Кубанский государственный аграрный университет

Факультет прикладной информатики

Финансовые вычисления по сложным процентам

1. Сущность и формула сложных процентов.
2. Соотношение роста по простым и сложным процентам.
3. Начисление сложных процентов несколько раз в году.
4. Наращение по сложным процентам при дробном количестве периодов начисления.
5. Определение срока, формулы удвоения и правила приближенного счета.

1. Сущность и формула наращения сложных процентов.

В средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга, для наращения применяют, **сложные проценты.**

База для начисления сложных процентов (в отличие от простых) не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени, и процесс роста первоначальной суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как *последовательное реинвестирование средств, вложенных под простой процент на один период начисления.*

Найдём формулу для расчета наращенной суммы при условии, что проценты начисляются и капитализируются один раз в году, т. е. применяется сложная годовая ставка наращения. Очевидно, что в <u>конце первого года</u> проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит:

$S_1 = P(1+i)$,

К концу второго года составит:

$S_2 = S_1(1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$

$S_3 = S_2(1+i) = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$ и т.д.

В конце n-го года наращенная сумма будет равна:

$$S = P(1+i)^n,$$

где: P – первоначальная сумма долга,

S – наращенная сумма,

n – срок, число лет наращения,

i – ставка наращения по сложным процентам,

Величину $1+i$ называют <u>сложным декурсивным коэффициентом</u>.

Величину $q=(1+i)^n$ называют <u>множителем наращения по сложным процентам</u> – он показывает конечную стоимость одной денежной единицы, вложенной под сложные проценты декурсивно. Значения этого множителя для различных значений i и целых чисел n приводятся в таблицах сложных процентов.

Таблица 1 – Множители наращения сложных процентов (извлечения)

Число периодов	Ставки процентов	
	12%	3%
5	1,762341683	
20		1,806111235

Точность расчета множителя в практических вычислениях определяется допустимой степенью округления наращенной суммы (до последней копейки, рубля, тысячи и т.д.), как правило, до последней денежной единицы (обычно в таблицах – шесть знаков после запятой).

Пример:

Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. руб. через пять лет при росте по сложной ставке 12% годовых (проценты капитализируются 1 раз в год).

$S=1000000(1+0,12)^5=1\ 000\ 000\times1,762341683=1\ 762\ 341,68$ руб.

2. Соотношение роста по простым и сложным годовым процентам.

Чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Соотношение множителей наращения по простым и сложным годовым ставкам процентов при одинаковой абсолютной величине ставок зависит от срока ссуды:

- для срока меньше года ($n<1$):

$(1+n\ i)>(1+i)^n$,

- для срока больше года ($n>1$):

$(1+n\ i)<(1+i)^n$,

-для срока равного году ($n=1$):

$(1+ni)=(1+i)^n$, если временная база 365(366) дней.

$(1+ni)<(1+i)^n$ если временная база 360 дней.

