

**Кубанский государственный технологический университет**

**Институт информационных технологий и безопасности**

**Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности**

**Учебная дисциплина**

**Электротехника и электроника**

**Практическое занятие № 5**

**Анализ и расчет электрических цепей при несинусоидальных воздействиях**

## Учебные вопросы:

1. Основные определения и примеры несинусоидальных колебаний в электрических цепях
2. Временной и спектральный анализ несинусоидальных колебаний в цепях переменного тока
3. Определение действующих значений несинусоидальных энергетических величин

## Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Страков С.В. **Основы теории цепей**: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 2004 г, с. 19 – 71.

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. **Основы теории электрических цепей и электроники**: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 7 –79.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. **Электротехника**: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 22 – 81.

# 1. Основные определения и примеры несинусоидальных колебаний в электрических цепях

Периодическими несинусоидальными колебаниями называются токи (напряжения), изменяющиеся по времени по периодическому несинусоидальному закону

Режимы работы электрических цепей при которых возникают несинусоидальные токи или напряжения

4 режима работы

1. Источник электрической энергии вырабатывает несинусоидальную ЭДС или ток, а все элементы ЭЦ являются линейными (линейные ЭЦ)

2. Источник электрической энергии вырабатывает синусоидальную ЭДС или ток, но хотя бы один из элементов ЭЦ является нелинейным (нелинейные ЭЦ – катушка со стальным сердечником, выпрямители)

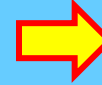
3. Источник электрической энергии вырабатывает несинусоидальную ЭДС или ток, а в ЭЦ входят нелинейные сопротивления (НЭЦ)

4. Источник электрической энергии вырабатывает постоянную или синусоидальную ЭДС или ток, а один или несколько элементов ЭЦ изменяют свои параметры в процессе работы (параметрические ЭЦ)

Источник энергии



Причина несинусоидальности



Нагрузка ЭЦ

При рассмотрении периодических несинусоидальных колебаний обычно пользуются математическим аппаратом - **рядом Фурье**.

**Любая периодически изменяющаяся величина может быть представлена в виде суммы постоянной составляющей и ряда синусоидальных составляющих с кратными частотами**

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{ik})$$

**Постоянная составляющая**

**Амплитуда  $k$ -й гармоники**

**Угловая частота  $k$ -й гармоники**

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot T$$

**Угловая частота первой (основной) гармоники**

**Гармоника - синусоидальная составляющая несинусоидального колебания**

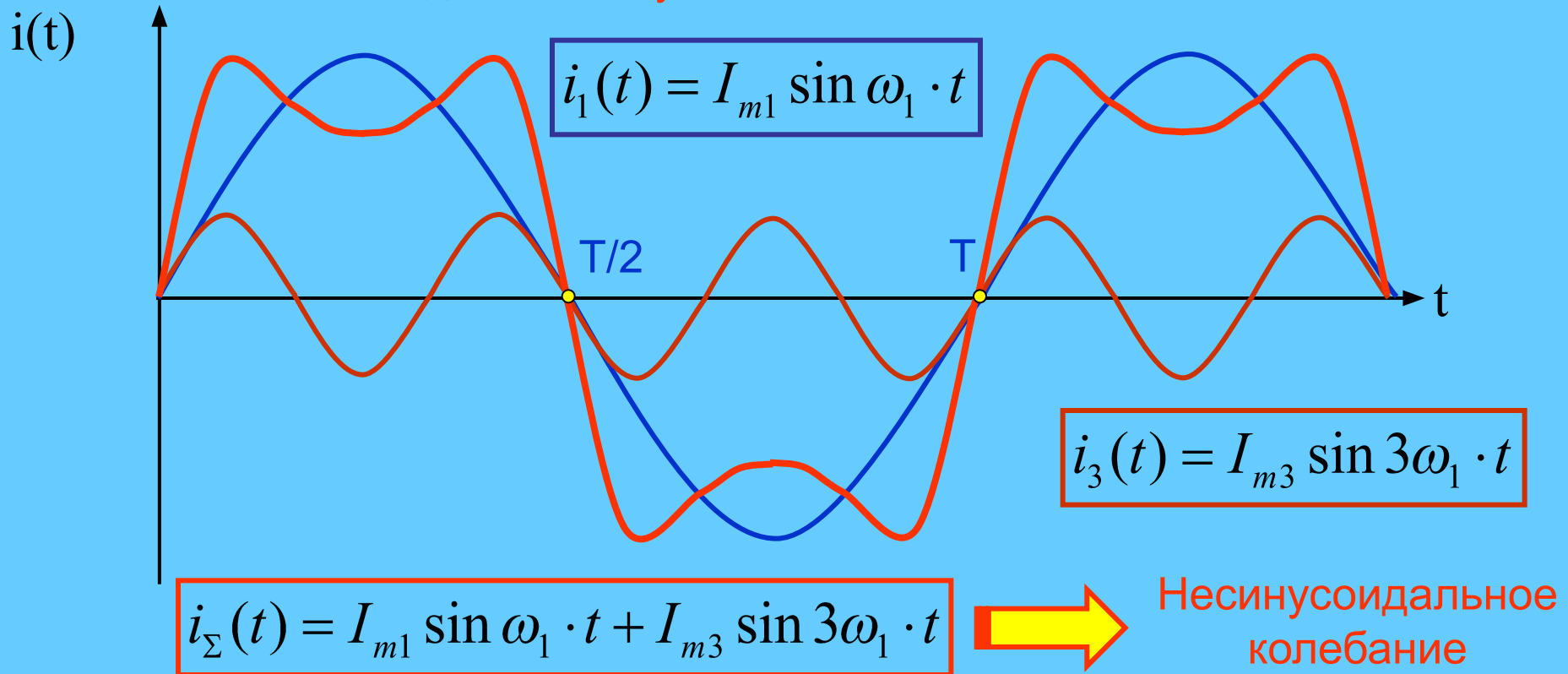
$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{uk})$$

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{ek})$$

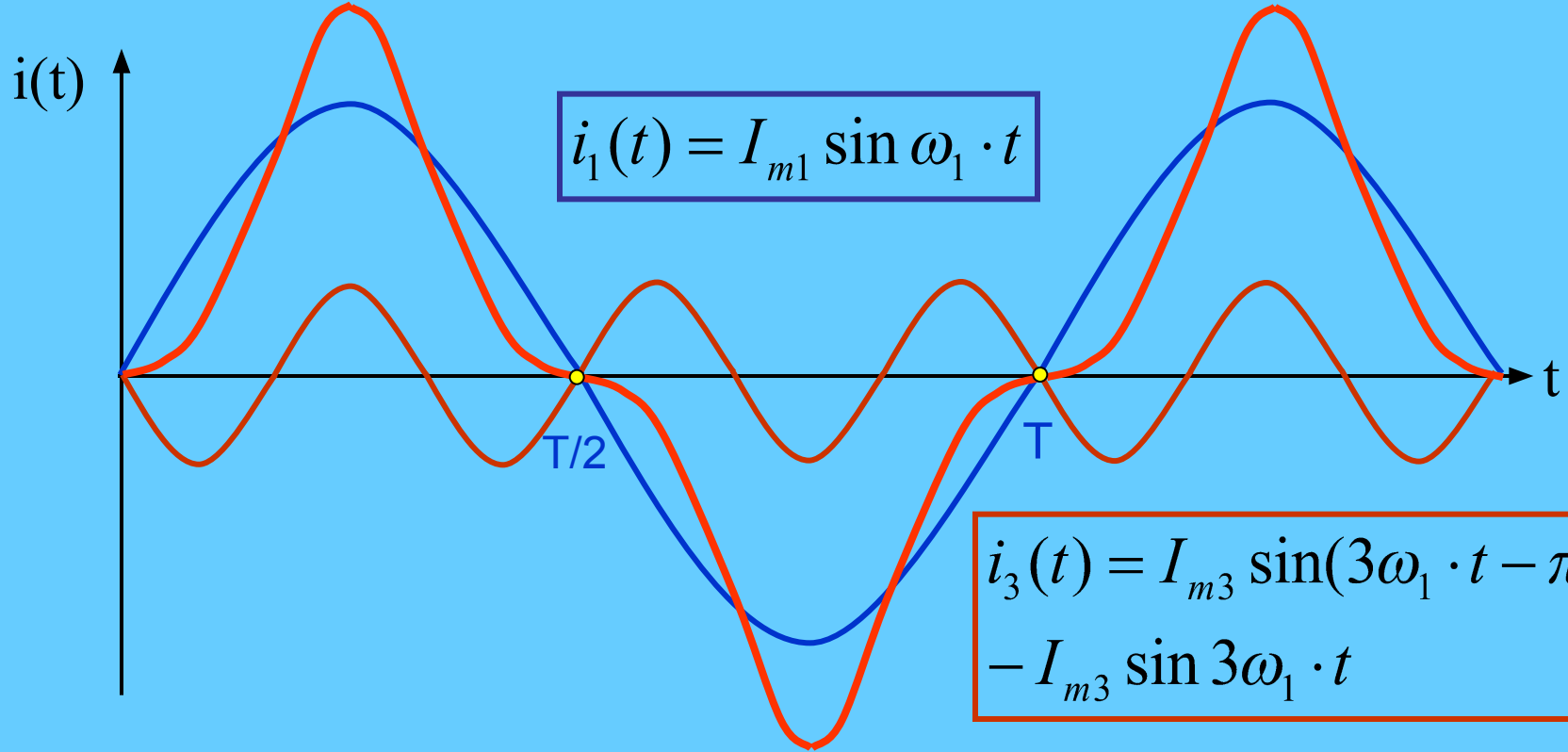
Аналитическое выражение несинусоидальной периодической функции (например - тока), можно записать и так

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_{i1}) + I_{m2} \sin(2 \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{i2}) + I_{m3} \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{i3}) + \dots + I_{mk} \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_{ik})$$

Таким образом, сложение синусоидальных колебаний (гармоник) с различными частотами и разными начальными фазами дает несинусоидальное колебание



$$i_{\Sigma}(t) = I_{m1} \sin \omega_1 \cdot t - I_{m3} \sin 3\omega_1 \cdot t$$



$$i_1(t) = I_{m1} \sin \omega_1 \cdot t$$

$$i_3(t) = I_{m3} \sin(3\omega_1 \cdot t - \pi) = -I_{m3} \sin 3\omega_1 \cdot t$$

Несинусоидальные периодические колебания, которые встречаются на практике, являются **симметричными колебаниями относительно:**

❖ оси абсцисс (оси времени):

❖ оси ординат (оси величины):

❖ начала координат

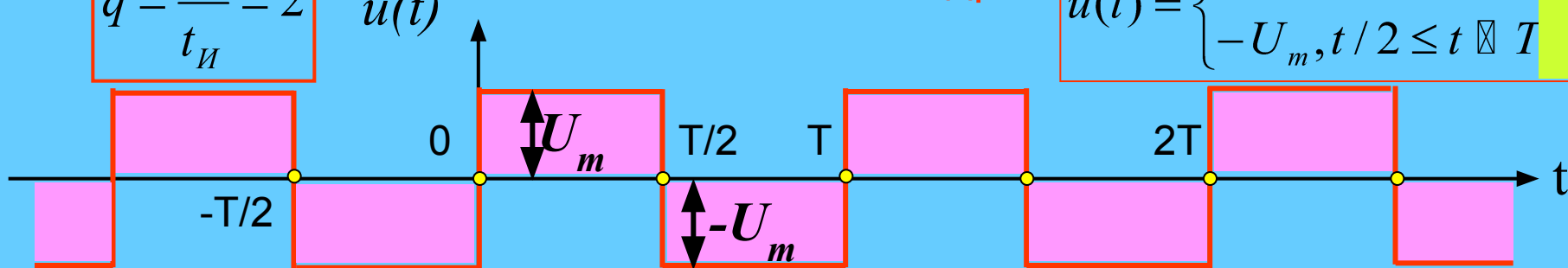
❖ оси абсцисс (оси времени) и  
начала координат:

❖ Периодические колебания симметричные относительно оси абсцисс (оси времени) и начала координат:

$$q = \frac{T}{t_{II}} = 2$$

Колебание типа «**меандр**»

$$u(t) = \begin{cases} U_m, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -U_m, & t/2 \leq t \leq T \end{cases}$$



Постоянная составляющая колебания равна «0»

