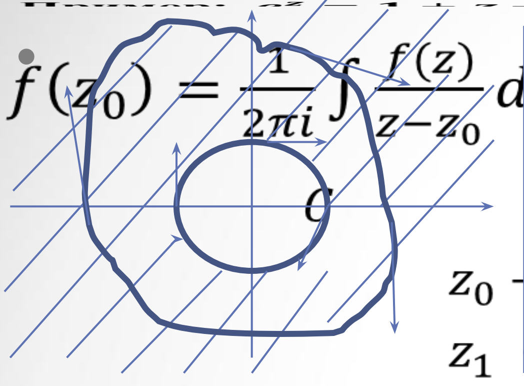
$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$
z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$
z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;
Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0
C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри
контура по интегральной формуле Коши:
$\bar z \in C$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)}{\bar z - z}d\bar z = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{\bar z - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)} =$
$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их
разложениями для функций действительного переменного.
Пример: $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3$ ... $R = \infty$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 - точка <u>аналитичности</u> функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 <u>особая</u> точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0

C и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри контура по интегральной формуле Коши:

$\bar z \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)}{\bar z - z}d\bar z = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{\bar z - \mathbf{z_0} - (z - \mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

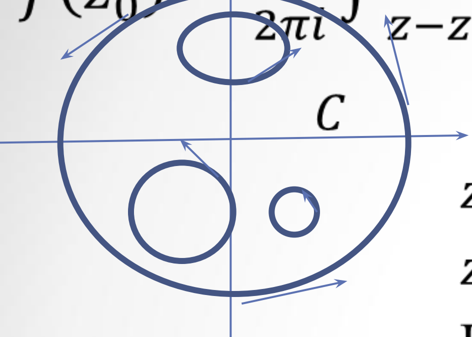
Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

Основные теоремы о вычетах

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad\qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур С положительно ориентирован и охватывает точку z_0

С

и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри контура по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)}{\bar z - z}d\bar z = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{\bar z - \mathbf{z_0} - (z-\mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar z - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

Вычисление контурных интегралов. Пример.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1 - z_0| = R$;

Контур С положительно ориентирован и охватывает точку z_0

С и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри

контура по интегральной формуле Коши:

$\bar{z} \in C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}-z}d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{\bar{z}-\mathbf{z_0}-(z-\mathbf{z_0})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\bar{z})d\bar{z}}{(\bar{z}-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \ldots \qquad R = \infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots \qquad R = 1}$$

Вычисление несобственных интегралов. Примеры

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 - точка аналитичности функции $f(z)$

z_1 – ближайшая к z_0 особая точка $f(z)$; $|z_1-z_0|=R$;

Контур C положительно ориентирован и охватывает точку z_0 и точку z. Функция $f(z)$ аналитична на контуре C внутри контура C по интегральной формуле Коши:

$\bar{z}\in C$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)}{\bar z-z}d\bar z=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)d\bar z}{\bar z-\mathbf{z_0}-(z-\mathbf{z_0})}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\bar z-z_0}\right)}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\bar z-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\bar z)d\bar z}{(\bar z-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Разложения в ряд для основных элементарных функций совпадают с их разложениями для функций действительного переменного.

Пример: $\boldsymbol{e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3\ldots \qquad R=\infty}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3\ldots \qquad R=1}$$