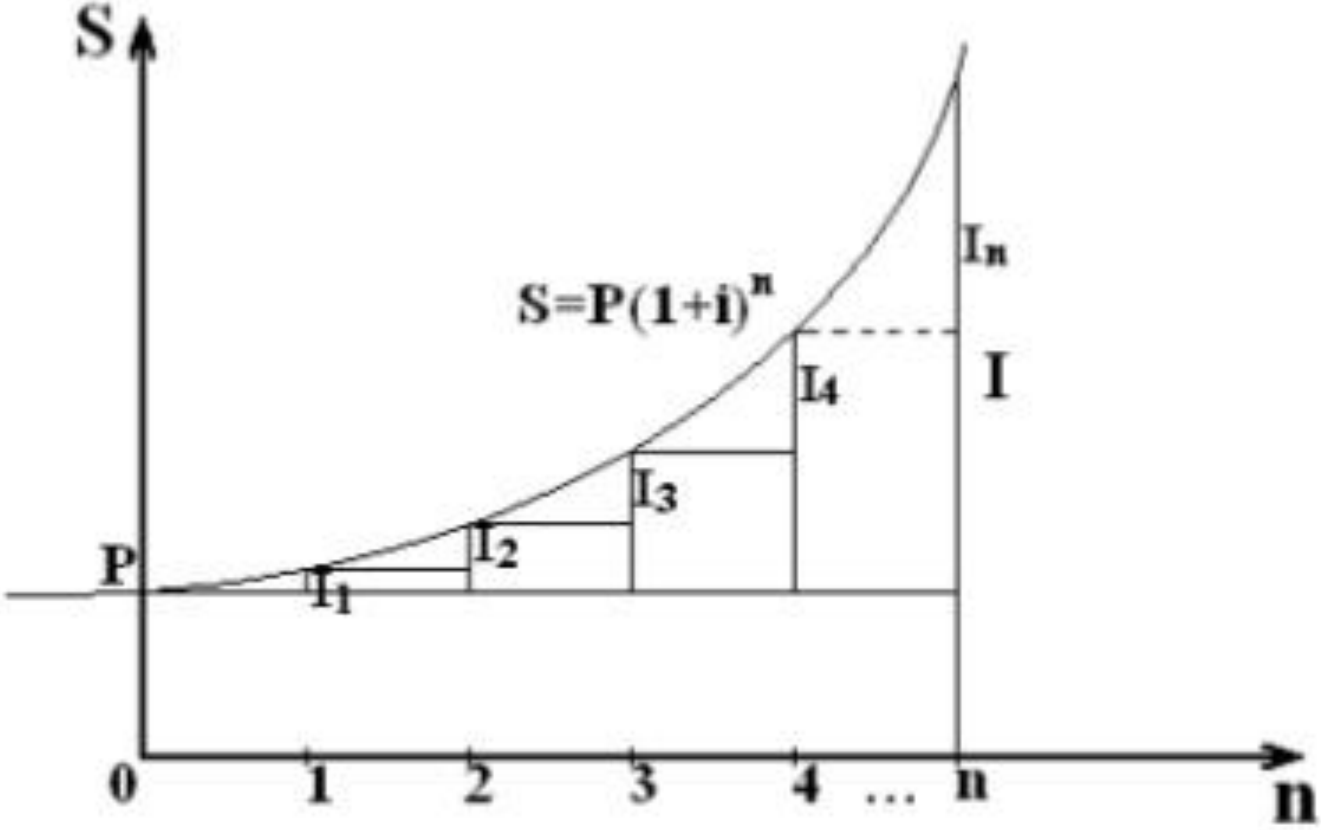
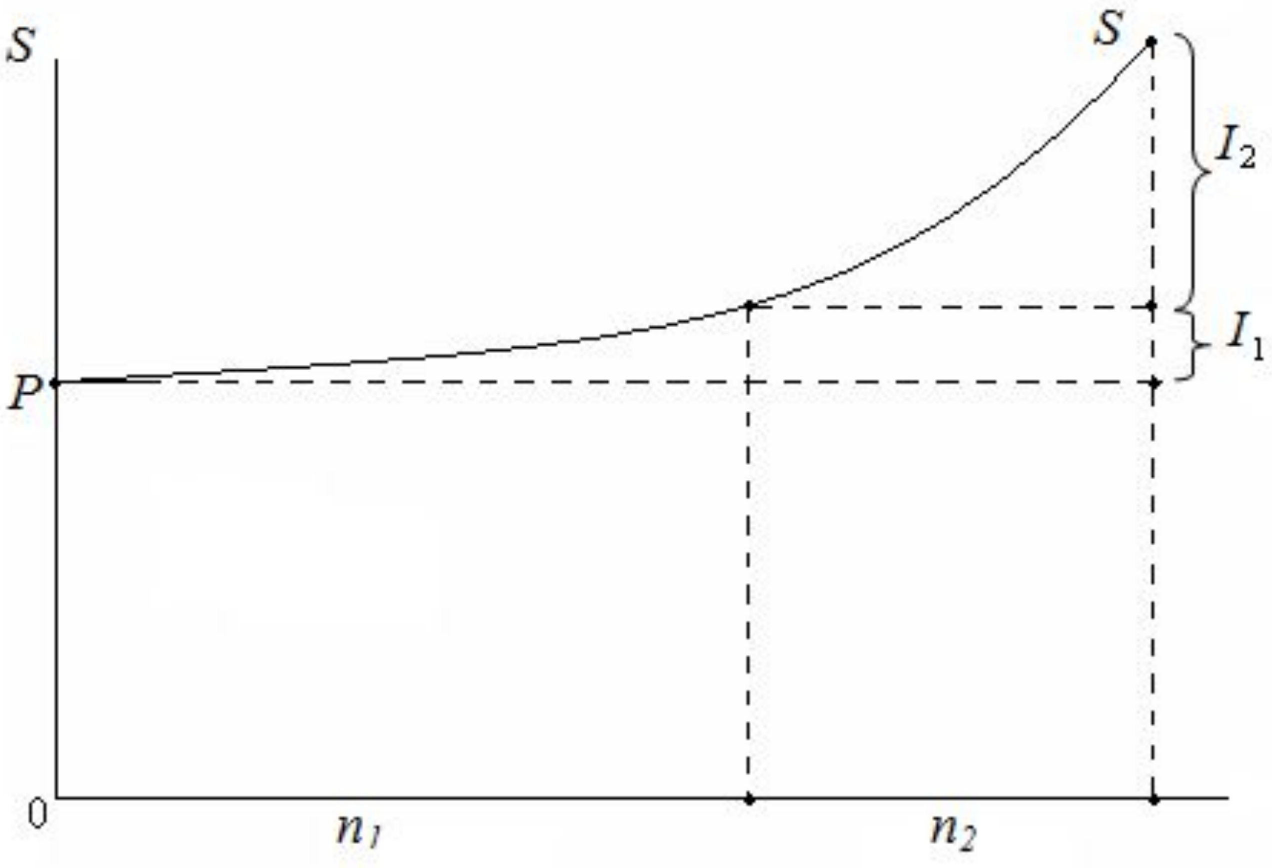
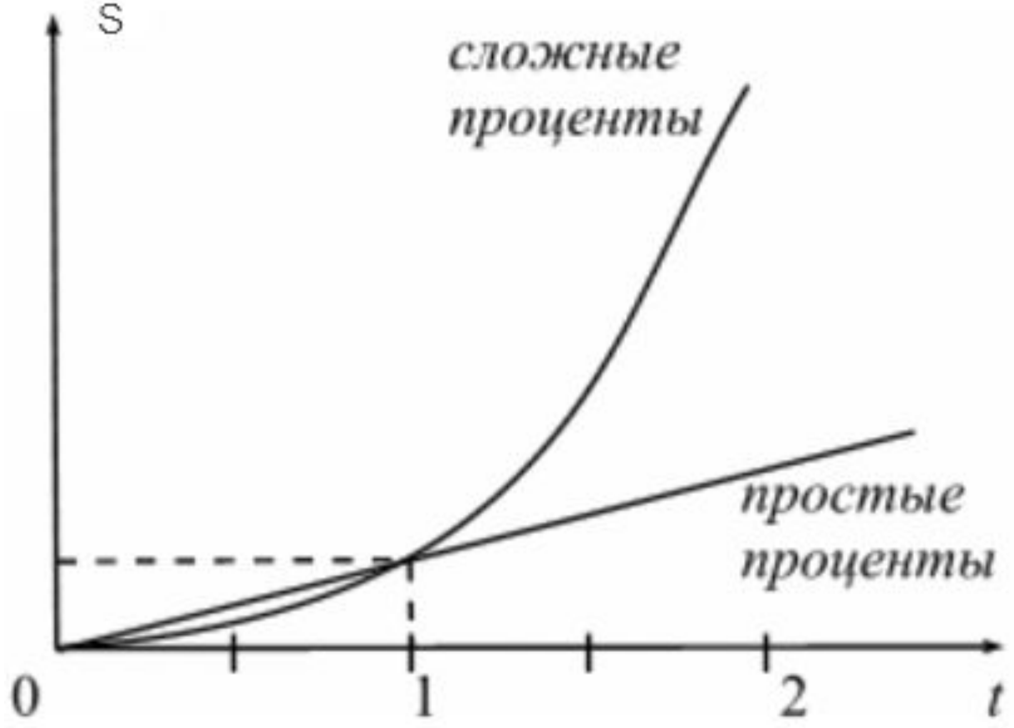


