Основные понятия теории графов

Лекции 11-12

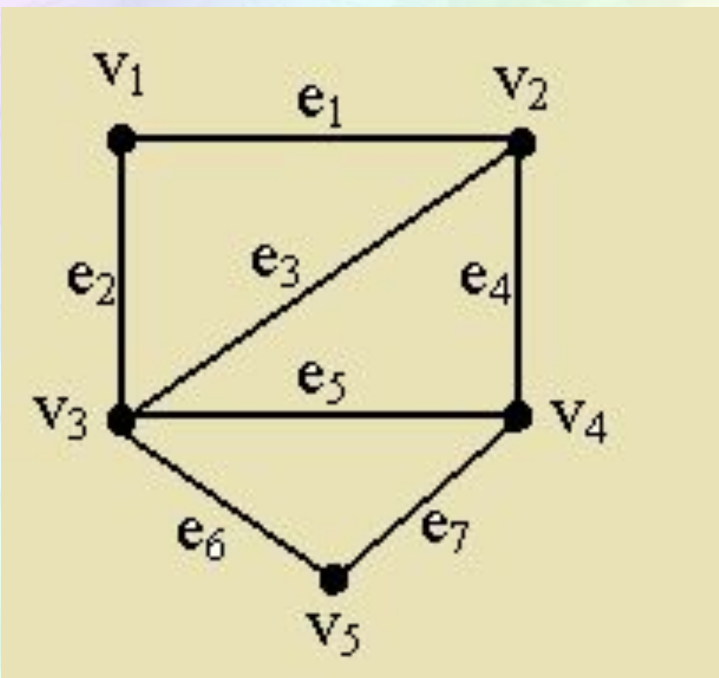
Н.В. Белоус

Факультет компьютерных наук

Кафедра ПО ЭВМ, ХНУРЭ

Основные понятия

Граф **G=(V,E)** состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых ***вершинами***, и конечного множества элементов, называемых ***ребрами***.



Граф ***G=(V, E)***

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

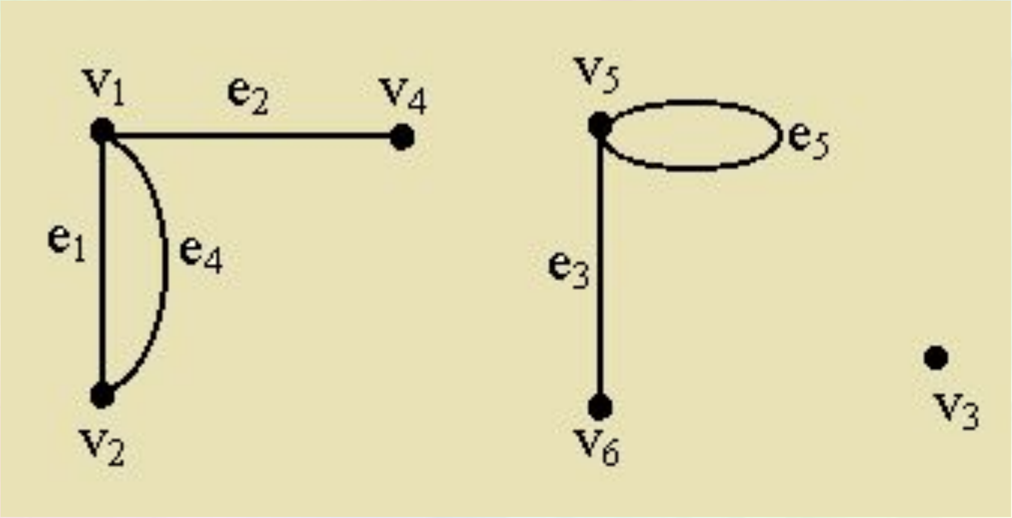
Основные понятия

Вершины v_i и v_j, определяющие ребро e_k, называются ***концевыми вершинами*** ребра e_k.

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются ***параллельными*** (e_1,e_4).

Петля– замкнутое ребро(e_5).

Ребро, принадлежащее вершине, называется ***инцидентным*** (ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2).

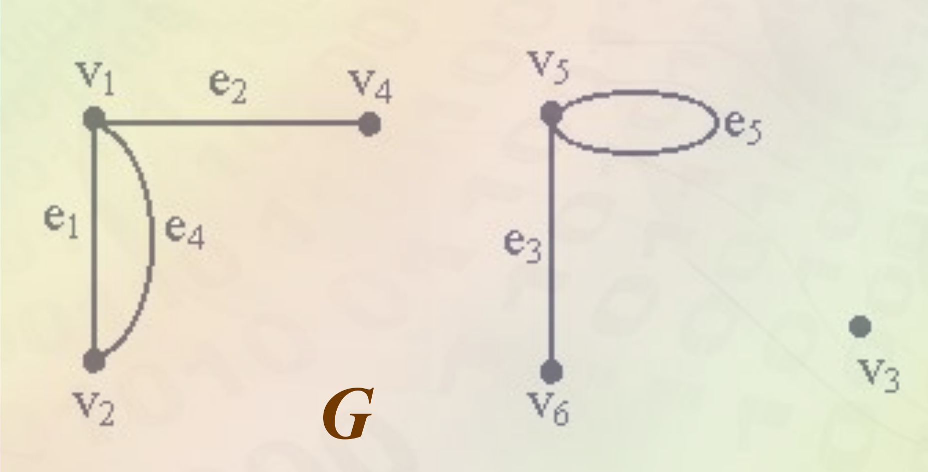


Основные понятия

Изолированная вершина не инцидентна ни одному ребру ($\boldsymbol{v_3}$).

Две вершины ***смежны***, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра ($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_4}$).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются ***смежными*** ($\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$).

