Системы линейных алгебраических уравнений.

Обзор методов решения.

Лекция 11

Матричные уравнения

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Longleftrightarrow EX = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow XA = B \Longleftrightarrow X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad EX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad XA = B \qquad X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Метод Крамера решения систем линейных уравнений

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad EX = A^{-1}B \qquad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad XA = B \qquad X = BA^{-1}$

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad EX = A^{-1}B \qquad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad XA = B \qquad X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (примеры решений)

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad EX = A^{-1}B \qquad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}8 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3 & 1/6\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 5 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad XA = B \qquad X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -9 & 3\\ -7 & 8 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad EX = A^{-1}B \qquad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad XA = B \qquad X = BA^{-1}$

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Пример системы с бесконечным числом решений

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\quad EX = A^{-1}B$ $\quad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad XA = B \quad X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Пример системы, которая не имеет решений

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\quad EX = A^{-1}B$ $\quad X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad XA = B$ $\quad X = BA^{-1}$

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$