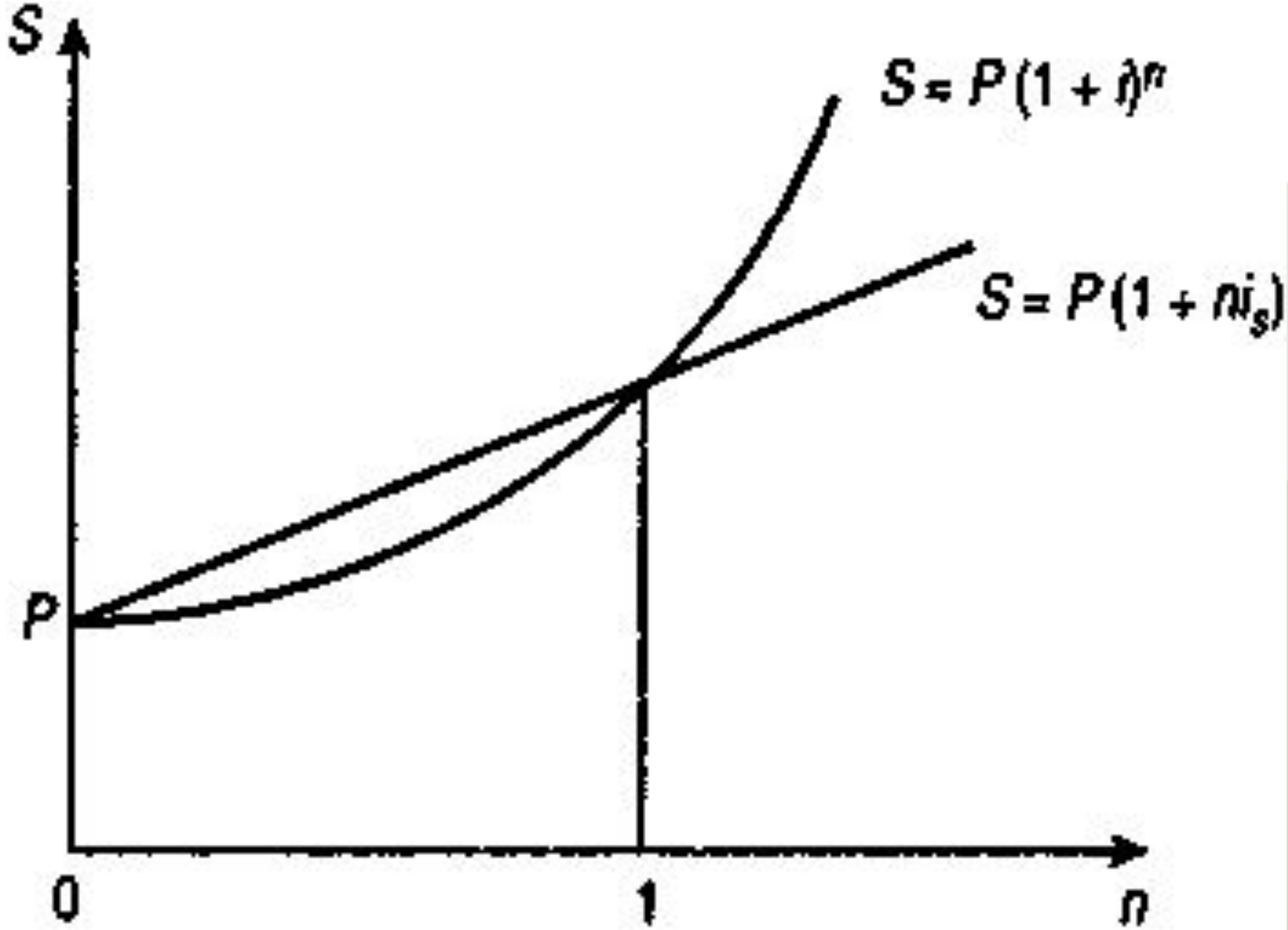
График изменения наращенной суммы в зависимости от времени по ставке сложного процента

Т.е. сумма процентов на каждом шаге расчетов увеличивается, что наглядно показано на рисунке ниже:





Графики роста по простым и сложным процентам



S
S = P (1 + i)^n
S = P (1 + ni_s)
P
0
1
n

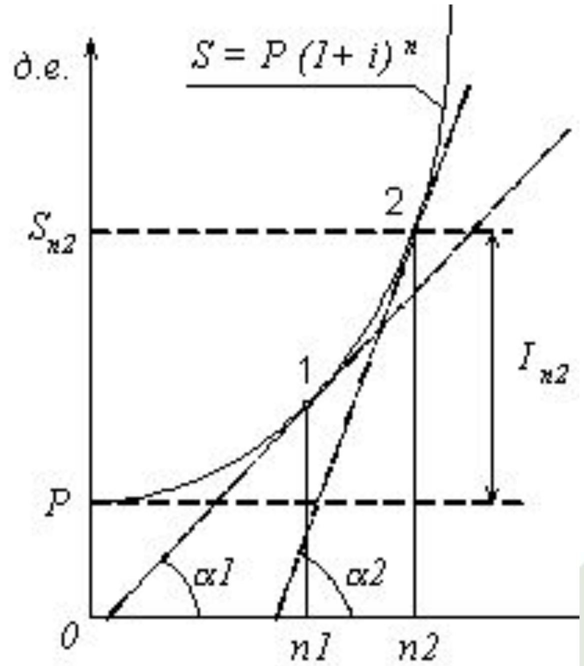


Рисунок - Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам, являющегося степенной функцией

Угол наклона касательной к графику функции так же, как и для графика роста по простым процентам, зависит от базы начисления процентов и процентной ставки. Так как база начисления сложных процентов постоянно растет, то ***растет и угол наклона касательных, соответствующих большему значению времени***.