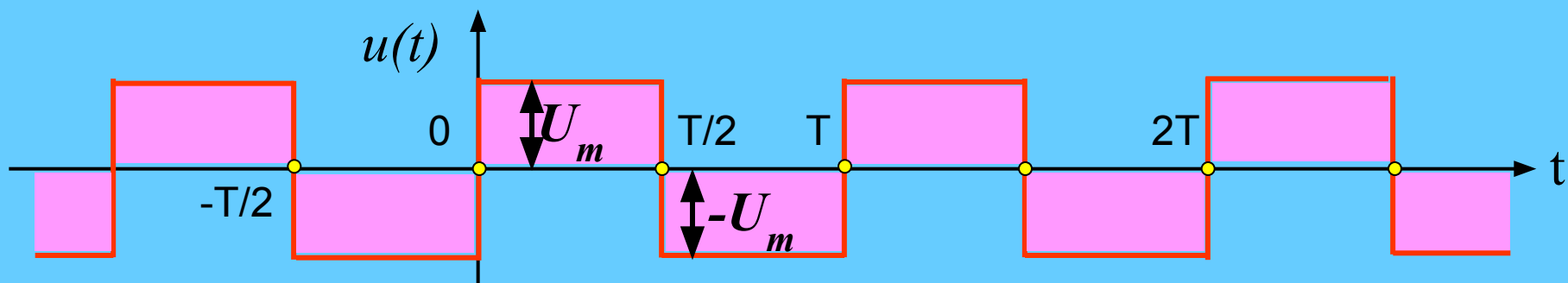
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left[ U_m \cdot t \Big|_0^{T/2} - U_m \cdot t \Big|_{T/2}^T \right] = 0$$

При аппроксимации  $u(t)$  системой ортогональных функции  $\{\sin kt\}$  =  $\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$

$$C_k = \frac{\int_0^{2\pi} u(t) \cdot \sin kt dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 kt dt} = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin kt dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin kt dt \right) =$$

Колебание типа «**меандр**» при разложении в ряд Фурье содержит только четные **sin** гармоники

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin kt dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin kt dt \right) = \begin{cases} \frac{4\pi}{k}, & \rightarrow k - \text{нечетное} \\ 0, & \rightarrow k - \text{четное} \end{cases}$$



Аппроксимирующее выражение ряда Фурье для колебания типа «меандр»

$$u(t) = \frac{4 \cdot U_m}{\pi} \left( \sin \omega \cdot t + \frac{1}{3} \sin 3 \cdot \omega \cdot t + \frac{1}{5} \sin 5 \cdot \omega \cdot t + \frac{1}{7} \sin 7 \cdot \omega \cdot t + \dots + \frac{1}{k} \sin k \cdot \omega \cdot t \right)$$

Обобщенное выражение ряда Фурье для колебания типа «меандр»

$$u(t) = \frac{4 \cdot U_m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k \cdot \omega \cdot t), \rightarrow k = 2n + 1; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(t) = U_{m1} \sin \omega \cdot t + U_{m3} \sin 3 \cdot \omega \cdot t + U_{m5} \sin 5 \cdot \omega \cdot t + \dots + U_{mk} \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

где  
амплитуды  
гармоник

$$U_{m1} = \frac{4 \cdot U_m}{\pi}$$

$$U_{m3} = \frac{4 \cdot U_m}{3 \cdot \pi}$$

$$U_{m5} = \frac{4 \cdot U_m}{5 \cdot \pi}$$

$$U_{mk} = \frac{4 \cdot U_m}{k \cdot \pi}$$

расчетные выражения для вычисления коэффициентов ряда Фурье

$$U_0 = a_0 / 2 = 0$$

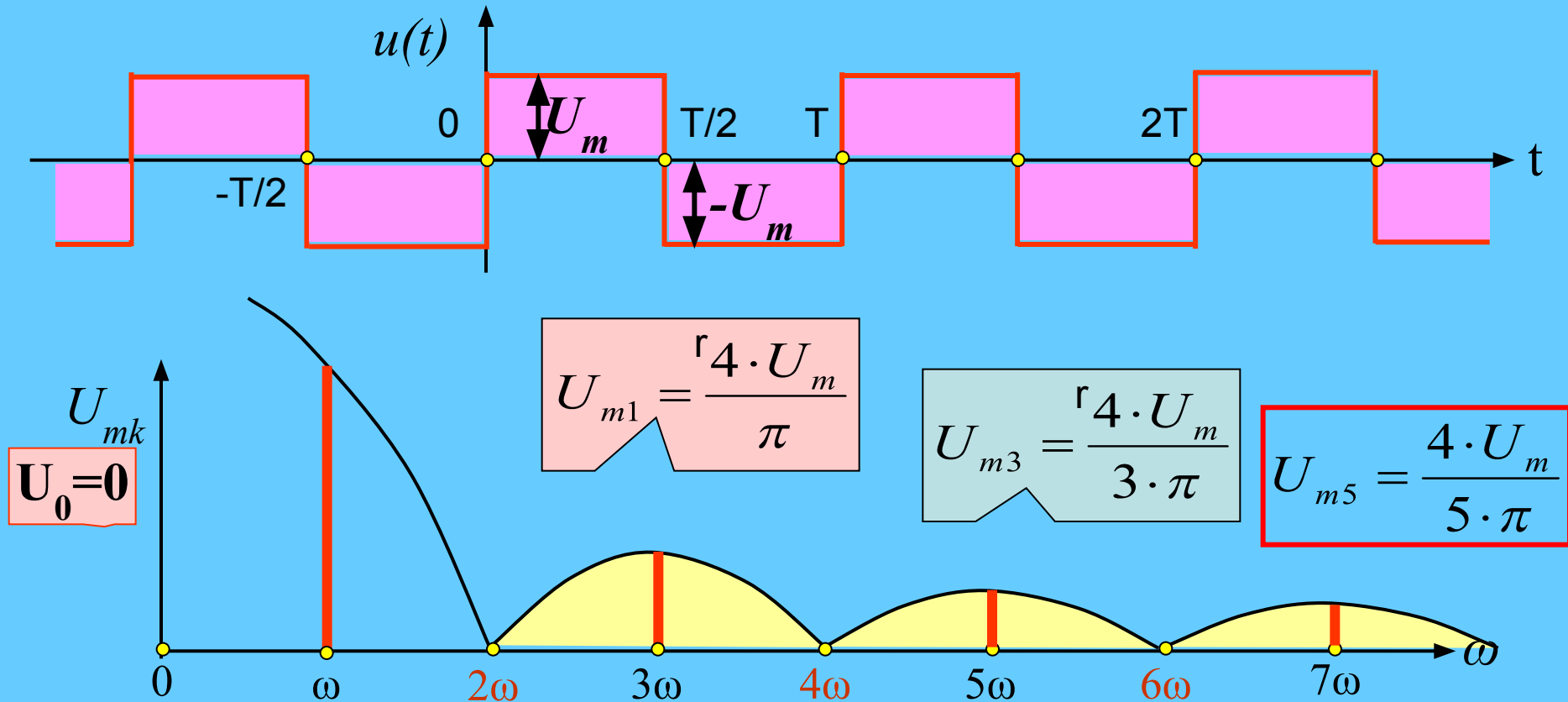
$$U_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin(k\omega t) dt$$



Таким образом, амплитудно-частотный спектр колебания типа «меандр»

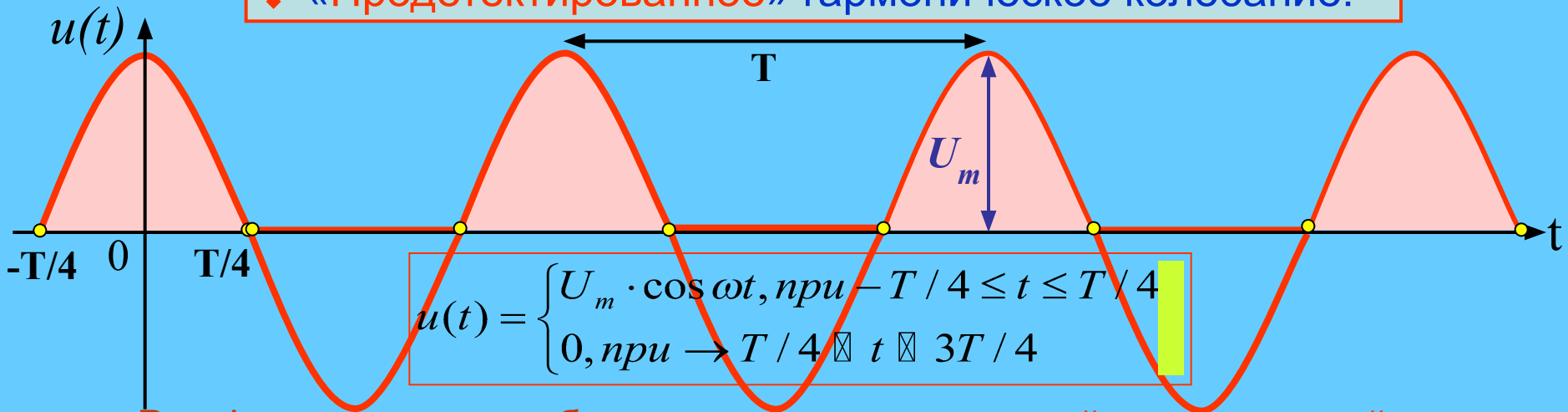


Амплитудно-частотный спектр колебания типа «меандр» является дискретным (линейчатым) и не содержит постоянной составляющей, а также четных гармоник (т.е гармоник, кратных скважности знакопеременных импульсов исходного колебания)

$$u(t) = U_{m1} \sin \omega \cdot t + U_{m3} \sin 3 \cdot \omega \cdot t + U_{m5} \sin 5 \cdot \omega \cdot t + \dots + U_{mk} \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

❖ Периодические колебания симметричные относительно оси ординат :

❖ «Продетектированное» гармоническое колебание:



$$u(t) = \begin{cases} U_m \cdot \cos \omega t, & \text{при } -T/4 \leq t \leq T/4 \\ 0, & \text{при } T/4 \leq t \leq 3T/4 \end{cases}$$

Ряд Фурье такого колебания состоит из постоянной составляющей и косинусоидальных гармоник (первой и всех четных), (отсутствуют **sin** гармоники)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_m \cos \omega t dt = \frac{U_m}{T\omega} \sin \omega t \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{U_m}{\pi} = U_0$$

**Постоянная составляющая**

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_m \cos \omega t \cos k\omega t dt \neq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \sin k\omega t dt = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos \omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_m \cos^2 \omega t dt = \frac{2U_m}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot t \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{U_m}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos 2\omega t dt = \frac{2U_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t dt = \frac{2U_m}{3 \cdot \pi}$$

$$U_{m_k} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = a_k$$

Воспользоваться формулой преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$a_3 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos 3\omega t dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} \int_{-T/4}^{T/4} (\cos 2\omega t dt + \int_{-T/4}^{T/4} \cos 4\omega t) dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} (0 + 0) = 0$$

$$a_4 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos 4\omega t dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} \int_{-T/4}^{T/4} (\cos 3\omega t dt + \cos 5\omega t) dt = \frac{U_m}{T} \left( -\frac{2T}{3 \cdot 2\pi} + \frac{2T}{5 \cdot 2\pi} \right) = -\frac{2U_m}{3 \cdot 5 \cdot \pi}$$

$$a_5 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos 5\omega t dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} \int_{-T/4}^{T/4} (\cos 4\omega t dt + \int_{-T/4}^{T/4} \cos 6\omega t) dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} (0 + 0) = 0$$