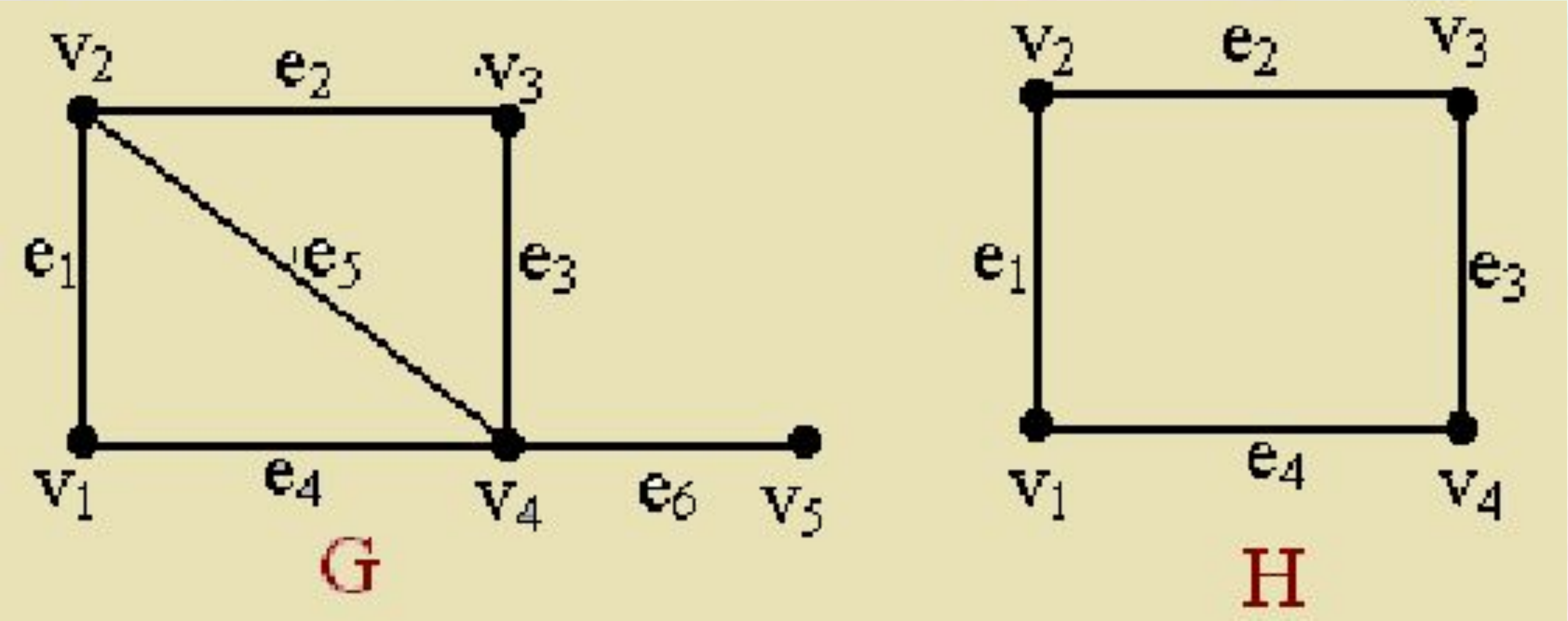


G

✔Демонстрация

Основные понятия

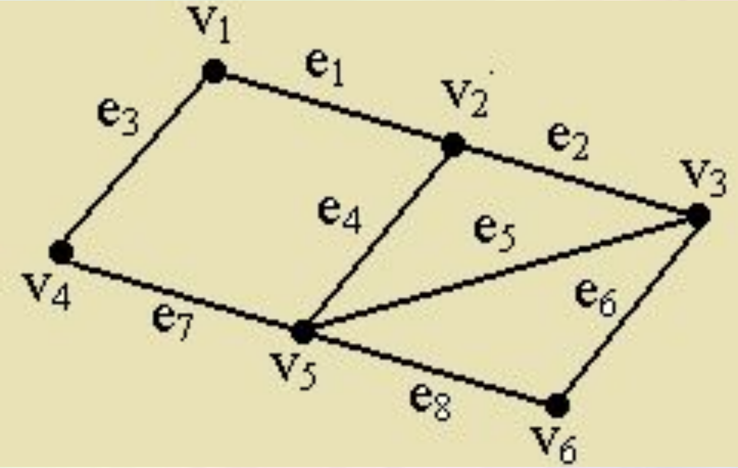
Подграф – любая часть графа, сама являющаяся графом.



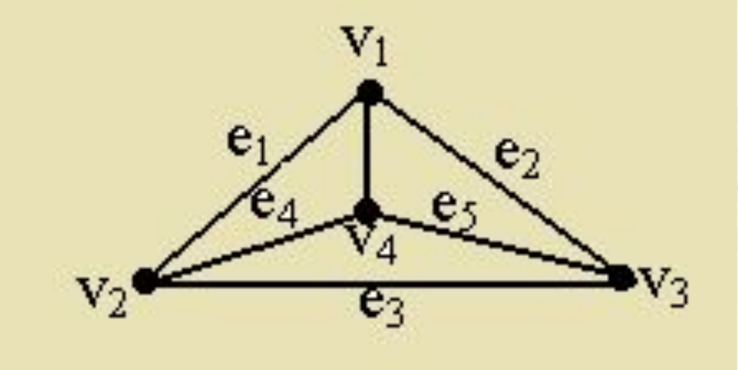
Подграф ***H*** графа ***G***

Виды графов

Граф ***G=(V,E)*** называется ***простым,*** если он не содержит петель и параллельных ребер.

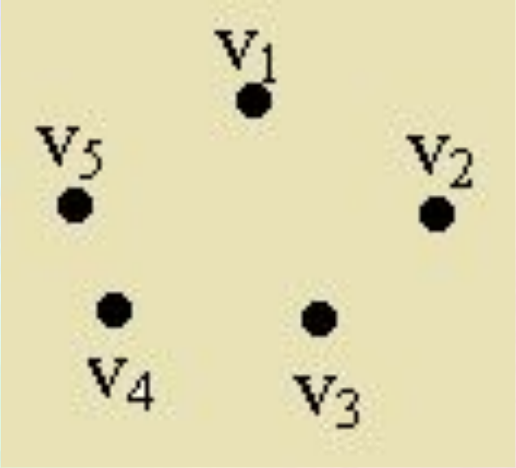


Граф ***G=(V,E)*** называется ***полным***, если он простой и каждая пара вершин смежна.