Угол наклона касательной $a_1 < a_2$, так как момент времени $n_1 < n_2$.

Влияние уровня процентной ставки на результат наращения

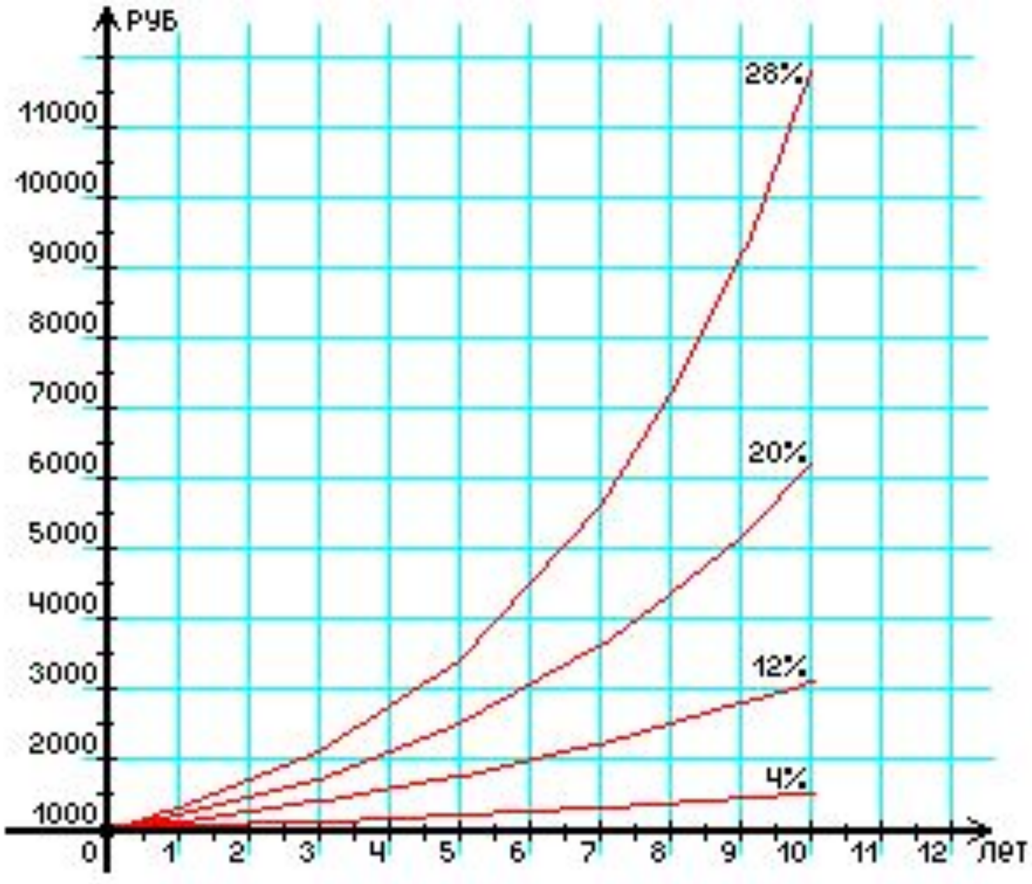


Таблица 2 - Сравнение множителей наращения простых и сложных процентов (i=12%)

Множители наращения	30 дней	Срок 180 дней	Ссуды		
			1 год	5 лет	10 лет
1+ni	1,01644	1,05918	1,12	1,6	2,2
$(1+i)^n$	1,00936	1,05748	1,12	1,76234	3,1058

3. Начисление сложных процентов несколько раз в году.

В современных условиях проценты капитализируются обычно не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам и т.д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов.

Формула $S=P(1+i)^n$ получена для годовой процентной ставки и срока, измеряемого в годах. Однако, её можно применить и при других периодах начисления.

В этих случаях:

i - ставка за период начисления,

n - число таких периодов.

Если i-ставка за полугодие, то n-число полугодий,

Если i-ставка за квартал, то n-число кварталов и т.д.

Пример:

Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. руб. через пять лет при росте по сложной ставке 12% годовых (проценты капитализируются ежеквартально).

$$S=P(1+i)^n,$$

где i- ставка наращения за квартал,

n- число кварталов.

$i=12:4=3\%$, т. е.0,03

$n=5\times4$кв.=20 кварталов

$S=1000000(1+0.03)20=1000000\times1{,}806111235=1806111{,}24$ руб.

На практике, как правило, в контрактах фиксируется не ставка за период, а годовая ставка, и одновременно указывается период начисления процентов, как в предыдущем примере «12% годовых с поквартальным начислением процентов».

Пусть годовая ставка равна j, а число периодов начисления в году равно m.