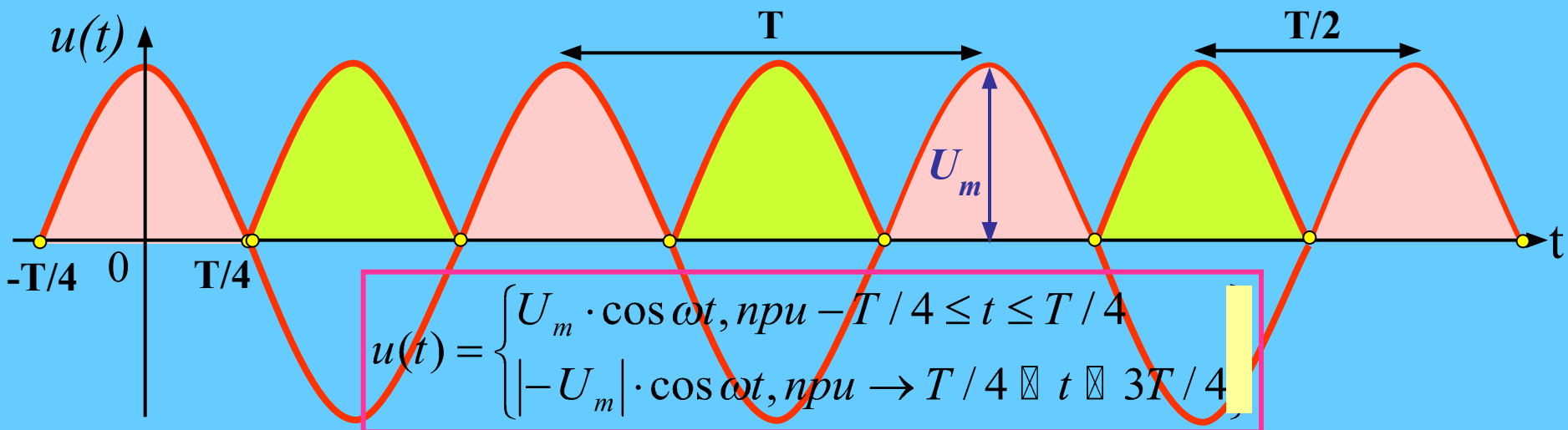
$$a_6 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \cdot \cos 6\omega t dt = \frac{2U_m}{T \cdot 2} \int_{-T/4}^{T/4} (\cos 5\omega t dt + \cos 7\omega t) dt = \frac{U_m}{T} \left( \frac{2T}{5 \cdot 2\pi} - \frac{T}{7 \cdot \pi} \right) = \frac{2U_m}{5 \cdot 7 \cdot \pi}$$

Аналитическая запись ряда Фурье такого несинусоидального колебания

$$u(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cos \omega t + \frac{2U_m}{3 \cdot \pi} \cos 2\omega t - \frac{2U_m}{3 \cdot 5 \cdot \pi} \cos 4\omega t + \frac{2U_m}{5 \cdot 7 \cdot \pi} \cos 6\omega t - \dots$$

$$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

❖ «Выпрямленное» гармоническое колебание:



Такое несинусоидальное колебание формируется на выходе двухполупериодного однофазного выпрямителя (мостового выпрямителя)

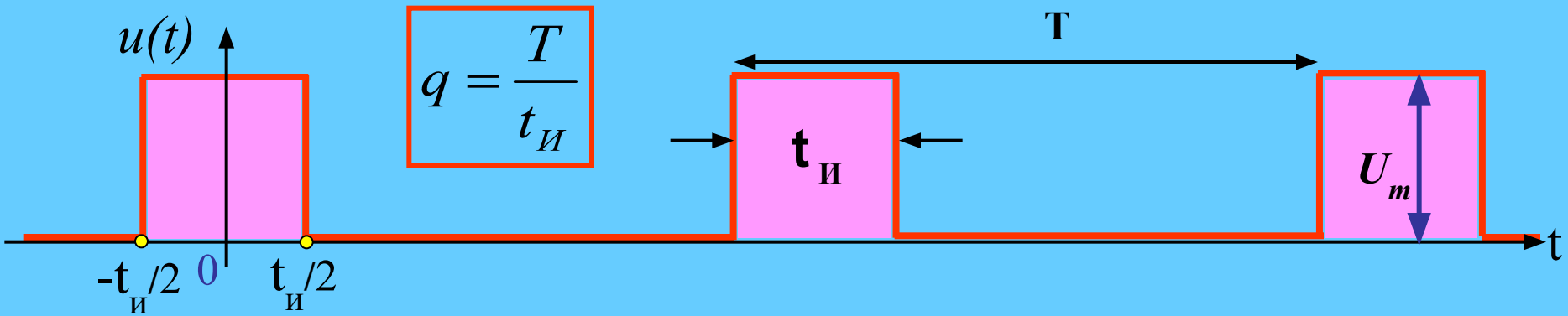
Аналитическая запись **ряда Фурье** такого несинусоидального колебания (отсутствуют нечетные гармоники)

$$u(t) = \frac{2 \cdot 2 \cdot U_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

Амплитуды остальных слагаемых удваиваются по сравнению с «продетектированным» колебанием)

$$u(t) = \frac{2 \cdot U_m}{\pi} + \frac{2 \cdot 2 \cdot U_m}{3 \cdot \pi} \cos 2\omega t - \frac{2 \cdot 2 \cdot U_m}{3 \cdot 5 \cdot \pi} \cos 4\omega t + \frac{2 \cdot 2 \cdot U_m}{5 \cdot 7 \cdot \pi} \cos 6\omega t - \dots$$

❖ Периодическая последовательность прямоугольных импульсов:



Формы аналитической записи такого несинусоидального колебания

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{t_{И}}\right)$$

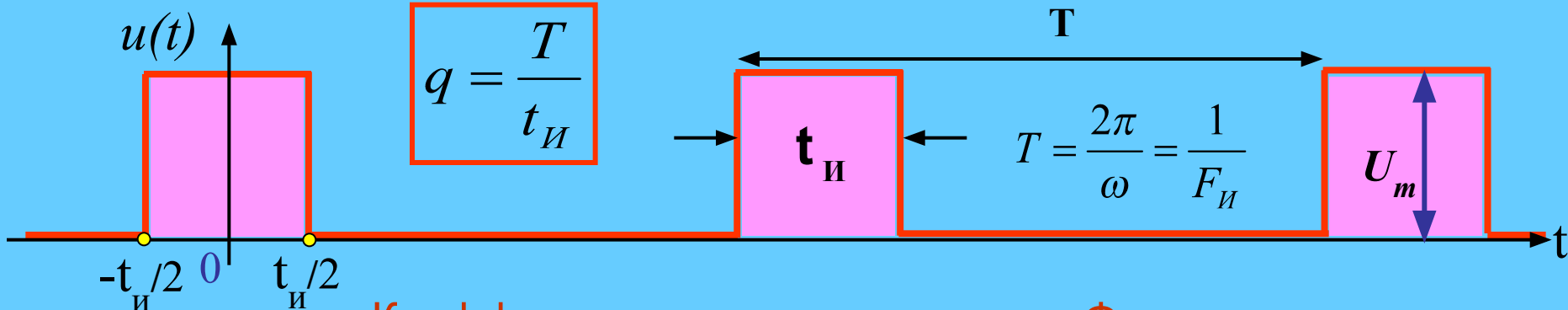
$$u(t) = \begin{cases} U_m, & \text{при } -\frac{t_{И}}{2} \leq t \leq \frac{t_{И}}{2} \\ 0, & \text{при } \rightarrow \text{других } t \end{cases}$$

Основные параметры импульсной последовательности

- Период следования импульсов -  $T$
- Сквозность импульсной последовательности -  $q$
- ❖ Длительность импульсов -  $t_{И}$

Постоянная составляющая периодической импульсной последовательности

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-t_{И}/2}^{t_{И}/2} U_m dt = \frac{U_m}{T} t \Big|_{-t_{И}/2}^{t_{И}/2} = \frac{U_m}{T} t_{И} = \frac{U_m}{q} = U_0$$



### Коэффициенты разложения ряда Фурье

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-t_{И}/2}^{t_{И}/2} U_m \cos(k\omega t) dt = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin(k\omega t_{И} / 2)}{k\omega t_{И} / 2} = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin(k\pi / q)}{k\pi / q} = \frac{2U_m}{q} \text{sinc}(k\pi / q)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-t_{И}/2}^{t_{И}/2} U_m \sin(k\omega t) dt = 0, \text{ при } \rightarrow k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot F_{И},$$

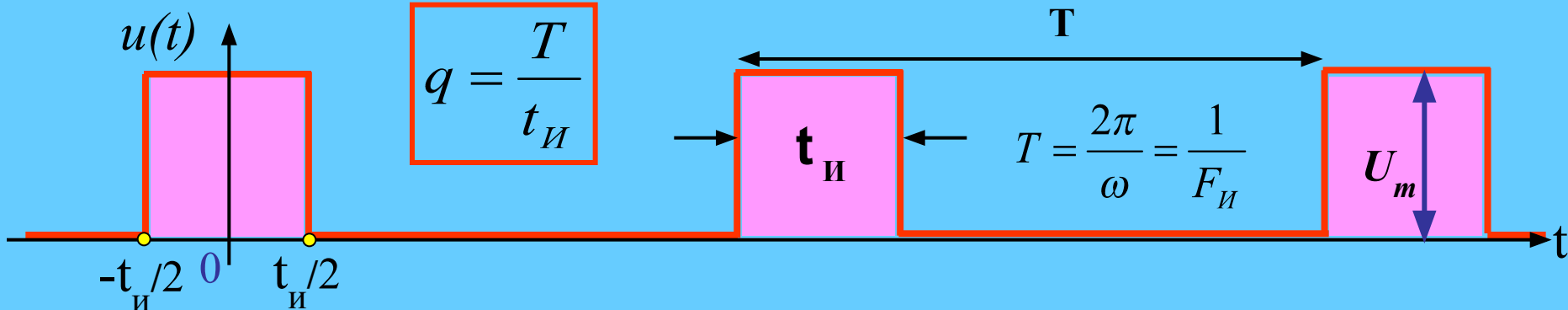
При этом амплитуды гармоник ряда Фурье и их фазы выражаются как:

$$U_{m_k} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k|$$

$$\phi_k = \text{arctg} \frac{a_k}{b_k} = \begin{cases} 0, \rightarrow a_k \geq 0 \\ -\pi, a_k < 0 \end{cases}$$

Таким образом, на интервале от  $-T/2$  до  $T/2$  ряд Фурье выражается

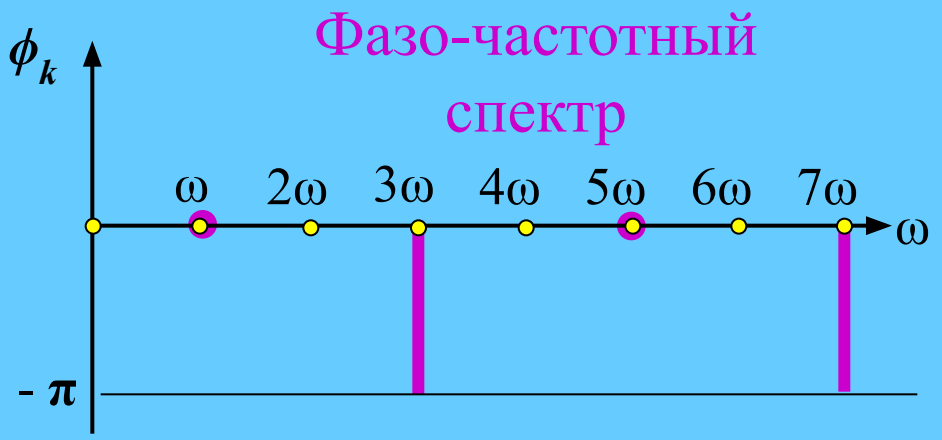
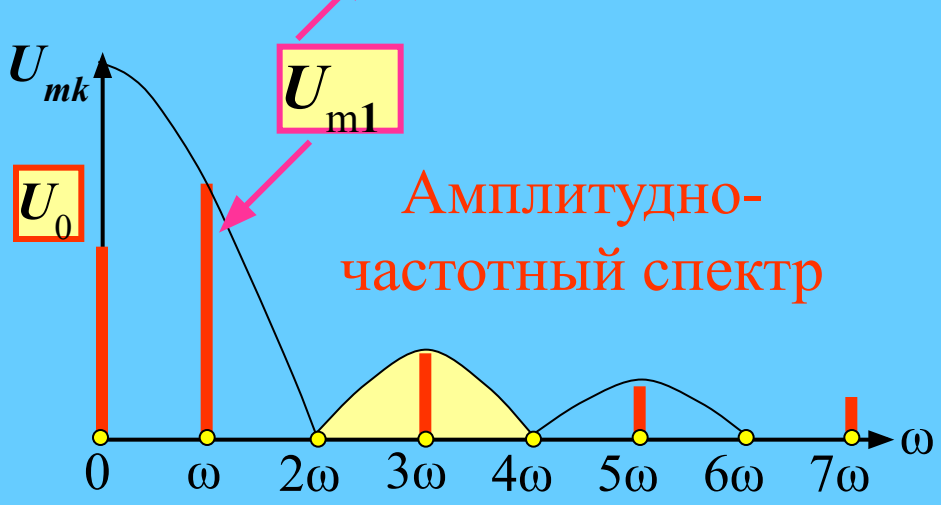
$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(k\omega t_{И} / 2)}{k\omega t_{И} / 2} \right| \cos(k\omega t + \phi_k) \right) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m_k} \cdot \cos(k\omega t + \phi_k)$$