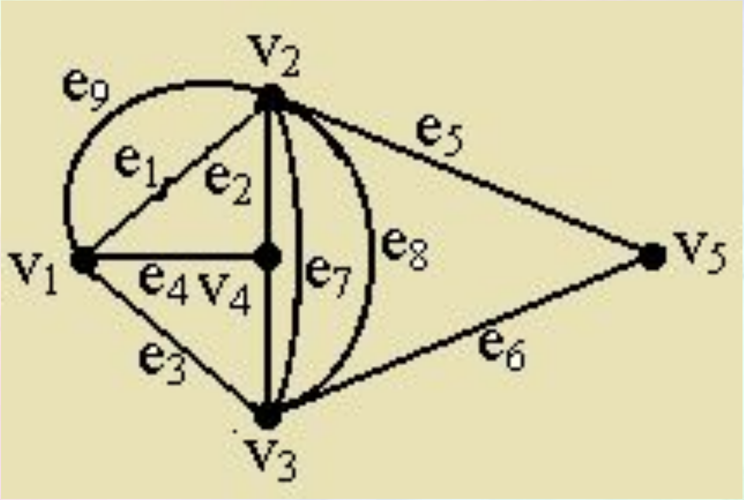


Виды графов

Ноль-граф - граф, множество ребер которого пусто.

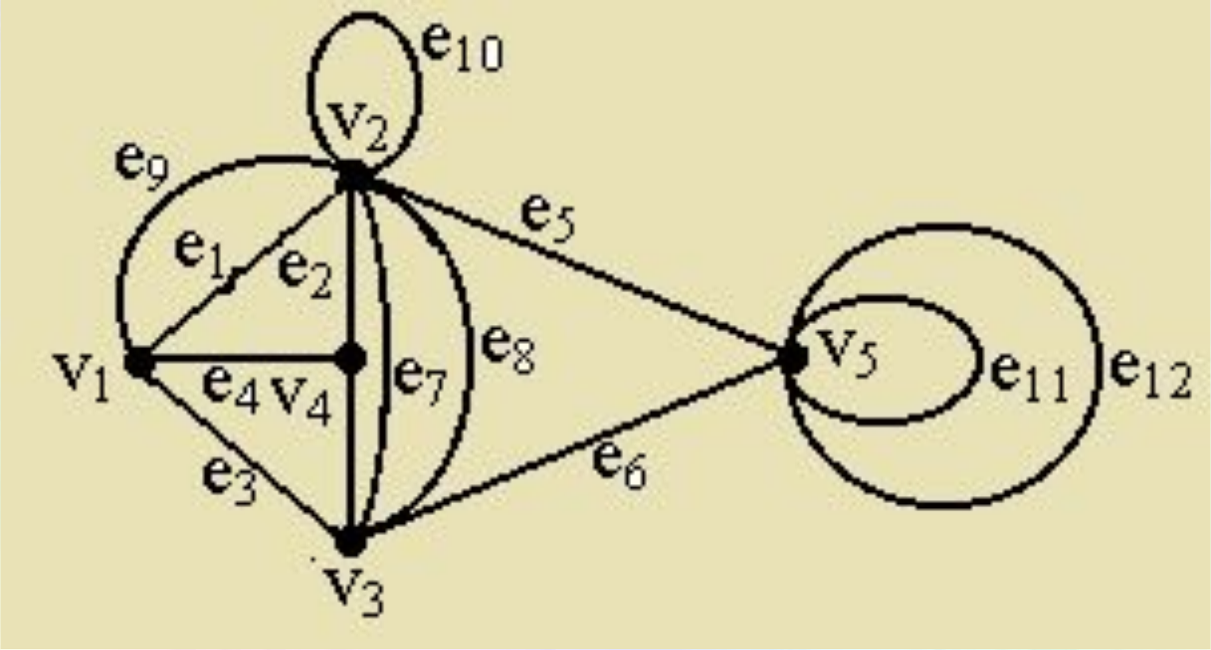


Граф ***G*** с кратными ребрами называется ***мультиграф.***



Виды графов

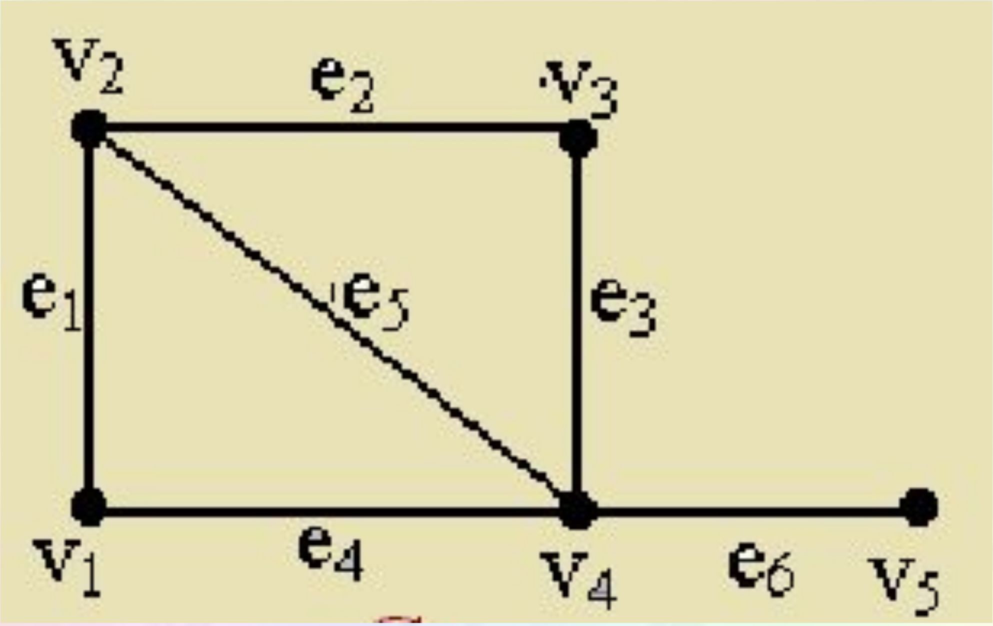
Граф ***G*** с петлями и кратными ребрами называется ***псевдограф***.