Таким образом, каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют **номинальной.**

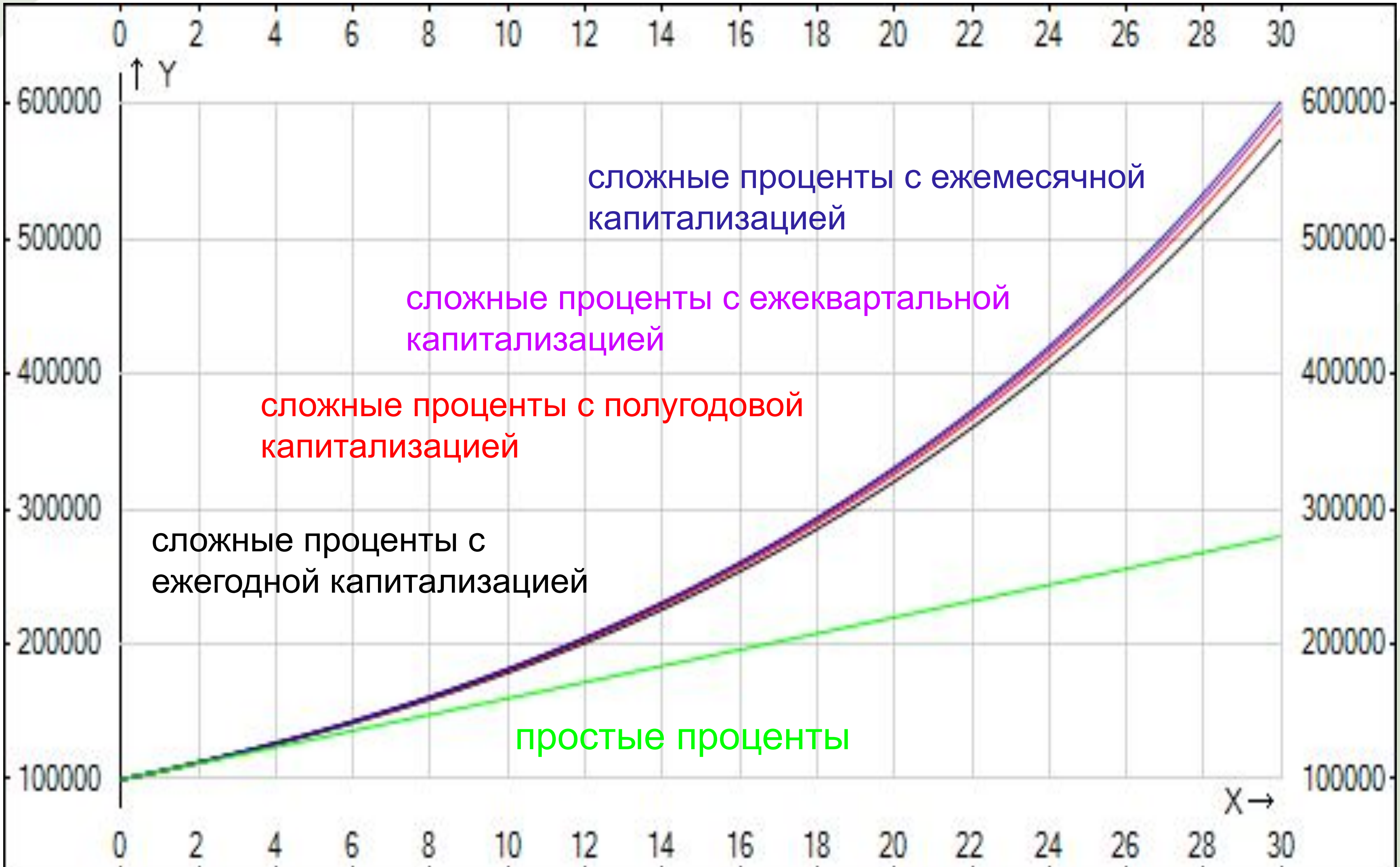
Формула наращения примет вид:

$$\mathbf{S=P\ (1+j/m)^{N},}$$

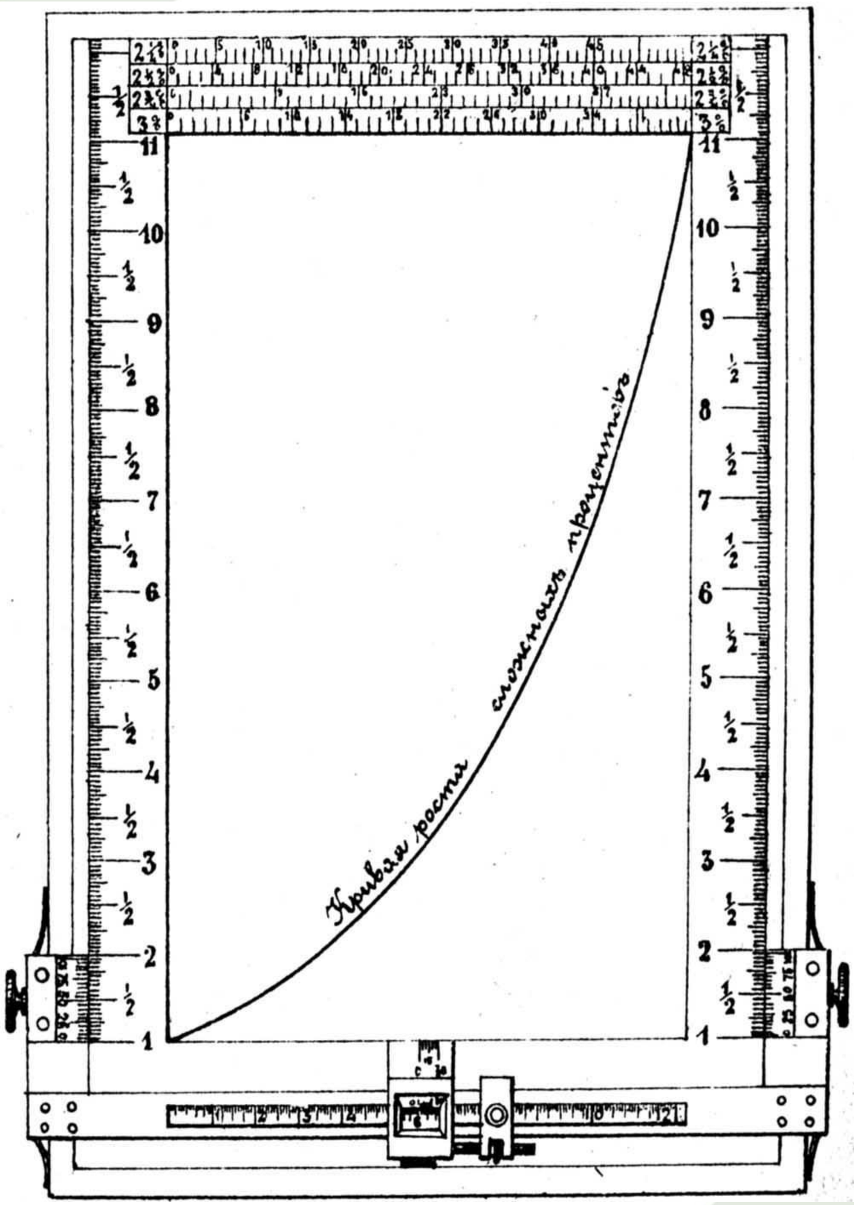
где m – число периодов начисления в году,