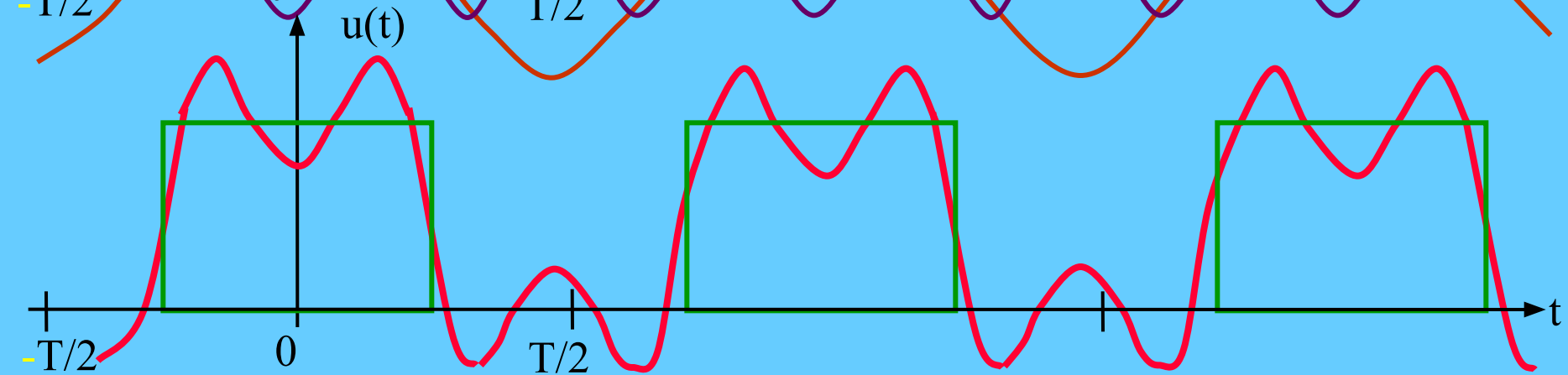
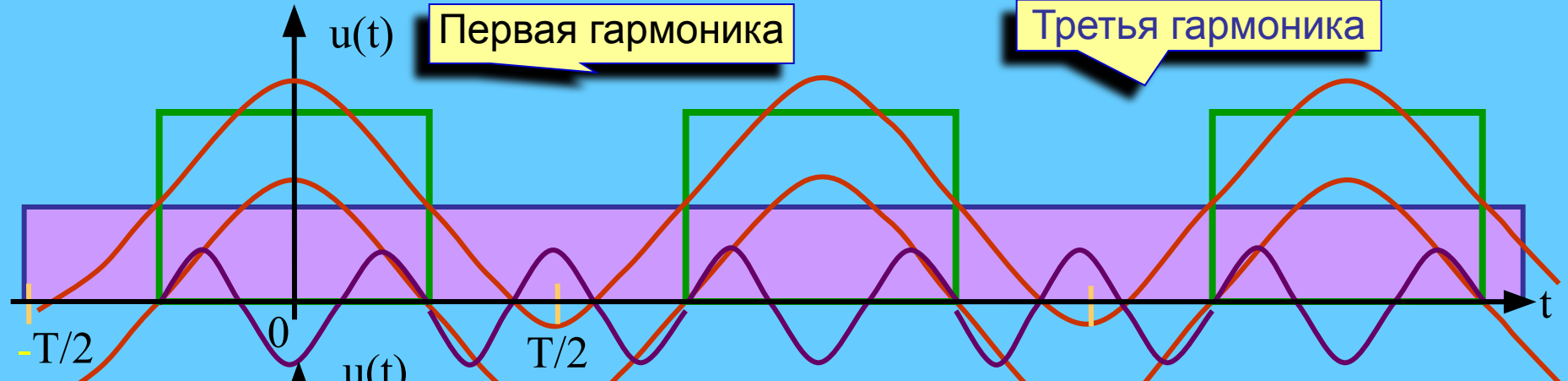
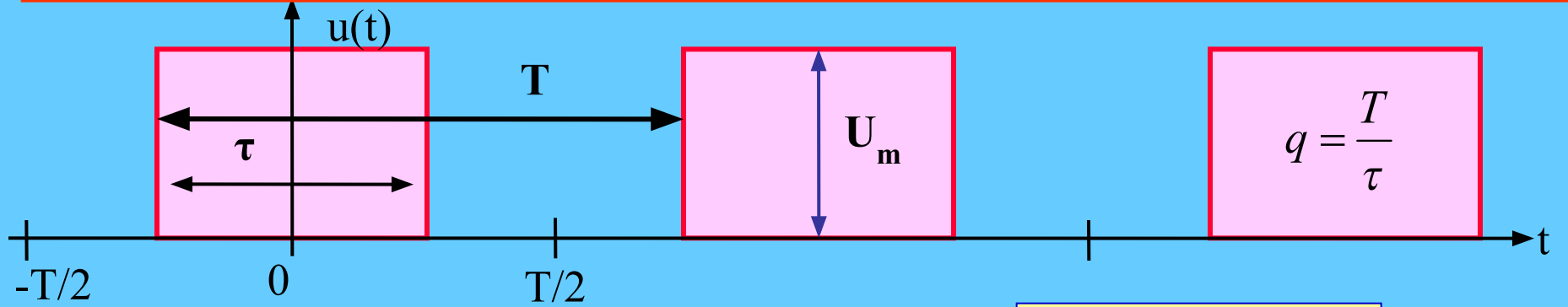
Вид спектра импульсной последовательности существенно зависит от скважности. Рассмотрим спектральные диаграммы амплитуд и фаз для  $q = 2$ ,  $U_m = 5$  В

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_m}{k\pi} \sin(k\pi / 2) \cos(k\omega t)$$

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \cos \omega t - \frac{2U_m}{3 \cdot \pi} \cos 3\omega t + \frac{2U_m}{5 \cdot \pi} \cos 5\omega t - \frac{2U_m}{7 \cdot \pi} \cos 7\omega t + \dots$$

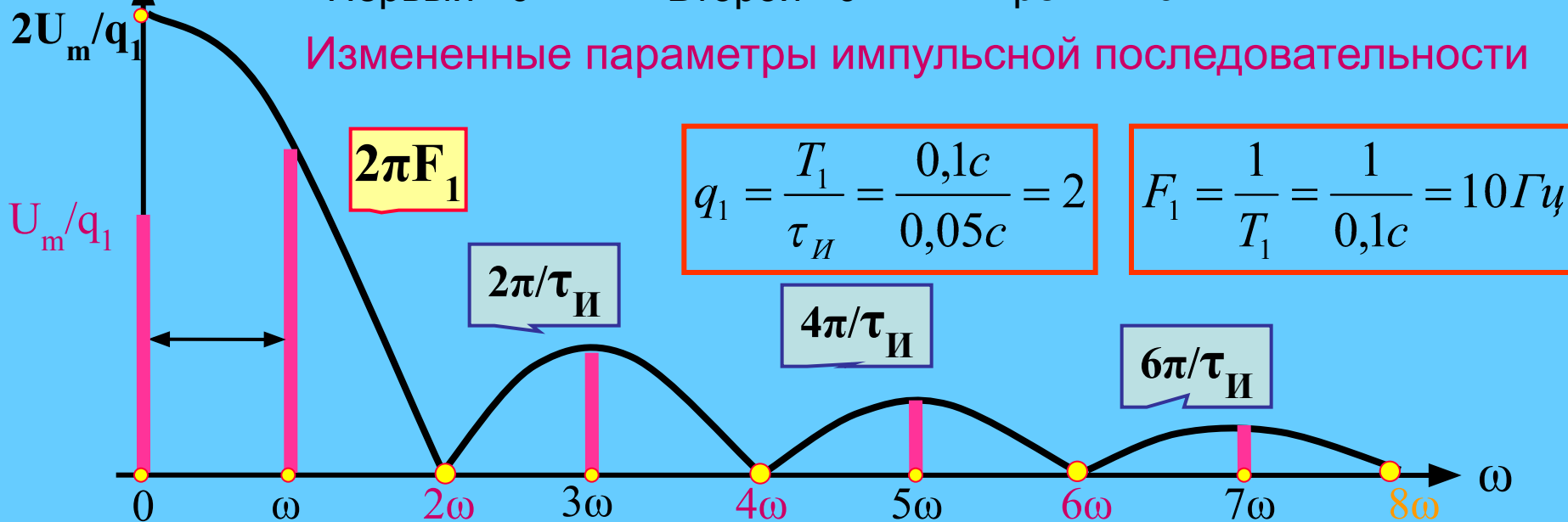
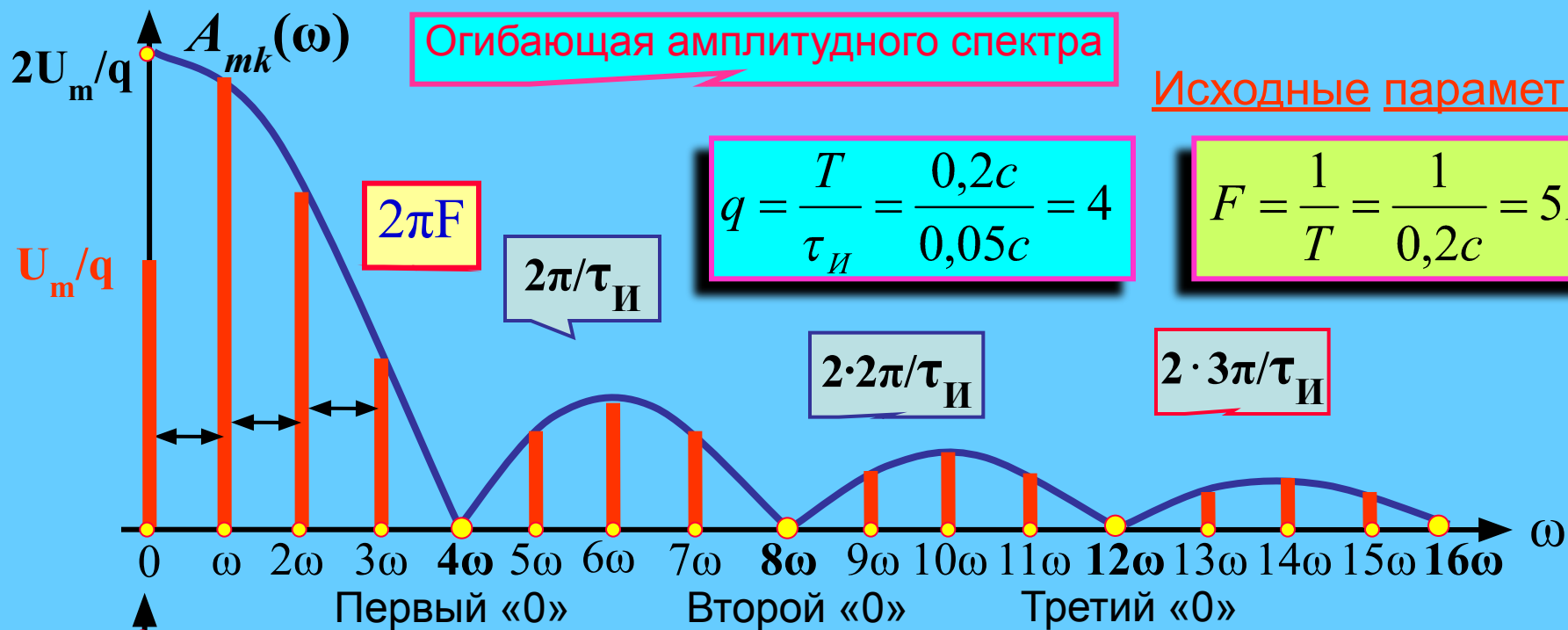


$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_m}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos k\omega t = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \cos \omega t - \frac{2U_m}{3\pi} \cos 3\omega t$$