Демонстрация

Неориентированный граф

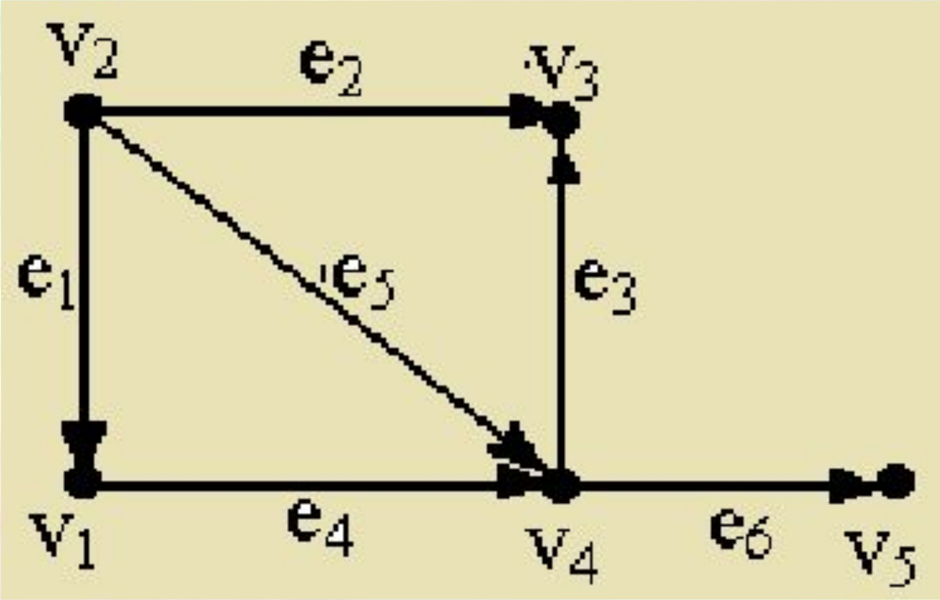
Граф **G**, рёбра которого не имеют определённого направления, называется ***неориентированным.***



Ориентированный граф

Граф **G**, имеющий определённое направление, называется ***ориентированным графом или орграфом***.

Ребра, имеющие направление, называются ***дугами***.



✔Демонстрация

Способы задания графов

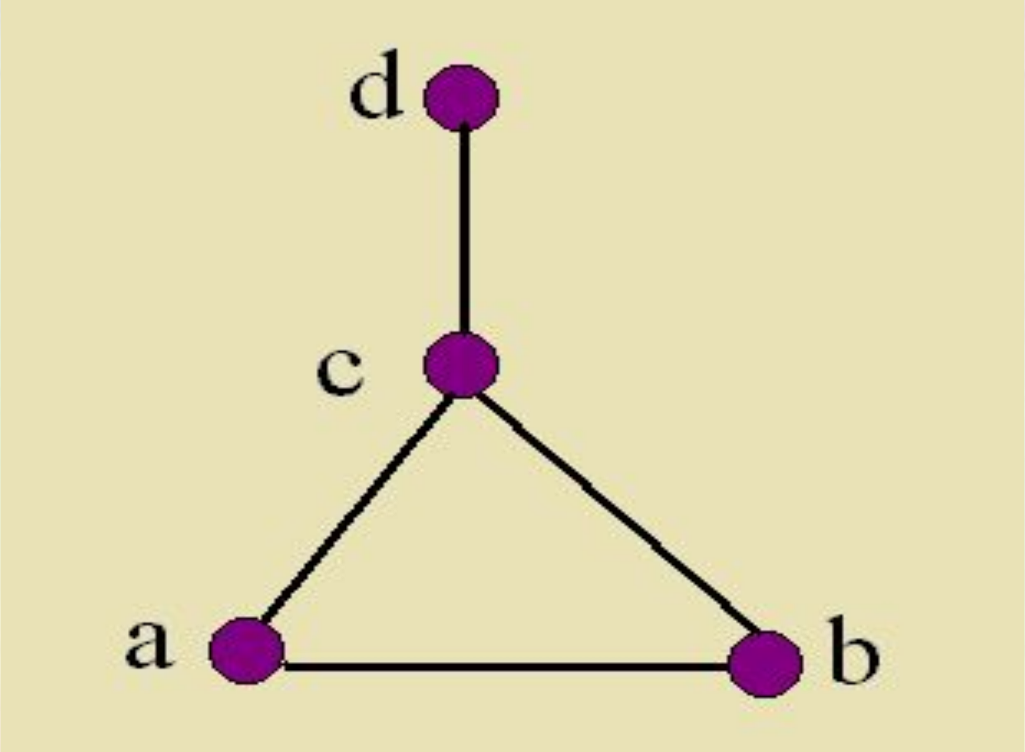
1) Явное задание графа как алгебраической системы.

Чтобы задать граф, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром.

$$\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\}\}$$

Способы задания графов

2) Геометрический.