j – номинальная годовая ставка,

N – общее количество периодов начисления ($N=m\times n$)



Графики роста денежных сумм, вложенных под 6 % годовых



Счеты А.П. Пелёнкина

В 1891 г. общественный деятель и автор книг по бухгалтерскому учету Андрей Платонович Пелёнкин выпустил книгу «Новый прибор «счеты сложных процентов», а через два года еще одну, «Применение «счетов сложных процентов» к определению логарифмов чисел и чисел по их логарифмам», на ту же тему.

Андрей Платонович Пелёнкин, черноморский казак, уроженец Азовского уезда, окончив Артиллерийскую Михайловскую академию работал техником на Сестрорецком заводе, позже "был призван к сооружению на Васильевском острове казенного патронного завода". После отставки поступил на службу в Дворянский банк, а позже "на Государственную службу по министерству финансов на должность фабричного инспектора в Петербурге". Опубликовал работы о закалке стали, а также книгу "Рациональная теория бухгалтерских счетов», состоя в отставке напечатал 2 работы: о неверности 2-го закона Киргофа и **о вычислении сложных процентов и срочных уплат**. Умер в 1907 г. Источник: histpol.pl.ua. Умер в 1907 г. Источник: histpol.pl.ua›pages/content.php…

Пеленкин, Андрей Платонович , черноморский казак, уроженец Азовского уезда. Окончив унтер-офицерский специальный класс Петровского Полтавского кадетского корпуса перешел в 3 специальный класс Михайловского артиллерийского училища [Константиновского военного училища], по окончании которого прямо перешел в Михайловскую артиллерийскую академию и окончил техническое ее отделение по 1 разряду. По окончании академии поступил на службу техником на Сестрорецкий оружейный завод, где показал себя талантливым и трудолюбивым работником. В это время напечатал в оружейном сборнике первые свои труды о закалке стали и о производительности работы новых автоматических станков при выделке ручного оружия. Через 2 года службы своей на Сестрорецком оружейном заводе, Андрей Платонович, как талантливый артиллерист, был призван к сооружению на Васильевском острове казенного патронного завода, который настолько хорошо устроил и организовал там все работы, что на этот завод были командированы из Франции молодые артиллеристы, для обучения патронному делу.

К этому времени относится напечатанная его работа — о цельнотянутых латунных патронных гильзах.

В начале 70-х годов, по прискорбным причинам, Андрей Платонович вынужден был оставить военную службу и несколько времени жил в Перми и Варшаве, а затем, в конце 70-х годов, вновь возвратился в Петербург и поступил на службу в Дворянский банк, откуда вскоре вышел в отставку.

Состоя в отставке Андрей Платонович напечатал 2 работы: о неверности 2-го закона Киргофа и **о вычислении сложных процентов и срочных уплат**.

В 80-х годах Андрей Платонович снова поступил на Государственную службу по министерству финансов на должность фабричного инспектора в Петербурге, в каковой и оставался до самой смерти.

Во время службы фабричным инспектором он напечатал несколько статей по поводу расчетов страховых обществ с клиентами. Благодаря своим выдающимся способностям и наблюдательности, Андрей Платонович быстро ориентировался в каждом техническом вопросе и, анализируя условия его, находил те практические пути и приемы, которые всегда приводили его к верному успеху.

Его прямая и честная натура не терпела никаких сделок с совестью; единственным путем для приобретения средств к жизни неизменно служил ему честный труд, которому всецело преданный, Андрей Платонович оставался верным до гробовой доски.

4. Наращение по сложным процентам при дробном количестве периодов начисления.

Для случаев, когда n не является целым числом, множитель наращения определяется двумя способами:

1. на основе **общего метода**:

$$(1+i)^n=(1+i)^{n_a}(1+i)^{n_b} \qquad (3)$$

2. на основе **смешанного (комбинированного) метода**:

$$(1+i)^n=(1+i)^{n_a}(1+n_b i), \qquad (4)$$

т. е. за целое количество периодов начисления – по сложной ставке, за дробную часть – по простой процентной ставке.

Где $n=n_a+n_b$

n_a- целое число периодов,

n_b- дробная часть периода.

При выборе метода расчета множителя наращения следует иметь в виду, что величина множителя наращения по второму способу больше, чем по первому: $(1+i)^{n_a}\ (1+n_b i\ (1+i)^{n_a}\ (1+i)^{n_b}$

В практике некоторых финансовых организаций предусматривается начисление процентов только за целые периоды начисления.

Пример:

Кредит в размере 30 тыс. руб. выдан на срок 3 года и 160 дней под 6,5% годовых, проценты начисляются 1 раз в год.