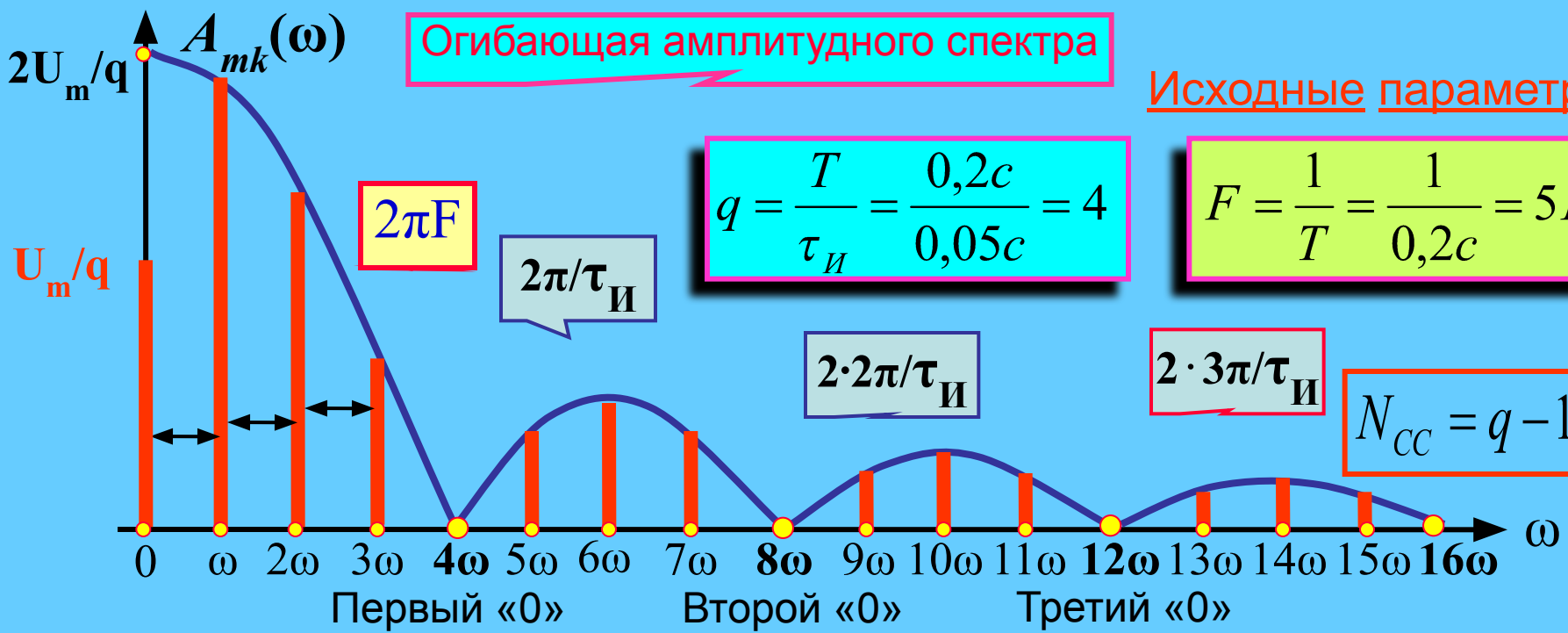


# Примеры определения спектра импульсной последовательности



**Огибающая амплитудного спектра**

**Исходные параметры**

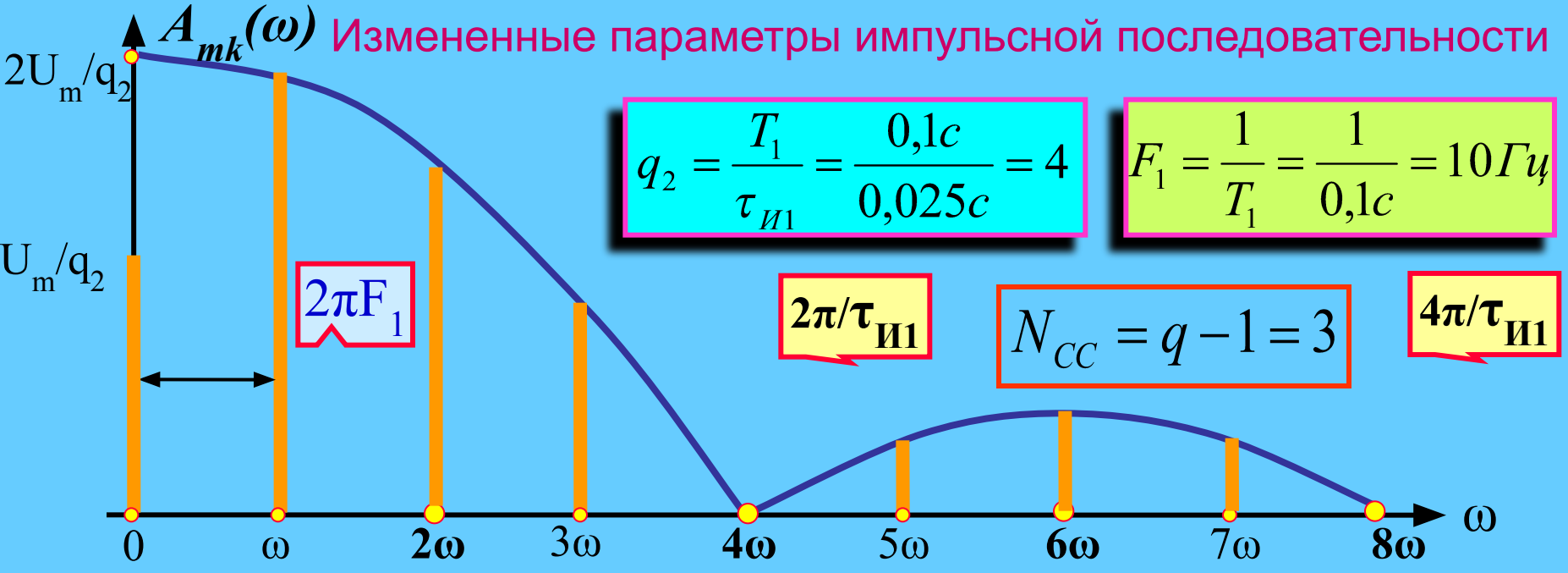


$q = \frac{T}{\tau_{И}} = \frac{0,2c}{0,05c} = 4$

$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2c} = 5 \Gamma_{ц}$

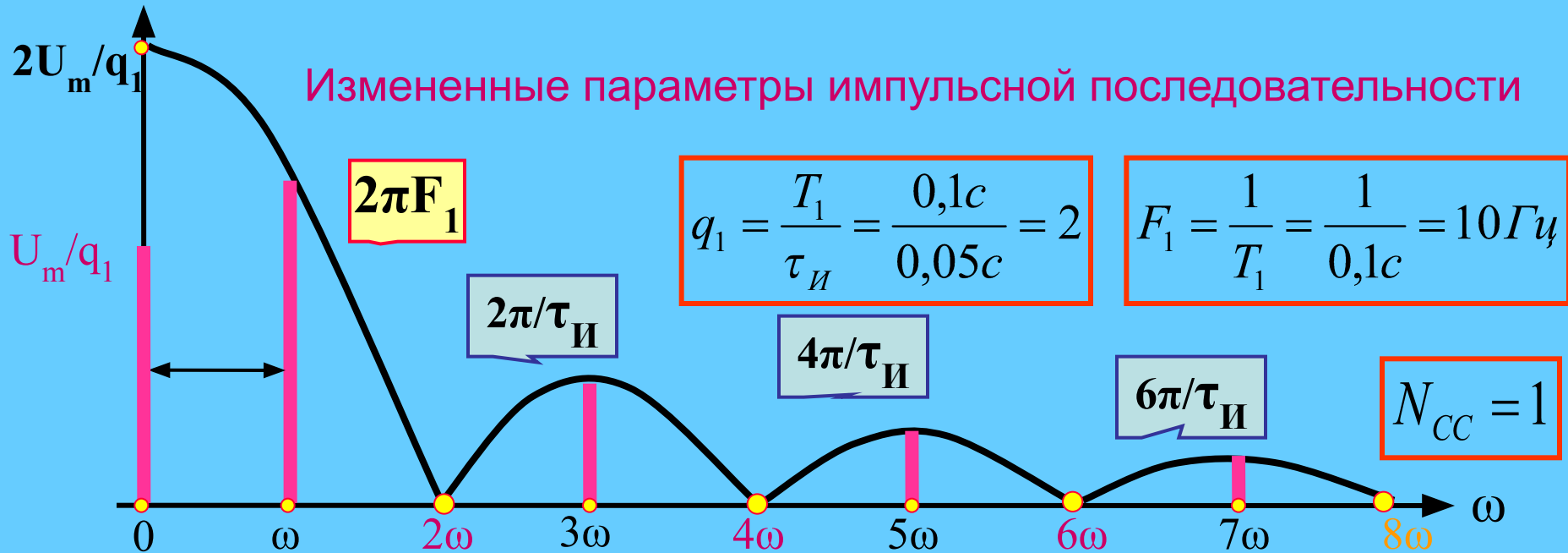
$q_2 = \frac{T_1}{\tau_{И1}} = \frac{0,1c}{0,025c} = 4$

$F_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1c} = 10 \Gamma_{ц}$

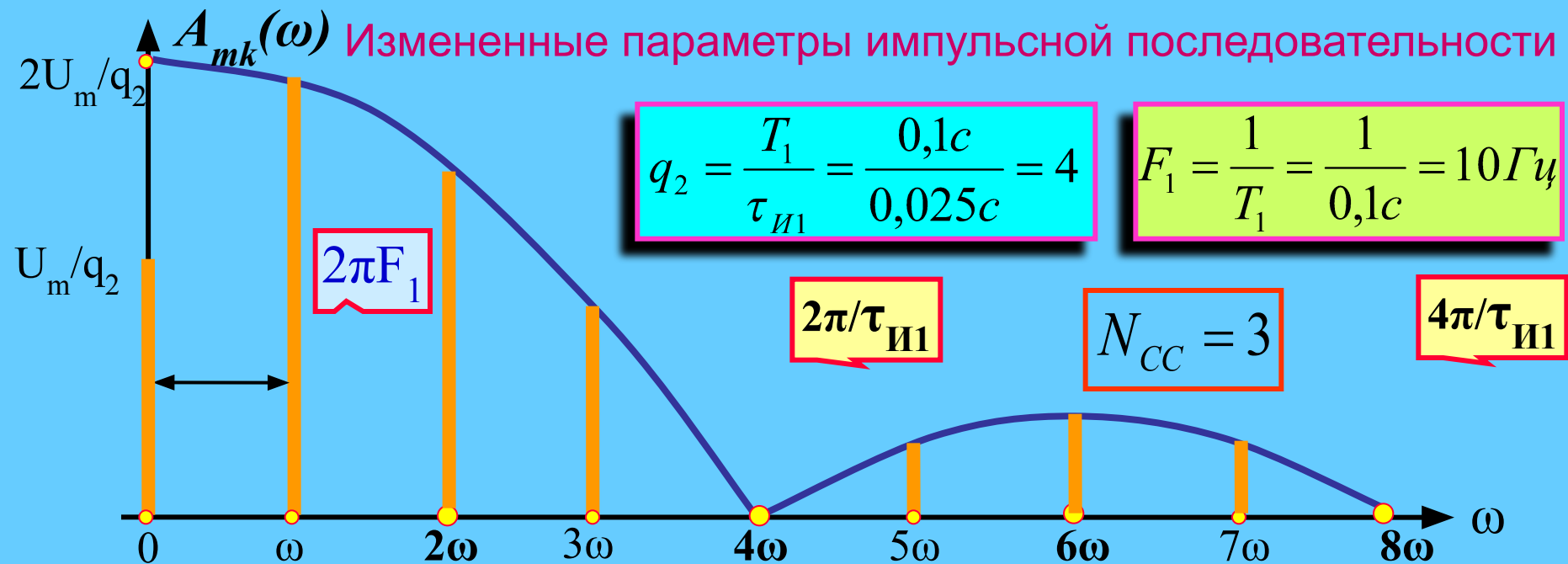


**Измененные параметры импульсной последовательности**

## Измененные параметры импульсной последовательности



## Измененные параметры импульсной последовательности



## Особенности спектрального состава импульсной последовательности

$$A_{mk} = \frac{2 \cdot U_m}{q} \left| \frac{\sin(k\omega \frac{\tau_{II}}{2})}{k\omega \frac{\tau_{II}}{2}} \right|$$



❖ Огибающая амплитудного спектра имеет много лепестков: первый из которых занимает интервал частот от 0 до  $(2\pi/\tau_{II})$ , второй от  $(2\pi/\tau_{II})$  до  $2 \cdot (2\pi/\tau_{II})$  и т.д.