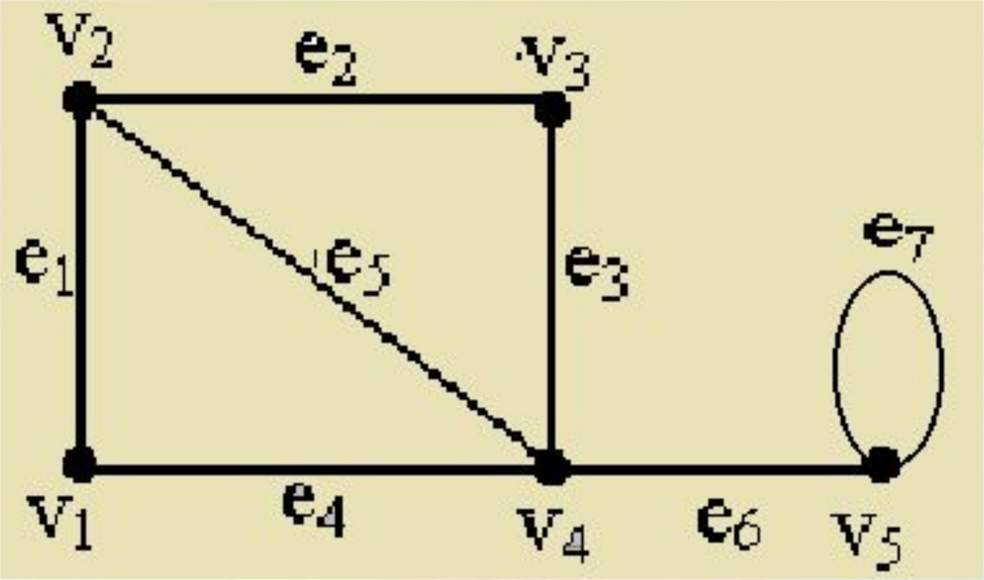
Способы задания графов

3) Матрица смежности.

Элементы A_{ij} матрицы смежности A равны количеству ребер между рассматриваемыми вершинами.

Матрица смежности неорграфа

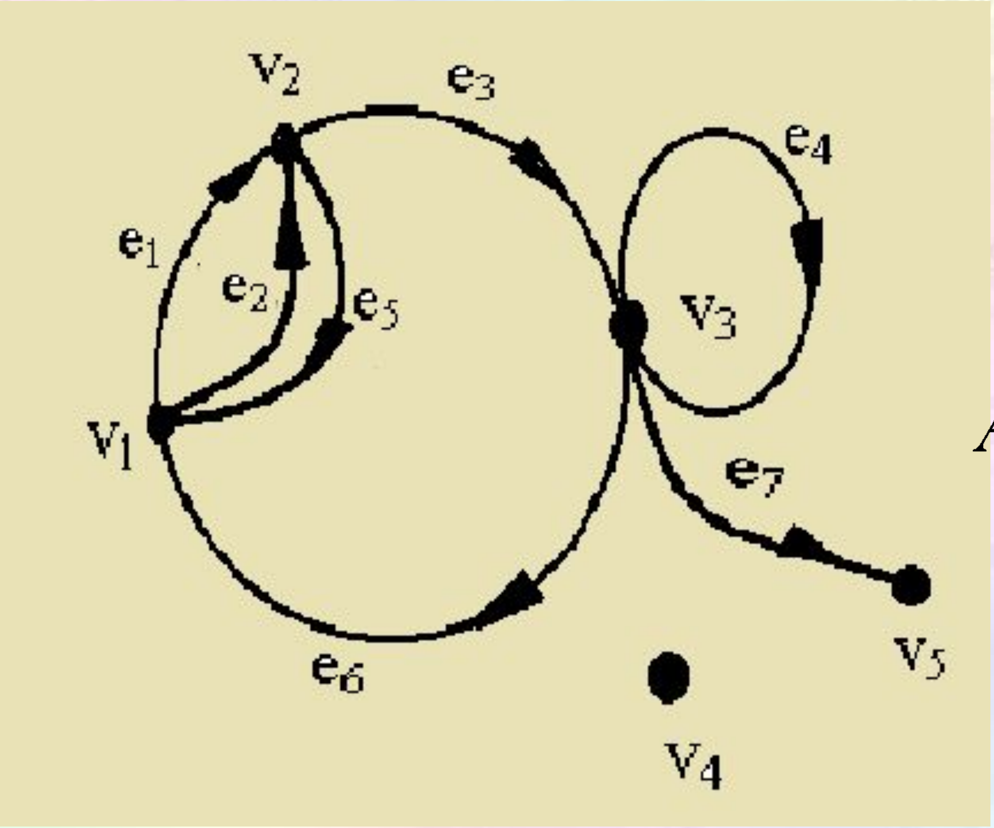
Для неорграфа ***G***, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица смежности орграфа

Для орграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A_0 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Способы задания графов

4) Матрица инцидентности.

Матрица инцидентности B –это таблица, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам.

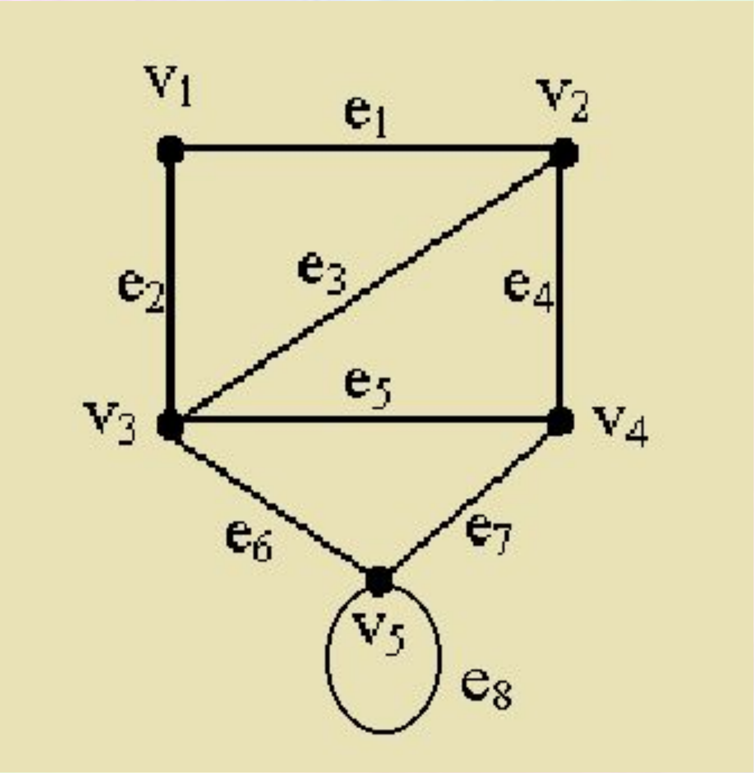
Элементы матрицы определяются следующим образом:

✔Демонстрация

Способы задания графов

1) для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

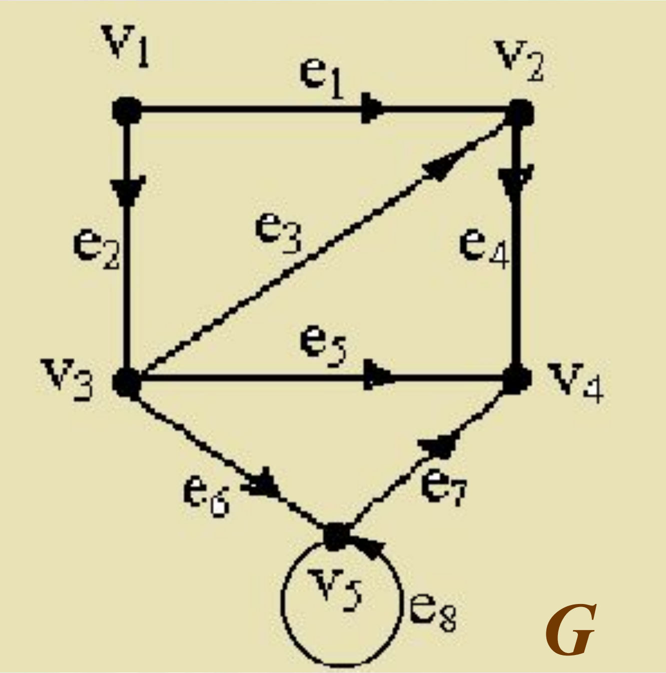


$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица инцидентности орграфа

2) для орграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в вершину } v_i; \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из вершины } v_i; \\ 2, & \text{если ребро } e_j \text{ – петля из вершины } v_i; \\ 0, & \text{если } e_j \text{ и } v_i \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

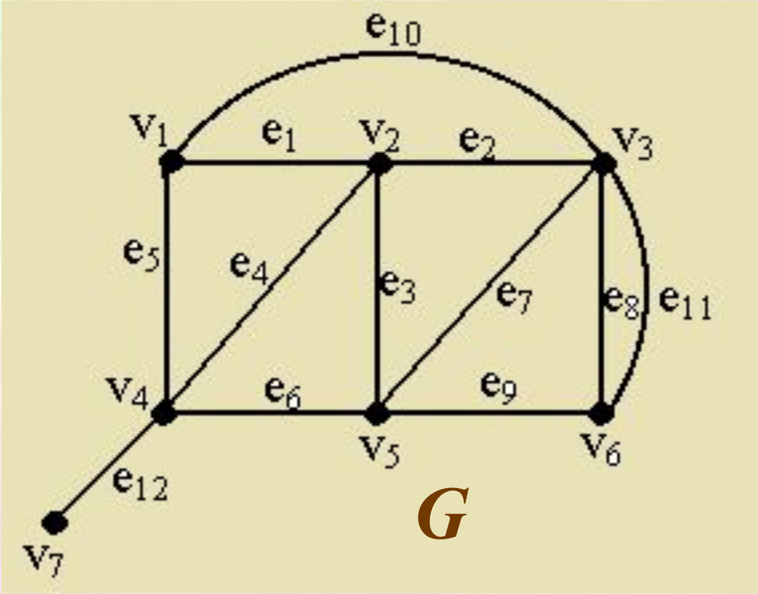
Маршрут

Маршрут в графе $G=(V,E)$ — конечная чередующееся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, которая начинается и заканчивается на вершинах, причем v_{i-1} и v_i являются концевыми вершинами ребра e_i, $1 \leq i \leq k$.

Маршрут

Маршрут называется ***открытым***, если его концевые вершины различны ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6$).

Маршрут называется ***замкнутым***, если его концевые вершины совпадают ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1$).

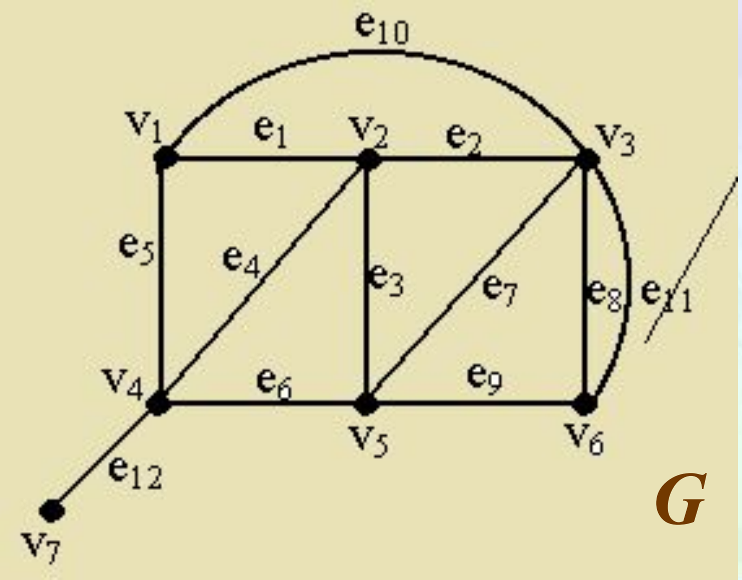


Цепь

Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны.

Цепь называется ***простой***, если ее концевые вершины различны($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3$).

Цепь называется ***замкнутой***, если ее концевые вершины совпадают ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1$).