Если предусмотрен смешанный метод начисления процентов

$S = 30000 \times (1 + 0{,}065)^3\ (1 + 160:365 \times 0{,}065) = 37271{,}04$ руб.

$$S = P(1+i)^{n_a}\,(1+i)^{n_b} = 30000(1+0{,}0065)^3(1+0{,}065)^{169/365} = 37252{,}8$$

Если проценты начисляются только за целые периоды начисления, то

$S = 30000 \times 1{,}065^3 = 36234{,}49$

Общий метод, несмотря на свою формальную правомерность с математических позиций, с точки зрения сущности начисления процентов является приблизительным. Погрешность вычислений будет тем больше, чем больше значения входящих в формулу величин. Этот метод дает меньший, чем в действительности результат.

При внимательном рассмотрении можно увидеть, что ***на практике обычно используется смешанный метод***, поскольку капитализация процентов до истечения срока реинвестирования производиться не может. Тем не менее, даже в солидных изданиях можно встретить изложение и того, и другого методов. Здесь уместно вспомнить слова великого Эйнштейна: «Математика – единственный совершенный метод, позволяющий провести самого себя за нос».

5. Определение срока, формулы удвоения и правила приближенного счета («правило 69», «правило 70», «правило 71», «правило 72»,)

Альберт Эйнштейн назвал исчисление сложного процента роста доходов «величайшим математическим открытием в истории человечества».

Как определить, когда ваши деньги вырастут в 2 раза?

ПРАВИЛО 72.

Чтобы определить, за какое время количество ваших денег удвоится, можно воспользоваться так называемым **«правилом 72»**. Просто **разделите число 72 на процентную ставку.** Например, если вы вложили деньги под 8% годовых, разделив 72 на восемь, вы получите число девять. Это значит, что вам понадобится девять лет, чтобы удвоить свой вклад при годовой ставке в 8%.

Кто-то подсчитал, что один доллар, вложенный под 3 % во времена Христа, сейчас стоил бы половину всех имеющихся в мире денег.

24 доллара, выплаченные голландцами местным индейцам за остров Манхэттен, если бы их положили в то время под 5 % годовых, сегодня стоили бы более 2,2 миллиарда долларов.

Правило семидесяти (правило 70), правило 72, правило 69 — простой способ (приближённой) оценки срока, в течение которого величина вырастет вдвое при постоянном росте на некоторый процент.

Согласно «правилу семидесяти» $T \approx \frac{70\%}{r}$

где r — годовая ставка инфляции,

T — срок (в годах) удвоения цен.

Из формулы наращения по сложным процентам

$S=P\ (1+i)^n$ выразим срок n.

Разделим обе части уравнения на P:

$$S/P = (1+i)^n .$$

Пролагорифмируем обе части уравнения, получим:

$$n=\log_{1+i}(S/P).$$

При использовании натуральных логарифмов получим:

$$\ln(S/P) = n\ln(1+i)$$

$$n = \ln(S/P) / \ln(1+i)$$

При малых значениях i значение

$$\ln(1+i) \approx i$$

Поэтому $n \approx \ln(S/P):i$

При $S/P = 2$ имеем $\ln \approx 0{,}7\ (0{,}693147)$, поэтому

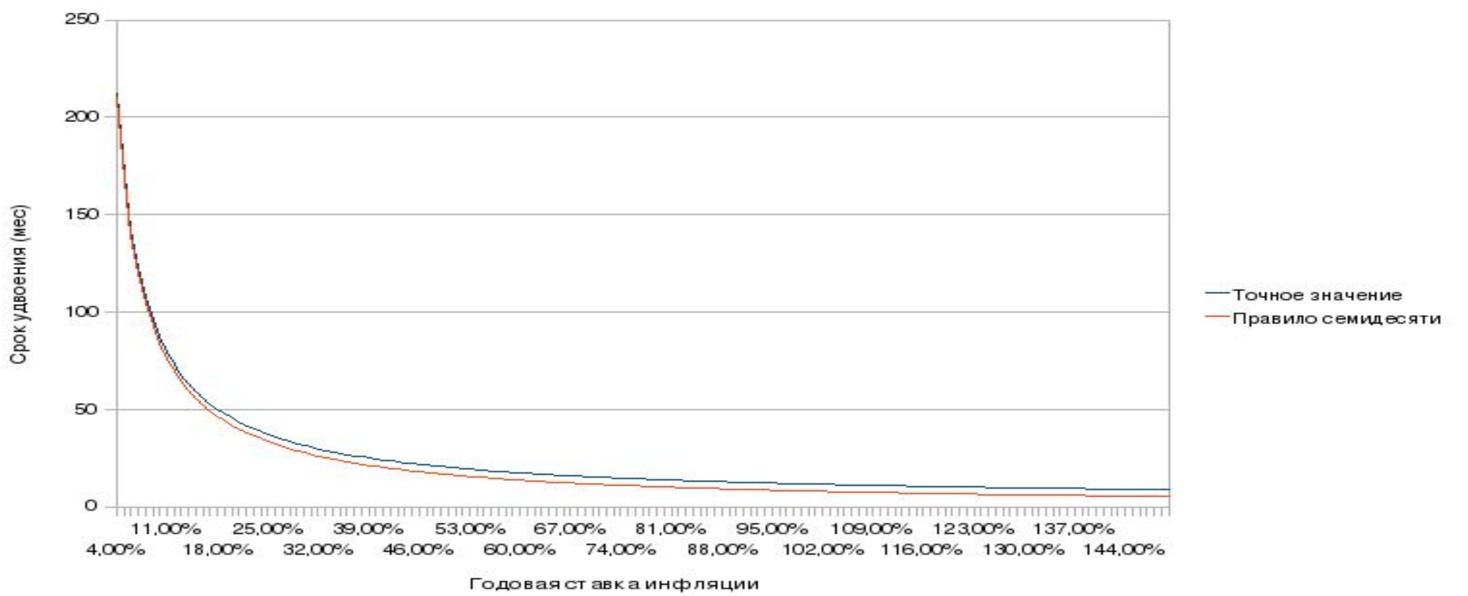
$$n \approx 70:i$$

«Правило семидесяти» является аппроксимацией посредством гиперболы точной формулы $T = \log_{1+r} 2$

$$T \approx \frac{\ln 2}{r} \qquad \ln 2 \approx 0{,}693147$$

Поэтому наиболее точным при использовании малых процентов среди целых чисел является числитель 69. Вместо 70 % также используются числа от 69 % до 72 %. Таким образом, упоминаются «правило 69», «правило 70», «правило 71», «правило 72».