□ Ширина каждого лепестка равна  $(2\pi/\tau_{II})$  и определяется только длительностью импульса. Расстояние между спектральными линиями равно  $2\pi F$ ,  $F = 1/T$  — частота повторения импульсов, т.е. определяется периодом импульсной последовательности.

□ Узлы (нули) амплитудного спектра — значения частот  $k \cdot \omega$ , в которых  $A_{mk}(\omega) = 0$  и происходит смена знака сомножителей спектра, т.е. фаза скачком изменяется на  $180^\circ$ .

$$\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau_{II}}{2}) = 0; \Rightarrow \sin(k \frac{\pi}{q}) = 0; \Rightarrow k = n \cdot q$$

На частотах кратных скважности, спектральные составляющие отсутствуют, т.е. равны нулю.

**Вывод:** Амплитудно-частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов является **дискретным** и **полностью определяется параметрами импульсной последовательности.**

### 3. Определение действующих значений несинусоидальных энергетических величин

**Определение:** **Действующим** называют значение несинусоидального тока, эквивалентное постоянному току по тепловому воздействию

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \dots + \frac{I_{mk}^2}{2}}$$

**Действующее значение** несинусоидального тока является **средней квадратичной величиной** постоянной составляющей и действующих (или амплитудных) значений токов гармоник

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}$$

или

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \dots + \frac{U_{mk}^2}{2}}$$

**Действующее значение** несинусоидального напряжения является **средней квадратичной величиной** постоянной составляющей и действующих (или амплитудных) значений напряжений гармоник

**Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений** измеряются амперметрами и вольтметрами электромагнитной, электродинамической и тепловой систем

Для оценки несинусоидальности периодических величин (тока, напряжения, мощности) вводятся ряд критериальных коэффициентов – коэффициент нелинейных искажений –  $K_{НИ}$  и коэффициент гармоник –  $K_{Г}$ )

$$K_{НИi} = \frac{I_1}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}}$$

$$K_{НИu} = \frac{U_1}{\sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}}$$

Коэффициент нелинейных искажений –  $K_{НИ}$  определяется отношением действующего значения основной (первой) гармоники тока или напряжения к действующему значению этих несинусоидальных величин

Чем меньше  $K_{НИ}$  отличается от единицы, тем ближе к синусоиде данная периодическая кривая (несинусоидальное колебание).

$$K_{Гi} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots + I_k^2}}{I_1}$$

$$K_{Гu} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots + U_k^2}}{U_1}$$

Коэффициент гармоник –  $K_{Г}$  показывает удельный вес высших гармоник относительно первой (основной) гармоники.

Чем меньше  $K_{Г}$ , тем ближе к синусоиде данная периодическая кривая

$$K_{НИ"СIN"} = 1$$



$$K_{Г"СIN"} = 0$$

## Мощность в электрических цепях несинусоидального тока

Под активной мощностью  $P$  несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}) \right] \times \left[ I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega t + \phi_{ik}) \right] dt$$

Выполнив интегрирование, получим

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \psi_1 + U_2 I_2 \cos \psi_2 + \dots + U_k I_k \cos \psi_k$$

Потребляемая, т.е. активная мощность в цепи несинусоидального тока определяется суммой постоянной мощности и активных мощностей гармоник

$$\psi_k = \varphi_k - \phi_k$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k = U_1 I_1 \sin \psi_1 + U_2 I_2 \sin \psi_2 + \dots + U_k I_k \sin \psi_k \quad S = U \cdot I$$

Реактивная мощность в цепи несинусоидального тока определяется суммой реактивных мощностей гармоник

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

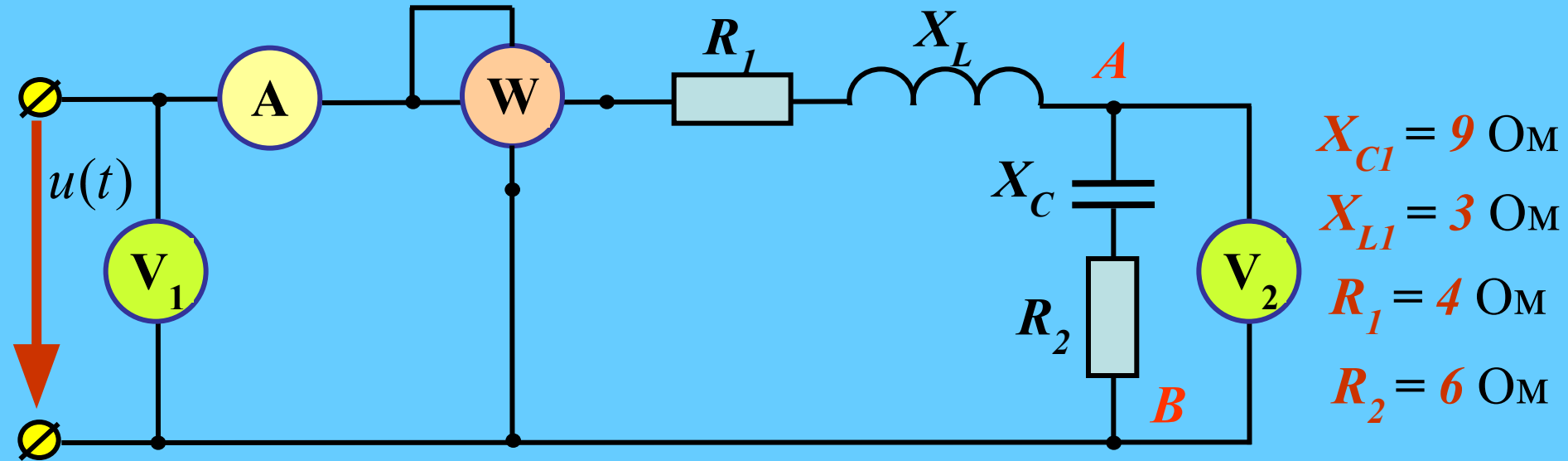
При изучении некоторых свойств цепей несинусоидального тока несинусоидальные токи и напряжения заменяют синусоидальными по критерию эквивалентности действующих значений тока и напряжения.

$$\cos \varphi_{\text{ЭКВ}} = P_{\text{ЭКВ}} / U_{\text{ЭКВ}} \cdot I_{\text{ЭКВ}}$$

$$S_{\text{ЭКВ}} = U_{\text{ЭКВ}} \cdot I_{\text{ЭКВ}}$$

**Задача № 1.** К линейной цепи приложено несинусоидальное напряжение

$$u(t) = 310 + 210 \sin \omega t + 176 \sin(3\omega t + 72^\circ) \text{ В}$$



$$X_{C1} = 9 \text{ Ом}$$

$$X_{L1} = 3 \text{ Ом}$$

$$R_1 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом}$$

Требуется записать мгновенное значение тока  $i(t)$  в цепи и определить показания всех приборов, включенных в цепь, а также коэффициент мощности  $\cos \phi_{\text{ЭКВ}}$ .

**Решение:**

1. Постоянная составляющая тока в цепи  $I_0 = 0$ , так как в цепи включен конденсатор (разрыв цепи для постоянной составляющей напряжения).
2. Определяем реактивные сопротивления цепи для третьей гармоники:

$$X_{L3} = 3\omega \cdot L = 3X_{L1} = 3 \cdot 3 = 9 [\text{Ом}]$$

$$X_{C3} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{X_{C1}}{3} = \frac{9}{3} = 3 [\text{Ом}]$$



3. Полные (модули) сопротивления цепи для **первой** и **третьей** гармоник:

$$Z_1 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{(4 + 6)^2 + (3 - 9)^2} = 11,65[\text{Ом}]$$

$$Z_3 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{(4 + 6)^2 + (9 - 3)^2} = 11,65[\text{Ом}]$$

4. Амплитуды токов **первой** и **третьей** гармоник:

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \frac{210}{11,65} = 18,03 \text{ A}$$

$$I_{m3} = \frac{U_{m3}}{Z_3} = \frac{176}{11,65} = 15,11 \text{ A}$$

5. Углы сдвига фаз для **первой** и **третьей** гармоник тока:

$$\varphi_1 = -\text{arctg} \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R_1 + R_2} = -\text{arctg} \frac{3 - 9}{10} = \text{arctg} 0,6 \approx 31^\circ$$

$$\varphi_3 = 72^\circ - \text{arctg} \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R_1 + R_2} = 72^\circ - \text{arctg} \frac{9 - 3}{10} = 72^\circ - \text{arctg} 0,6 \approx 72^\circ - 31^\circ = 41^\circ$$

6. Мгновенное значение несинусоидального тока в цепи будет иметь вид:

$$i(t) = 18,03 \sin(\omega t + 31^\circ) + 15,11 \sin(3\omega t + 41^\circ) \text{ A}$$

7. Вольтметр  $V_1$ , подключенный ко входу цепи будет показывать действующее значение приложенного к цепи входного напряжения

$$U_{BX} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{310^2 + 149^2 + 125^2} = 366B$$

$$\langle V_1 \rangle = 366B$$

так как действующее значение напряжений первой и третьей гармоник:

$$U_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{210}{1,41} = 149B$$

$$U_3 = \frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{176}{1,41} = 125B$$

8. Амперметр  $A$ , подключенный на входе цепи будет показывать действующее значение протекающего в цепи тока

$$I_{BX} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{12,8^2 + 10,7^2} = 16,7A$$

$$\langle A \rangle = 10,7A$$

так как действующее значение токов первой и третьей гармоник:

$$I_1 = \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{18,03}{1,41} = 12,8A$$

$$I_3 = \frac{I_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{15,1}{1,41} = 10,7A$$

9. Для определения показаний второго вольтметра  $V_2$ , необходимо вычислить полные сопротивления участка АВ для 1-й и 3-й гармоник

$$Z_{AB1} = \sqrt{R_2^2 + X_{C1}^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10,8[Ом]$$

$$Z_{AB3} = \sqrt{R_2^2 + X_{C3}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6,7[Ом]$$

9. На участке **AB** падение напряжения для 1-й и 3-й гармоник составит

$$U_{AB1} = I_1 \cdot Z_{AB1} = 12,8 \cdot 10,8 = 138,2B$$

$$U_{AB3} = I_3 \cdot Z_{AB3} = 10,7 \cdot 6,7 = 71,7B$$

10. Так как постоянная составляющая входного напряжения приложена к конденсатору, то следовательно, действующее значение напряжения на участке **AB** цепи будет равно:

$$U_{AB} = \sqrt{U_0^2 + U_{AB1}^2 + U_{AB3}^2} = \sqrt{310^2 + 138,2^2 + 71,7^2} = 347B$$

$$\langle V_2 \rangle = 366B$$

11. **Ваттметр W** измеряет активную мощность цепи,

$$\cos \varphi_1 = \cos 31^\circ = 0,86$$

$$P = P_0 + P_1 + P_3 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cdot \cos \varphi_1$$

$$\cos \varphi_3 = \cos 41^\circ = 0,75$$

Следовательно,  $P = 310 \cdot 0 + 149 \cdot 12,8 \cdot 0,86 + 125 \cdot 10,7 \cdot 0,75 = 2643,3BA$

12. Для определения эквивалентного коэффициента мощности цепи необходимо вычислить полную мощность цепи,

$$S_{ЭКВ} = U_{ЭКВ} I_{ЭКВ} = |при : U_{ЭКВ} = U, I_{ЭКВ} = I| = U \cdot I = 366 \cdot 16,7 = 6112B \cdot A$$

13. Тогда эквивалентный коэффициент мощности цепи

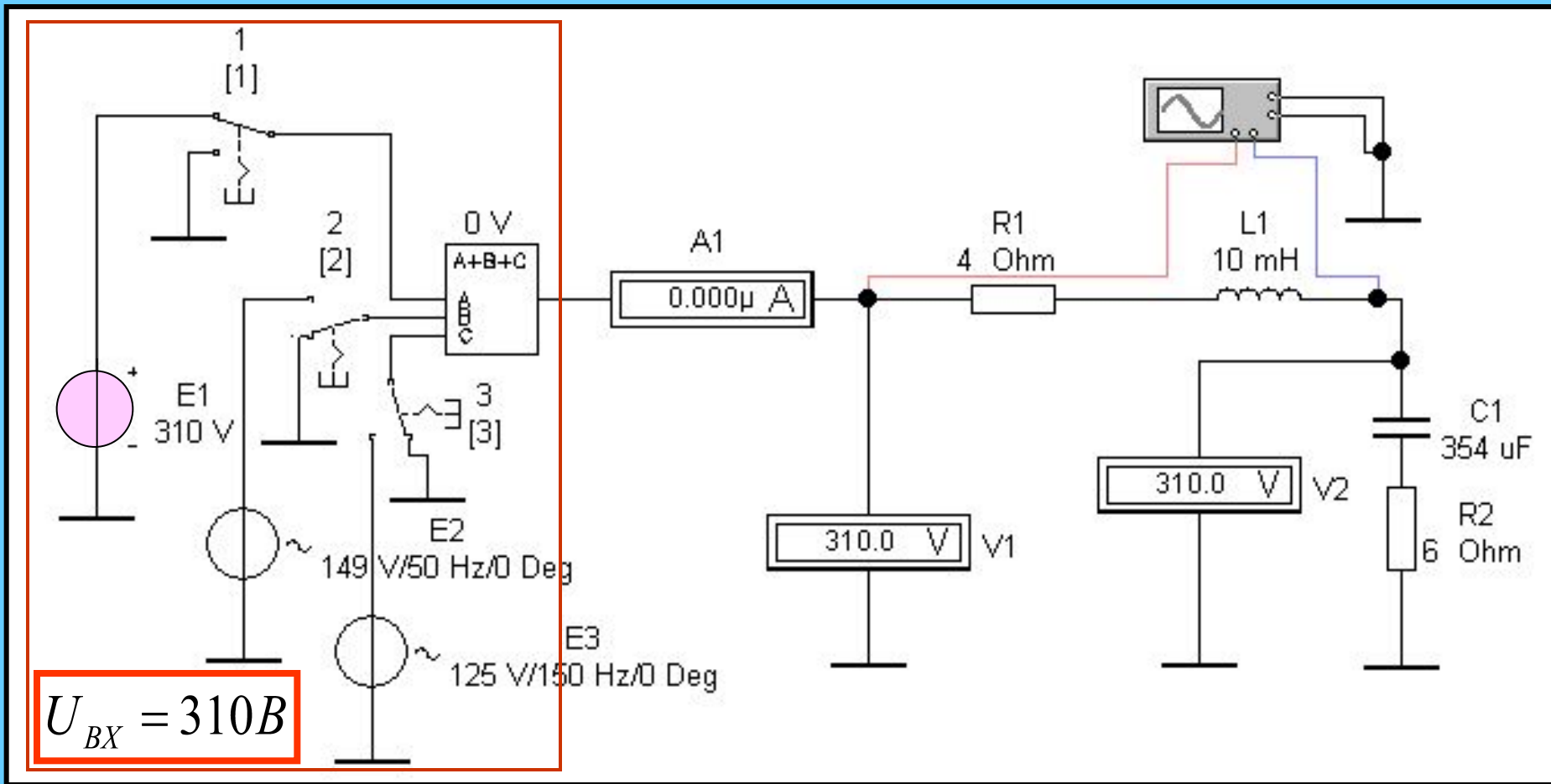
$$\cos \varphi_{ЭКВ} = \frac{P_{ЭКВ}}{S_{ЭКВ}} = \frac{2643,3}{6112} = 0,44$$

$$\varphi_{ЭКВ} = 63^\circ 54'$$

# Экспериментальная модель задачи в программе EWB

$$u(t) = 310 + 210 \sin \omega t + 176 \sin(3\omega t + 72^\circ) B$$

Режим измерения постоянного тока



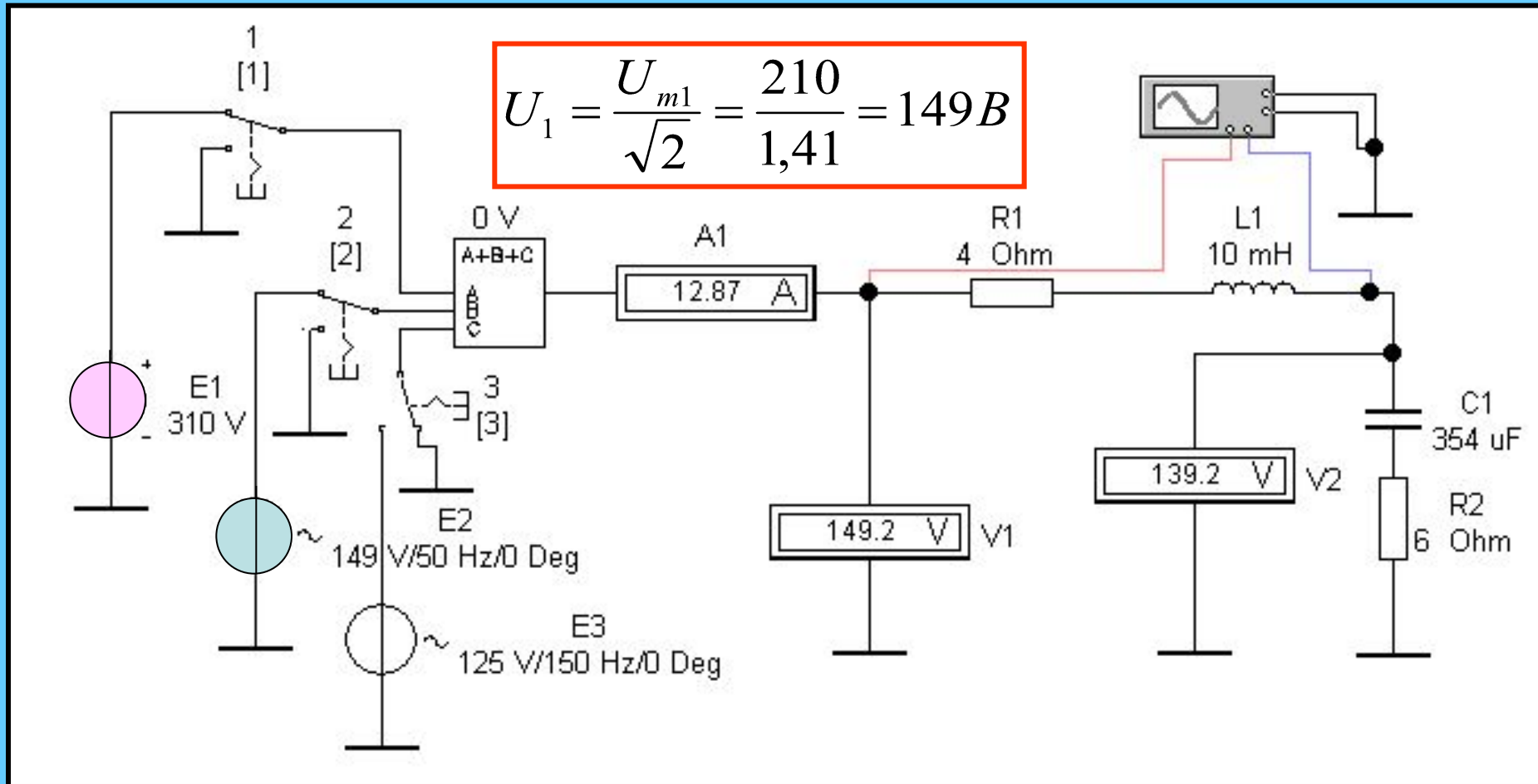
$$\langle V1 \rangle \rightarrow U_1 = 310 B$$

$$\langle V2 \rangle \rightarrow U_2 = 310 B$$

$$\langle A1 \rangle \rightarrow I_{BX} = I = 0 A$$

## Режим измерения переменного тока

$$u(t) = 310 + 210 \sin \omega t + 176 \sin(3\omega t + 72^\circ) \text{ В} \quad u(t) = 310 + 210 \sin \omega t, \text{ В}$$



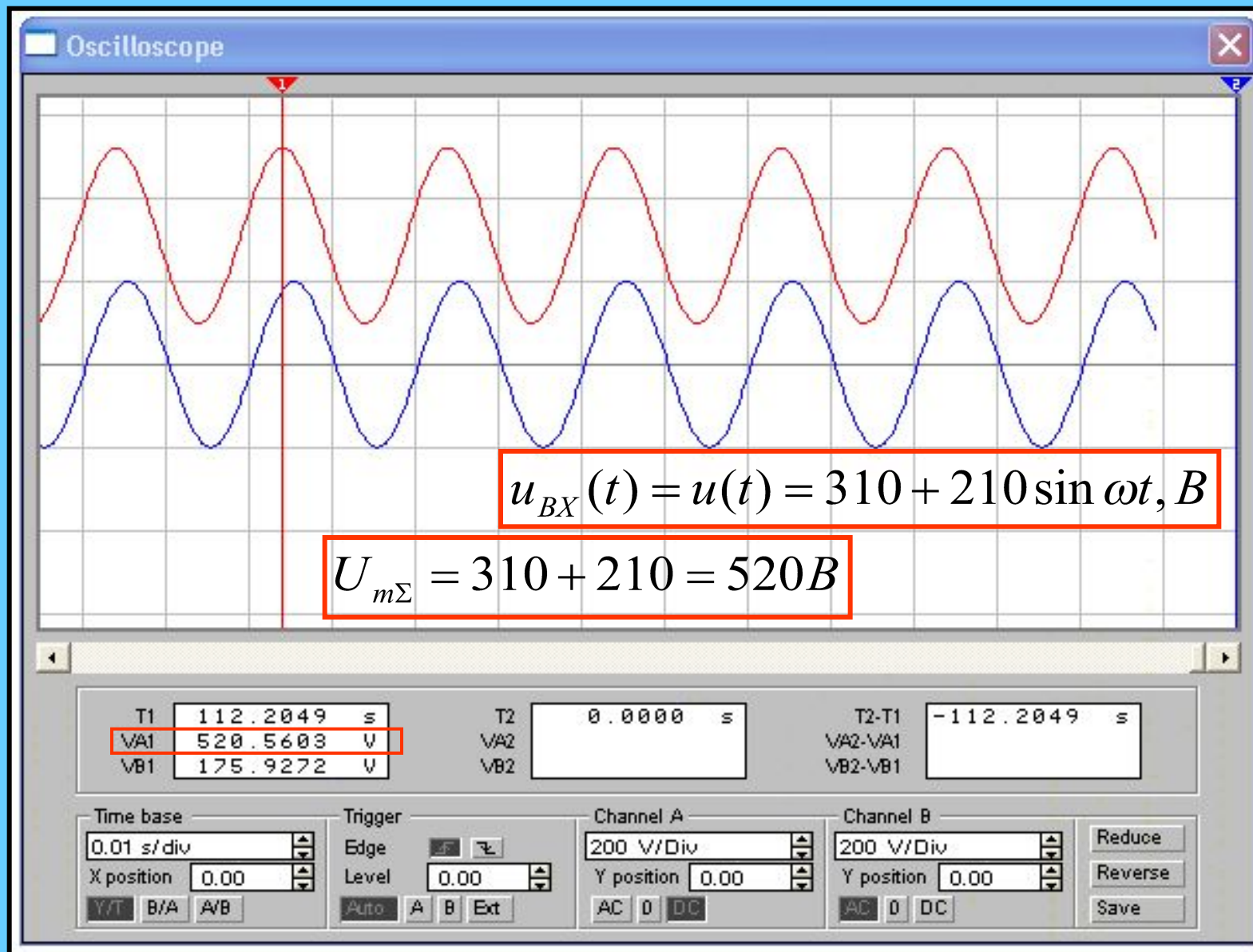
Измерительные приборы показывают действующие значения  $I$  и  $U$  1-й гармоники

$$\langle V1 \rangle \rightarrow U_1 = 149,2 \text{ В}$$

$$\langle V2 \rangle \rightarrow U_2 = 139,2 \text{ В}$$

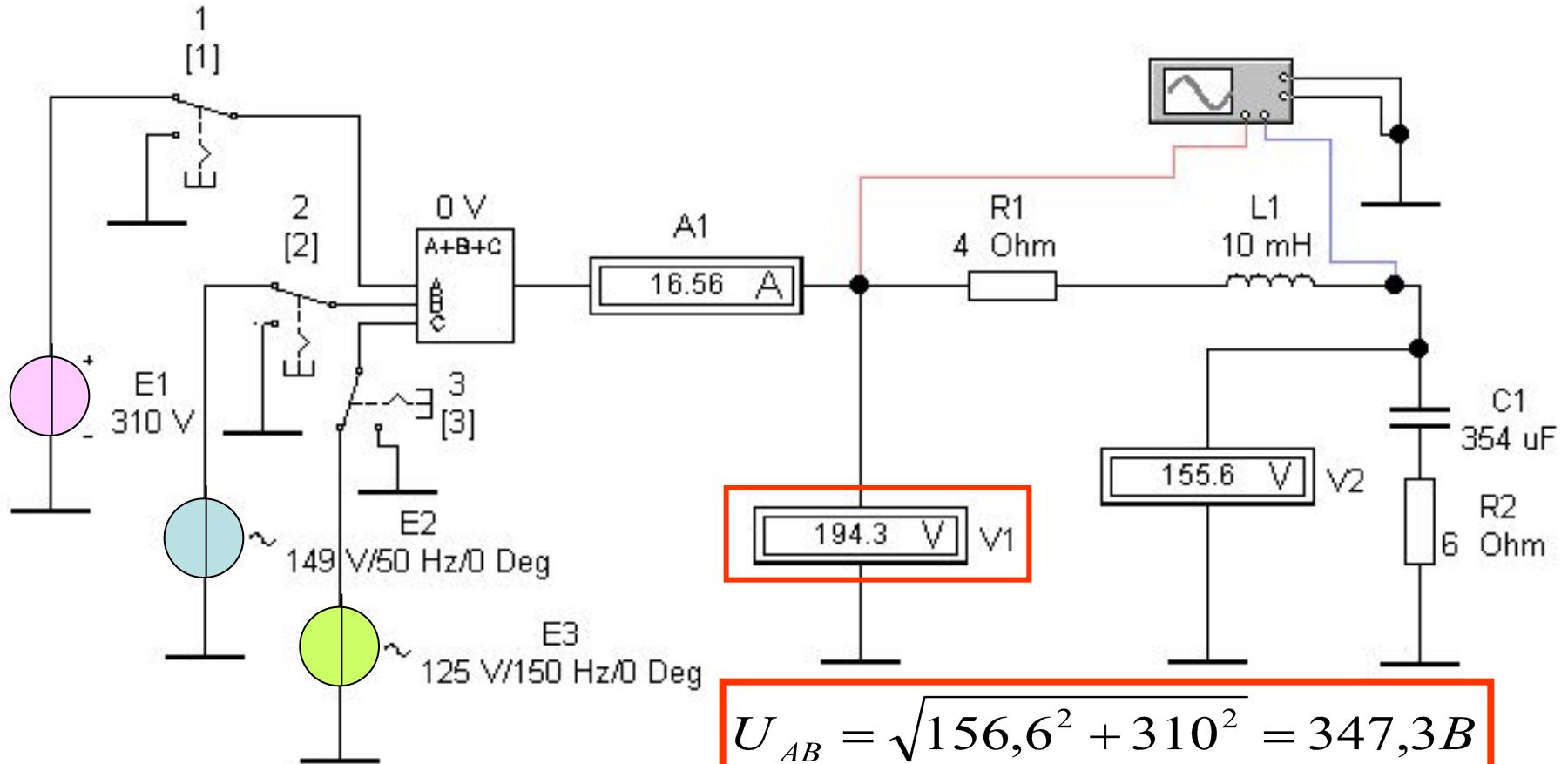
$$\langle A1 \rangle \rightarrow I = 12,87 \text{ А}$$

# Осциллограмма напряжений в схеме



## Режим измерения переменного тока

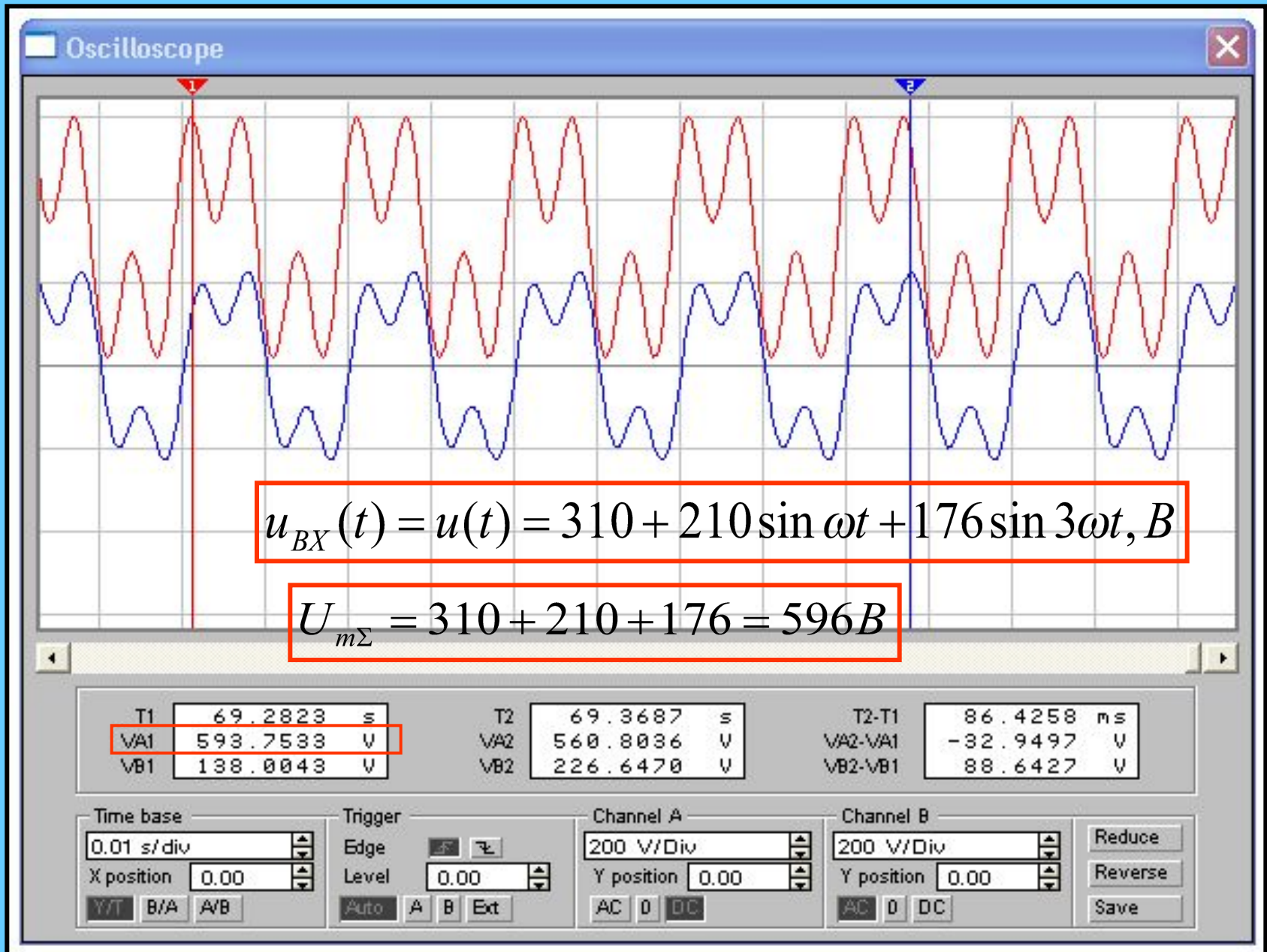
$$u(t) = 310 + 210 \sin \omega t + 176 \sin(3\omega t + 72^\circ) B$$



Приборы показывают действующие значения  $I$  и  $U$  1-й и 3-й гармоник

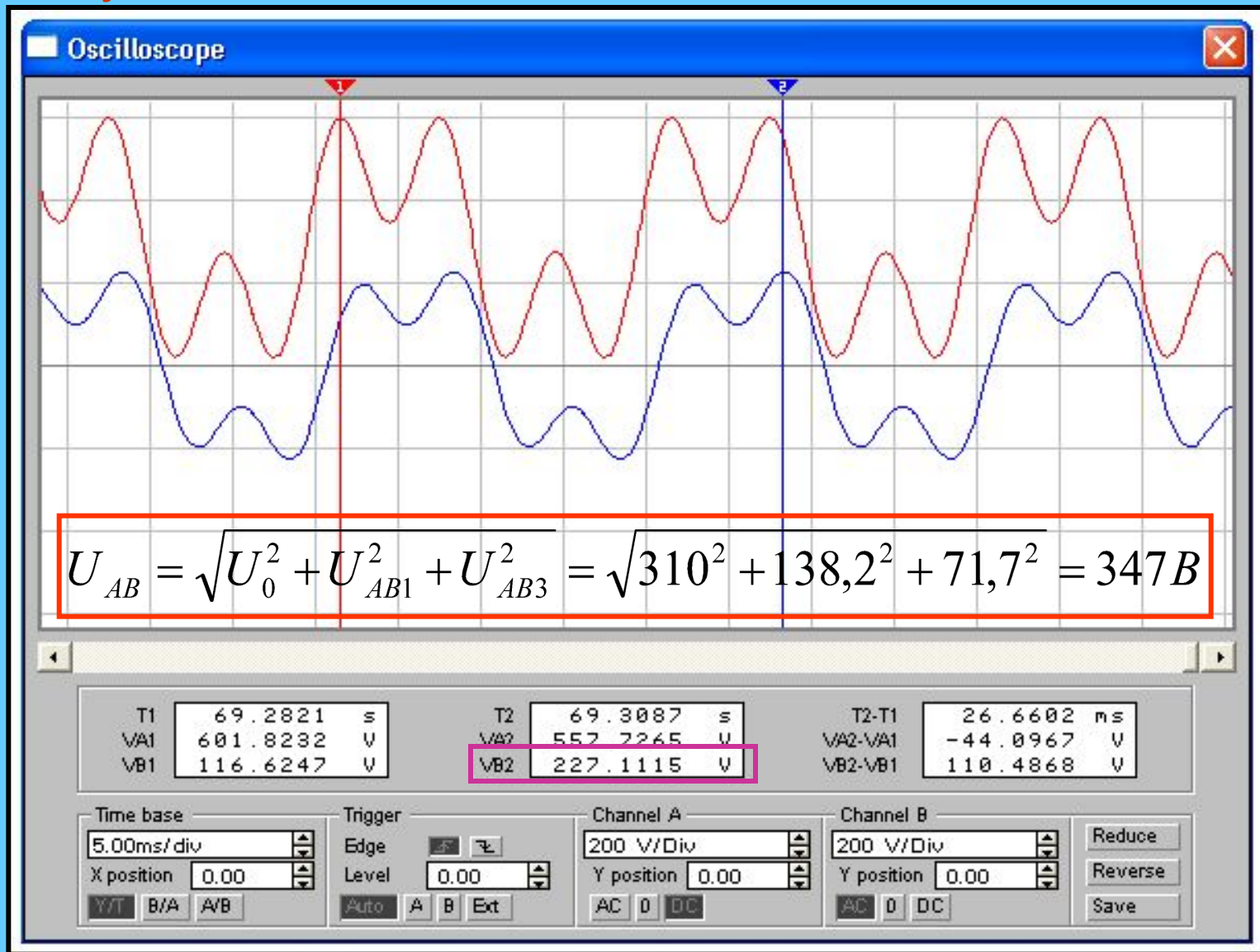
$$\langle V1 \rangle \rightarrow U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{149^2 + 125^2} = 194,48 B$$

# Режим измерения постоянного и переменного тока





# Несинусоидальные колебания на входе и выходе цепи



$$U_{AB} \rightarrow \langle VB_2 \rangle_{DC} = \frac{227,11}{1,41} = 161B$$

Сравнить и  
сделать выводы

$$U_{AB} \rightarrow \langle V_2 \rangle_{DC} = 155,6B$$

# Задание на самостоятельную работу

Изучить и освоить методы анализа и расчета линейных электрических цепей переменного тока при несинусоидальных воздействиях

## Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Страков С.В. **Основы теории цепей**: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 2004 г, с. 19 – 71.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. **Основы теории электрических цепей и электроники**: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 7 –79.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. **Электротехника**: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 22 – 81.