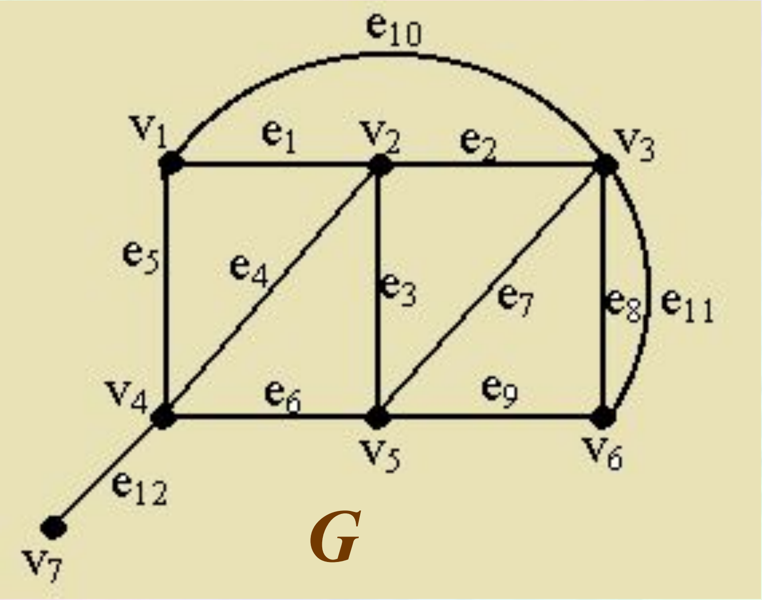


Путь, цикл

Открытая цепь называется ***путем***, если все ее вершины различны (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3).

Цикл – это замкнутая цепь (***простой цикл***, если цепь простая) (v_1,e_1,v_2,e_3,v_5,e_6,v_4,e_5,v_1).

Число ребер в пути называется ***длиной пути***. Аналогично определяется ***длина цикла***.



Свойства путей и циклов

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

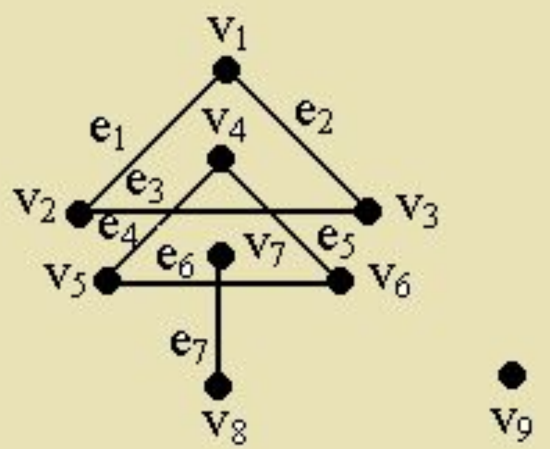
3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

Связность графов, компонента связности

Две вершины v_i и v_j называются ***связанными*** в графе ***G***, если в нем существует путь v_i—v_j. Вершина связана сама с собой.

Граф называется ***связным***, если в нем существует путь между каждой парой вершин.

Компонента связности – максимальный связный подграф в графе.



G

1 компонента связности: $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3\}$

2 компонента связности: $\{v_4, v_5, v_6, e_4, e_5, e_6\}$

3 компонента связности: $\{v_7, v_8, e_7\}$

4 компонента связности: $\{v_9\}$

✔Демонстрация

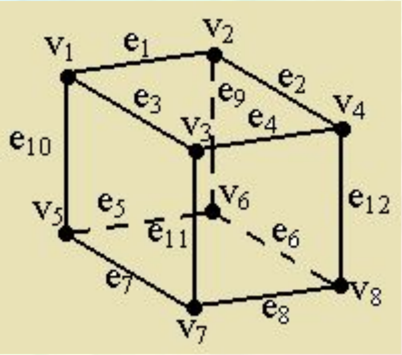
Степень вершины

Степенью $deg(v_j)$ вершины v_j называется число инцидентных ей ребер, т. е. вершин в ее окружении.

Максимальная и минимальная степени вершин графа G обозначаются символами $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно:

$$\Delta(G)=\max_{v\in VG}\deg v \qquad \delta(G)=\min_{v\in VG}\deg v$$

Граф $G=(V,E)$ называется ***регулярным*** или ***однородным*** (степени r), если степени всех его вершин одинаковы. Степенью регулярного графа называется степень его вершин.



Сумма степеней вершин графа

Утверждение («лемма о рукопожатиях»)

Сумма всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in VG} \deg v = 2|EG|$$

Интерпретация леммы: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки,то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала).

Следствие

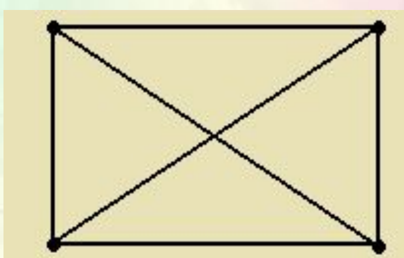
В любом графе число вершин нечетной степени четно

Изоморфизм графов

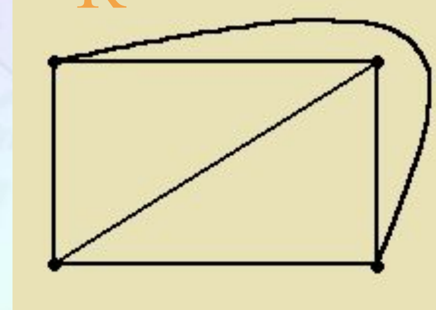
Два графа **G_1** и **G_2** ***изоморфны***, если существует такое взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов **G_1** и **G_2** инцидентны соответствующим вершинам этих графов.

Если граф **G** изоморфен геометрическому графу **G'** в **R^n**, то **G'** называется ***геометрической реализацией*** графа **G** в пространстве **R^n**.