Две кривые, задаваемые этими функциями, достаточно хорошо совпадают (см. рисунок).



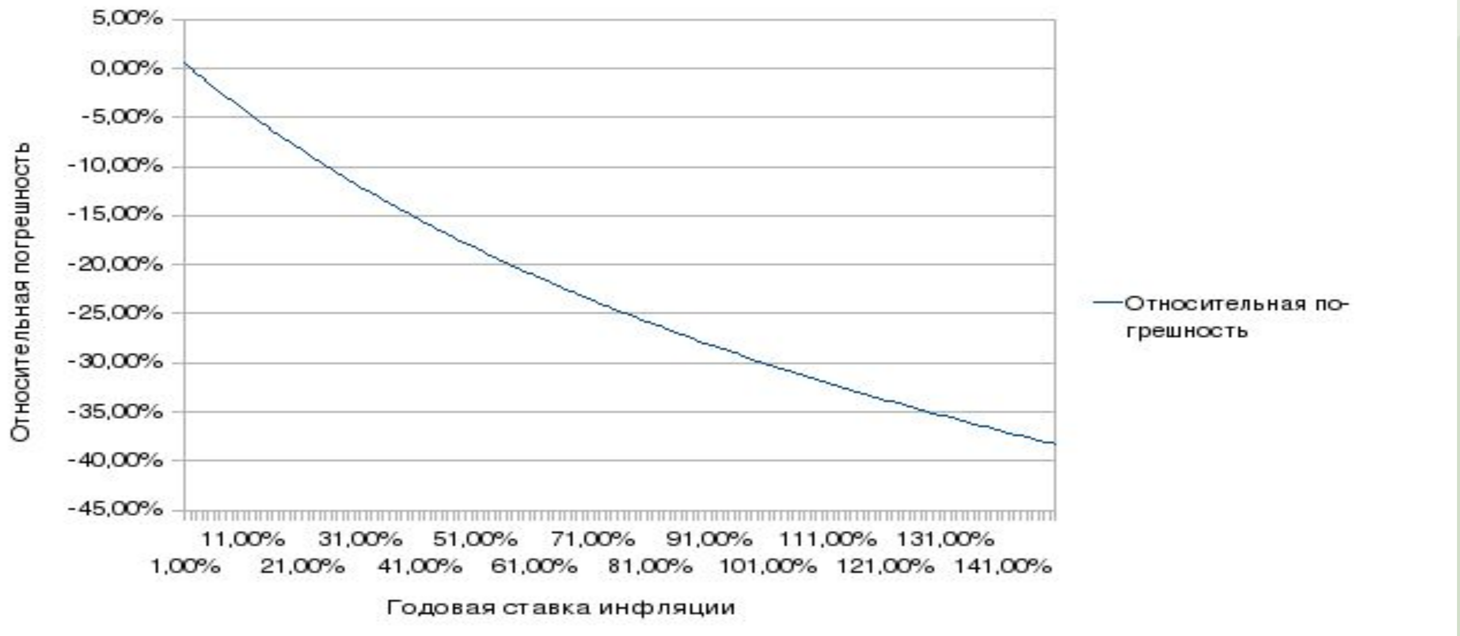
Множитель **72 имеет большое количество делителей**, **соответствующих малым процентам (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12)** и потому более удобен для использования в качестве делимого по сравнению с более точным значением 69 и более лёгким для запоминания значением 70. По этой причине правило используется как в виде «Правило 70», так и «Правило 72» (но и также «Правило 69»).

Первое упоминание о правиле содержится у Луки Пачоли в его математическом труде "Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности» (1494 г.). Пачоли не приводит расчёт и не объясняет данное правило, что позволяет сделать вывод о том, что оно было известно и ранее.

Абсолютная погрешность при использовании «правила семидесяти» не превышает четырёх месяцев, если только годовое значение инфляции не превышает 1,01%.

При ставке 2% точная формула и «правило семидесяти» дают идентичные результаты.

Относительная погрешность начиная со ставки 2 % и выше непрерывно растёт, достигая 9,86% при ставке 25% .



Правило семидесяти может использоваться не только для оценки инфляции, но также для любых других процессов.

Примеры использования :

- ✔Оценка срока, в течение которого цены упадут вдвое в результате дефляции, если за год они падают на определенное значение процентов.
- ✔Оценка срока, в течение которого ВВП удвоится при заданном темпе экономического роста.
- ✔Оценка срока, в течение которого удвоится вклад в банке при заданной процентной ставке.
- ✔Закон радиоактивного распада: за тысячелетие количество радиоактивного материала в слитке падает на определенное значение процентов. Через какое время количество радиоактивного материала сократится вдвое?

Срок при этом не обязательно исчисляется в годах; нужно только, чтобы коэффициент говорил об изменении величины за ту же единицу времени, в каких измеряется период удвоения .

Кроме того, величина может *уменьшаться* на за единицу времени. Тогда, конечно, оценивается срок не удвоения величины, а уменьшения её вдвое.

Кубанский государственный аграрный университет

Факультет прикладной информатики

Спасибо за внимание

Кафедра экономической кибернетики

Бурда Алексей Григорьевич