R^3



R^2



Граф ***R^2*** является геометрической реализацией графа ***R^3***

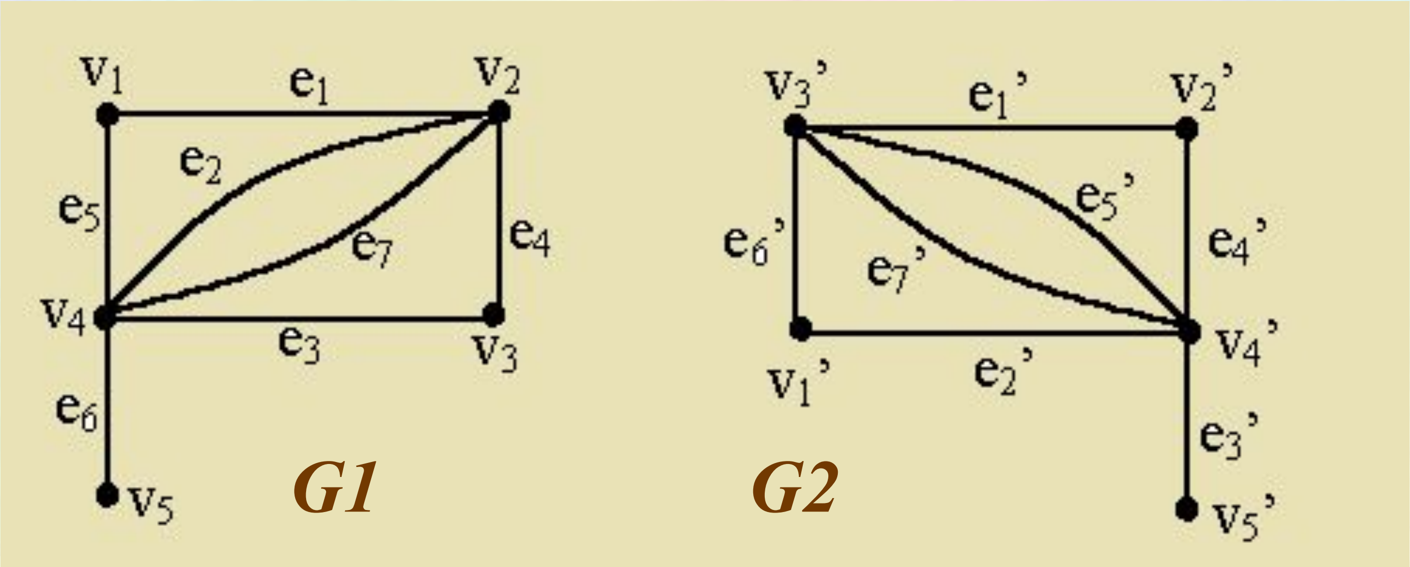
Пример изоморфных графов

Соответствие вершин:

$v_1 \leftrightarrow v_2', v_2 \leftrightarrow v_3', v_3 \leftrightarrow v_1', v_4 \leftrightarrow v_4', v_5 \leftrightarrow v_5';$

Соответствие ребер:

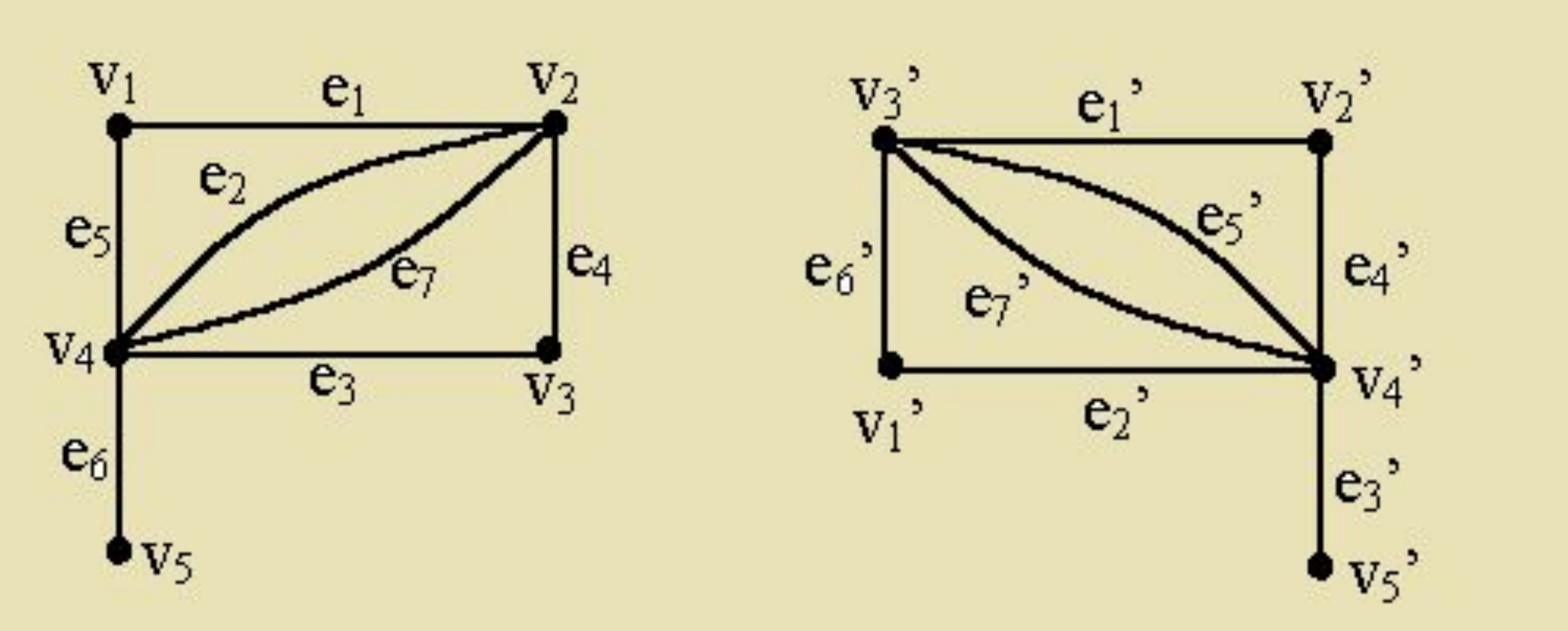
$e_1 \leftrightarrow e_1',\ e_3 \leftrightarrow e_2',\ e_5 \leftrightarrow e_4',\ e_2 \leftrightarrow e_5',\ e_4 \leftrightarrow e_6',\ e_6 \leftrightarrow e_3'.$



G1 и ***G2*** – изоморфные графы

Изоморфизм как отношение эквивалентности на множестве графов

Отношение изоморфизма является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно.



Помеченный и абстрактный графы

Граф порядка *n* называется ***помеченным***, если его вершинам присвоены некоторые метки (например номера ***1, 2, …, n***).

Абстрактный (или ***непомеченный***) граф – это класс изоморфных графов.

Помеченные графы: