Кубанский государственный технологический университет

Институт информационных технологий и безопасности

Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Лекция № 16

Преобразование сигналов в цепях с нелинейными элементами

Учебные вопросы:

1. Общие положения анализа нелинейных электрических цепей при гармонических воздействиях.

2. Методы аппроксимации характеристик нелинейных элементов

3. Воздействие суммы гармонических колебаний на цепь с нелинейным элементом.

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 372 – 384.

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 263 –281.

3. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышов Э.П. Основы теории электрических цепей: *Учебник для вузов*, - СПб.: Изд-во «Лань», 2002 г, с. 356 –364.

4. Фрикс В.В. Основы теории цепей: *Учебное пособие*, - М.: ИП Радио Софт, 2002 г, с. 193 –214.

1. Общие положения анализа нелинейных электрических цепей при гармонических воздействиях.

Электрические цепи, которые рассматривались до сих пор, относились к классу линейных цепей. *Элементы таких цепей R, L и C являлтсь постоянными величинами и не зависели от воздействия.* При этом линейные цепи описывались <u>линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами</u>.

Свободные колебания в колебательном контуре

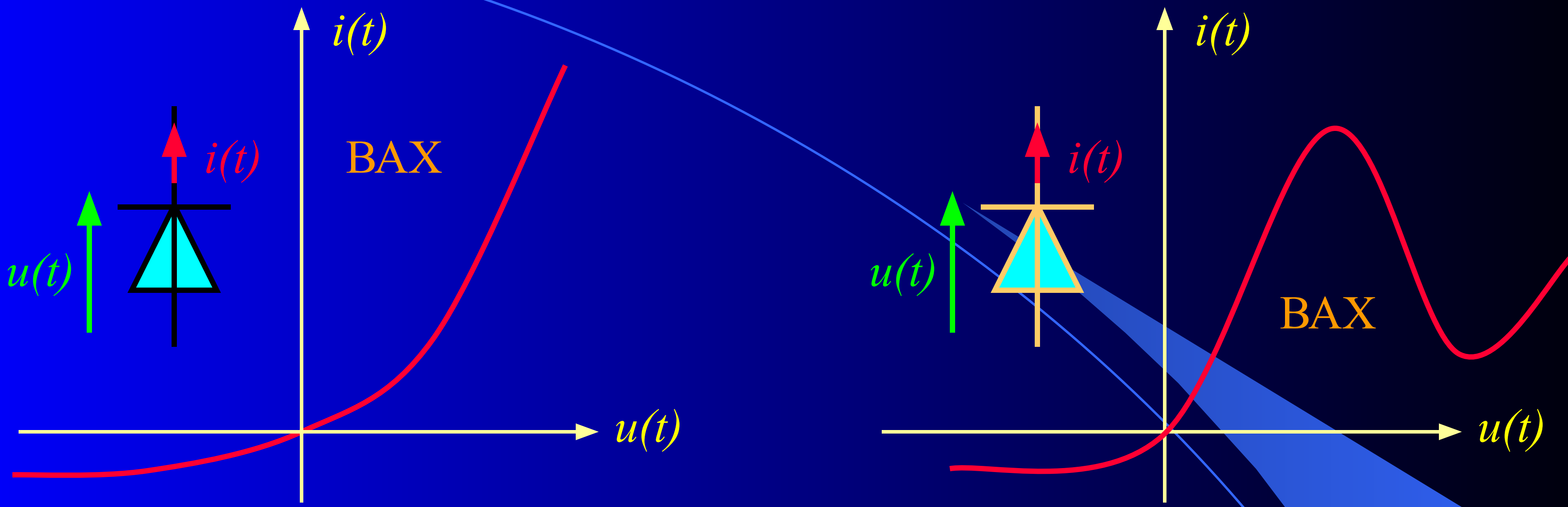
$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

Если *элементы электрической цепи зависят от воздействия*, то электрическая цепь описывается *нелинейным дифференциальным уравнением и является нелинейной.*

Свободные колебания в колебательном контуре со противление которого зависит от напряжения на емкости

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R(u_C)}{L}\cdot\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

Для нелинейного элемента характерна прежде всего <u>нелинейная зависимость между током и напряжением</u> ,т.е. *нелинейная вольт-амперная характеристика* – i(t) = f[u(t)].

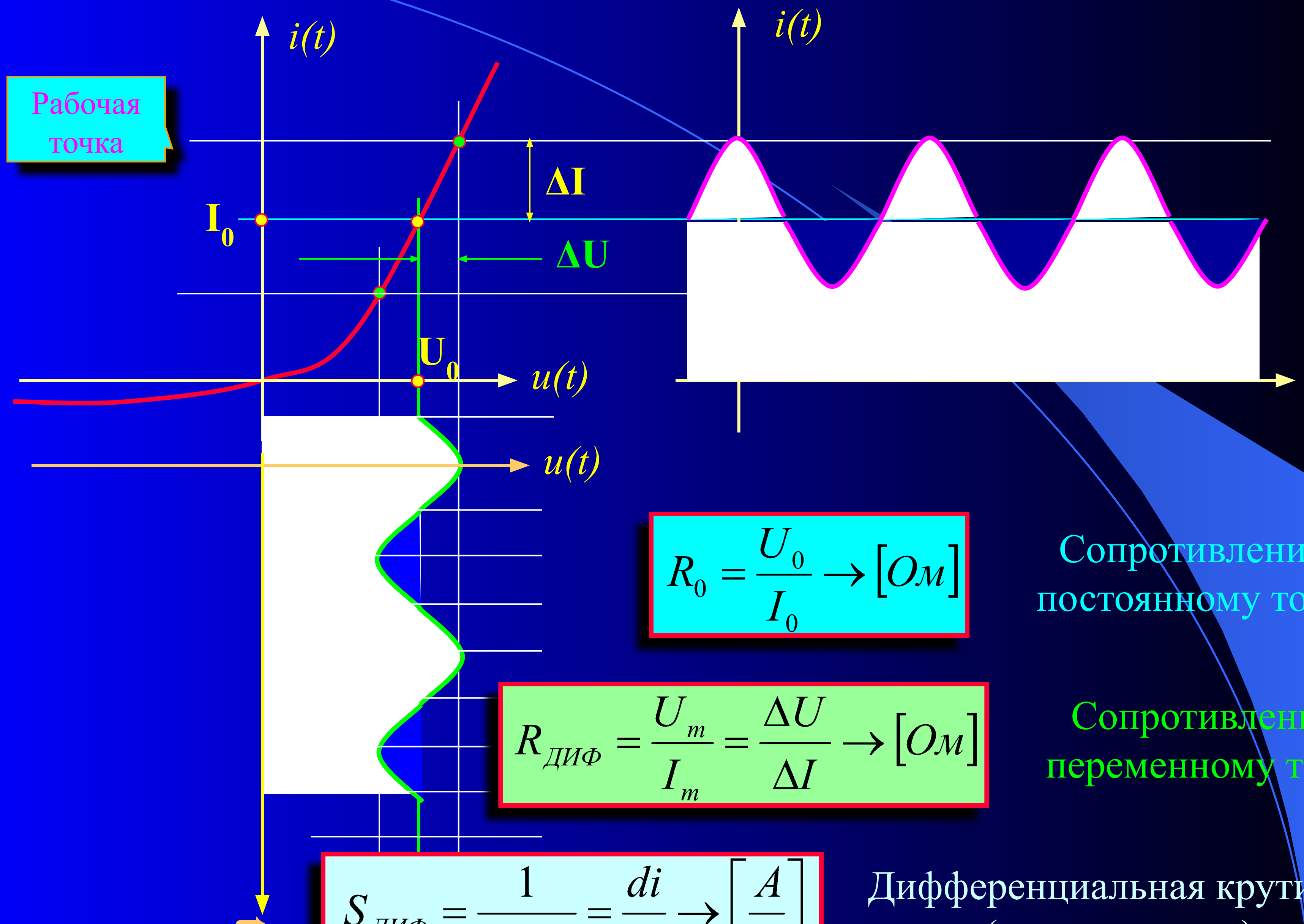


Для нелинейных элементов важным параметром является их сопротивление, которое в зависимости от линейных элементов не является постоянным, а зависит от того, в какой точке ВАХ оно определяется.

Пусть на нелинейный элемент действует напряжение $u(t) = U_0 + U_m \cdot \cos \omega t$

Амплитуда переменной составляющей достаточно мала, так что ток небольшой участок ВАХ, в пределах которого действует переменное напряжение, можно считать линейным.

Тогда ток, проходящий через нелинейный элемент, повторит по форме напряжение $i(t) = I_0 + I_m \cdot \cos \omega t$



$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} \rightarrow [Ом]$$

Сопротивление постоянному току

$$R_{ДИФ} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \rightarrow [Ом]$$

Сопротивление переменному току

$$S_{ДИФ} = \frac{1}{R_{ДИФ}} = \frac{di}{dt} \rightarrow \left[\frac{A}{B}\right]$$

Дифференциальная крутизна (проводимость)

Одной из важнейших особенностей нелинейных цепей является то, что в них не выполняется принцип суперпозиции.

При гармонических воздействиях на нелинейные цепи в последних возникает ряд явлений, которые отсутствуют в линейных электрических цепях. Поэтому методы анализа этих явлений и методы расчета имеют свои особенности.

$$i(t) = a \cdot u^2(t)$$

Квадратичная зависимость

При входном сигнале

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

Отклик (реакция) электрической цепи

$$i(t) = a \cdot [u_1(t) + u_2(t)]^2 = a \cdot u_1^2(t) + a \cdot u_2^2(t) + \underline{\underline{2 \cdot a \cdot u_1(t) \cdot u_2(t)}}$$

Отличается от суммы откликов на действие каждой составляющей в отдельности наличием компоненты 2 $u_1(t)$ $u_2(t)$, которая появляется только в случае одновременного воздействия обеих составляющих.

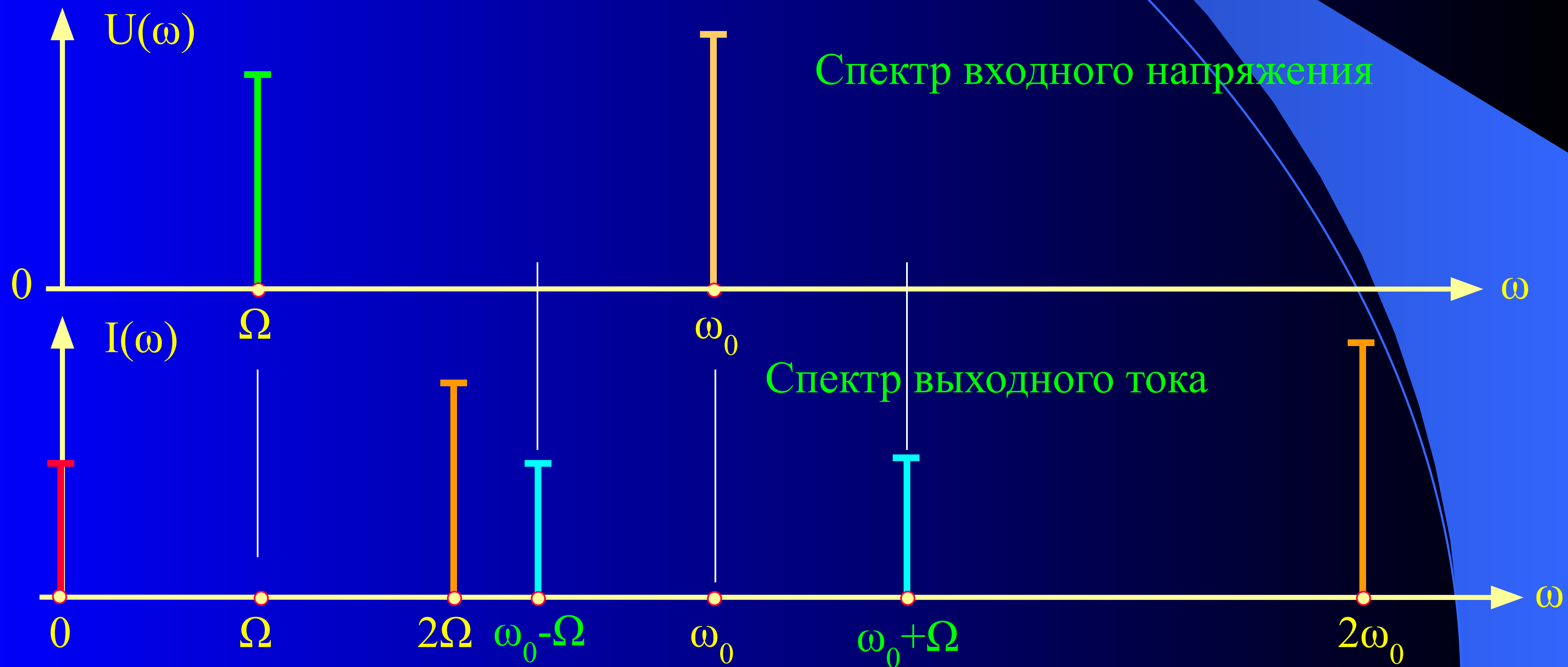
Рассмотрим вторую отличительную особенность нелинейных цепей

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=U_{m1}\cos\omega_0 t+U_{m2}\cos\Omega t$$

Тогда ток в нелинейном элементе с вольт-амперной характеристикой **i = a·u²(t)**

$$i(t)=a\cdot(U_{m1}\cos\omega_0 t+U_{m2}\cos\Omega t)^2=$$

$$=\frac{a}{2}U_{m1}^2(1+\cos 2\omega_0 t)+\frac{a}{2}U_{m2}^2(1+\cos 2\Omega t)+aU_{m1}U_{m2}\left[\cos(\omega_0+\Omega)t+\cos(\omega_0 t-\Omega)t\right]$$



2. Методы аппроксимации характеристик нелинейных элементов

Характеристики нелинейных элементов (ВАХ) как правило определяют экспериментально и представляют их в виде таблиц или графиков.

Однако на практике, пользуются сравнительно простыми аппроксимирующими функциями, удобными при аналитическом исследовании, хотя и не точно представляющими реальную характеристику.

Аппроксимацией называется нахождение аналитической функции по экспериментальным данным.

Основное требование к к аппроксимирующей функции следующее: она должна быть подобна реальной характеристике, а требования к точности аппроксимации зависят от назначения элемента.

Обозначим заданную таблично или графически ВАХ нелинейного элемента

$$i = F_{\xi}(u)$$

$$i = F(u, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N)$$

Аналитическая функция, аппроксимирующая заданную характеристику

Необходимо найти коэффициенты этой аппроксимирующей функции

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N$$

- В методе Чебышева коэффициенты a_0, a_1, … a_N функции **F(u)** находятся из условия:

$$\Lambda = \max_{u_k} \left| F(u_k) - F_\xi(u_k) \right| \rightarrow \min_{(a_0, a_1, ..., a_N)}$$

т.е. они определяются в процессе минимизации максимального уклонения аналитической функции от заданной.(u_k, **k =1, 2, 3, … ,N** –выбранные значения напряжения).

- При среднеквадратическом приближении коэффициенты a_0, a_1, … a_N функции $F_\xi(u)$ должны быть такими, чтобы минимизировать величину:

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{N} \left[F(u_k) - F_\xi(u_k) \right]^2 \rightarrow \min_{(a_0, a_1, ..., a_N)}$$

- Приближение функции по Тейлору основано на представлении функции **F(u)** рядом Тейлора в окрестности точки $u = U_0$:

$$i = F(u) = F(U_0) + \frac{F'(U_0)}{1!}(u - U_0) + \frac{F''(U_0)}{2!}(u - U_0)^2 + \ldots$$

Наиболее распространенным способом приближения заданной функции является **метод интерполяции** (*метод выбранных точек*) при которой коэффициенты $\mathbf{a_0, a_1, \ldots a_N}$ функции **F(u)** находятся из равенства этой функции и заданной $\mathbf{F_\xi(u)}$ в выбранных точках (*узлах интерполяции*) $u_k = 1, 2, \ldots N+1$:

- Степенная (полиномиальная) аппроксимация

Если характеристика нелинейного элемента имеет вид гладкой кривой i = f(u), (кривая и ее производные непрерывны), то такая кривая может быть представлена степенным полиномом (рядом).

При качественном рассмотрении нелинейных цепей ограничиваются полиномами второй или третьей степени..

При таком подходе используется степенной полином вида:

$$i(t) = F(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \ldots + a_N(u - U_0)^N$$

где коэффициенты $\mathbf{a_0, a_1, \ldots a_N}$ можно находить различными способами

Степенная аппроксимация широко используется при анализе работы нелинейных устройств, на которые подаются относительно малые внешние воздействия, поэтому требуется достаточно точное воспроизведение нелинейности характеристики в окрестности *рабочей точки* (U_0).

Пример: Аппроксимируем характеристику i = F(u) полевого транзистора полиномом второй степени на интервале $-1{,}5 < u < -0{,}5$ В при $U_0 = -1$ В.

u, В	-1,5	-1	-0,5
i, mA	0,5	1	2,5

ВАХ транзистора

Решение: Для аппроксимации используем полином второй степени

$$i(t) = F(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 найдем используя метод интерполяции. Выберем в качестве узлов интерполяции точки, соответствующие напряжениям u = -1,5; -1; и –0,5 В и составим систему уравнений.

$$\begin{cases} a_0 + a_1(-1{,}5+1) + a_2(-1{,}5+1)^2 = 0{,}5 \\ a_0 + a_1(-1+1) + a_2(-1+1)^2 = 1{,}0 \\ a_0 + a_1(-0{,}5+1) + a_2(-0{,}5+1)^2 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 - 0{,}5a_1 + 0{,}25a_2 = 0{,}5 \\ a_0 = 1{,}0 \\ a_0 + 0{,}5a_1 + 0{,}25a_2 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$a_0 = 1мА$$

$$a_1 = 2мА/В$$

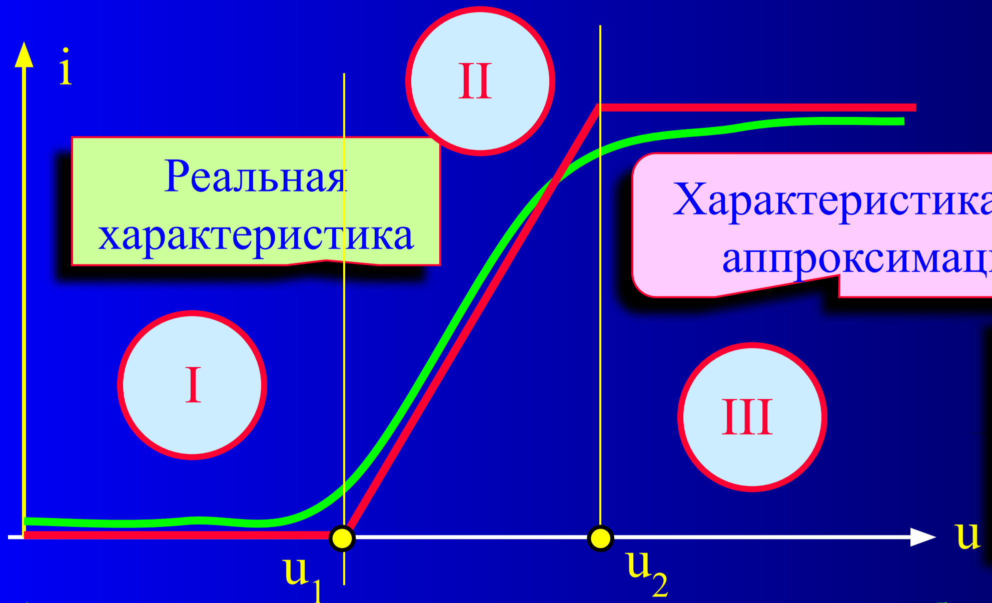
$$a_2 = 2мА/В^2$$

$$i(t) = 5 + 6u + 2u^2$$

Кусочно-линейная аппроксимация

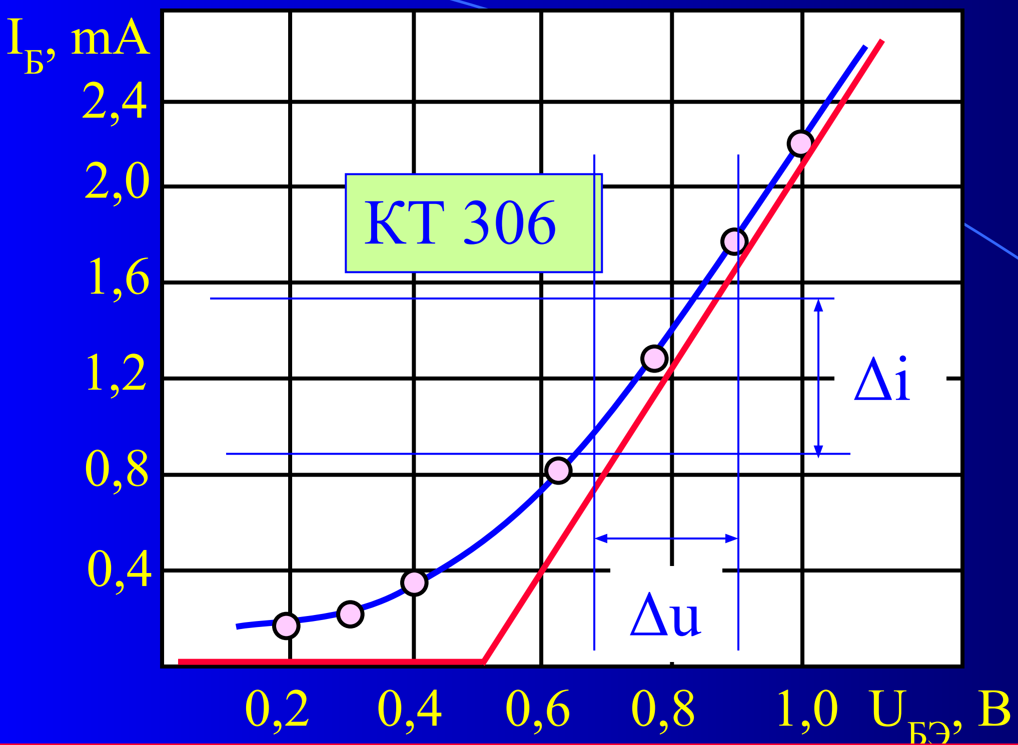
В тех случаях,когда на нелинейный элемент воздействуют напряжения с большими амплитудами, целесообразно допустить более приближенную замену характеристики нелинейного элемента и использовать более простые аппроксимирующие функции.

Наиболее часто при анализе работы нелинейного элемента в таком режиме реальная характеристика заменяется отрезками прямых линий с различными наклонами.



$$i = \begin{cases} 0, \to при \to u \le u_1 \\ a_0 + a_1 \cdot u, \to при \to u_1 \le u \le u_2 \\ I_{max}, \to при \to u \ge u_2 \end{cases}$$

Аппроксимирующую характеристику разбивают на ряд участков и для каждого проводят отрезок прямой. В аналитическое выражение наряду с уравнениями прямых входят также и граничные значения переменных, указывающие интервал действия конкретного уравнения.



Используя полином первой степени $\mathbf{i_Б = a_0 + a_1 (u - U_0)}$ аппроксимацию заданной зависимости в окрестности точки $\mathbf{U_0 = 0{,}8\ В}$ и определим коэффициенты <u>по методу Тейлора</u>

$$S(U_0) = \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{0{,}68}{0{,}2} = 3{,}4mA/B$$

$$i = f(U_0) + \frac{f'(U_0)}{1!}(u - U_0) = I_0 + S(U_0)\cdot(u - U_0)$$

В результате аппроксимации имеем

$$i = 1{,}2 + 3{,}4(u - 0{,}8) = 3{,}4(u - 0{,}45)$$

$$i = \begin{cases} 0, u \le 0{,}5B \\ 3{,}4(u - 0{,}45), u > 0{,}5B \end{cases}$$

Аналитическая запись аппроксимирующей функции

3. Воздействие суммы гармонических колебаний на цепь с нелинейным элементом.

- <u>Спектральный состав тока при бигармоническом воздействии</u>

Бигармоническим воздействием называется сигнал, состоящий из суммы двух гармонических колебаний с различными частотами $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ и амплитудами $\mathbf{U_{m1}}$ и $\mathbf{U_{m2}}$.

$$u(t) = U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos\omega_2 t$$

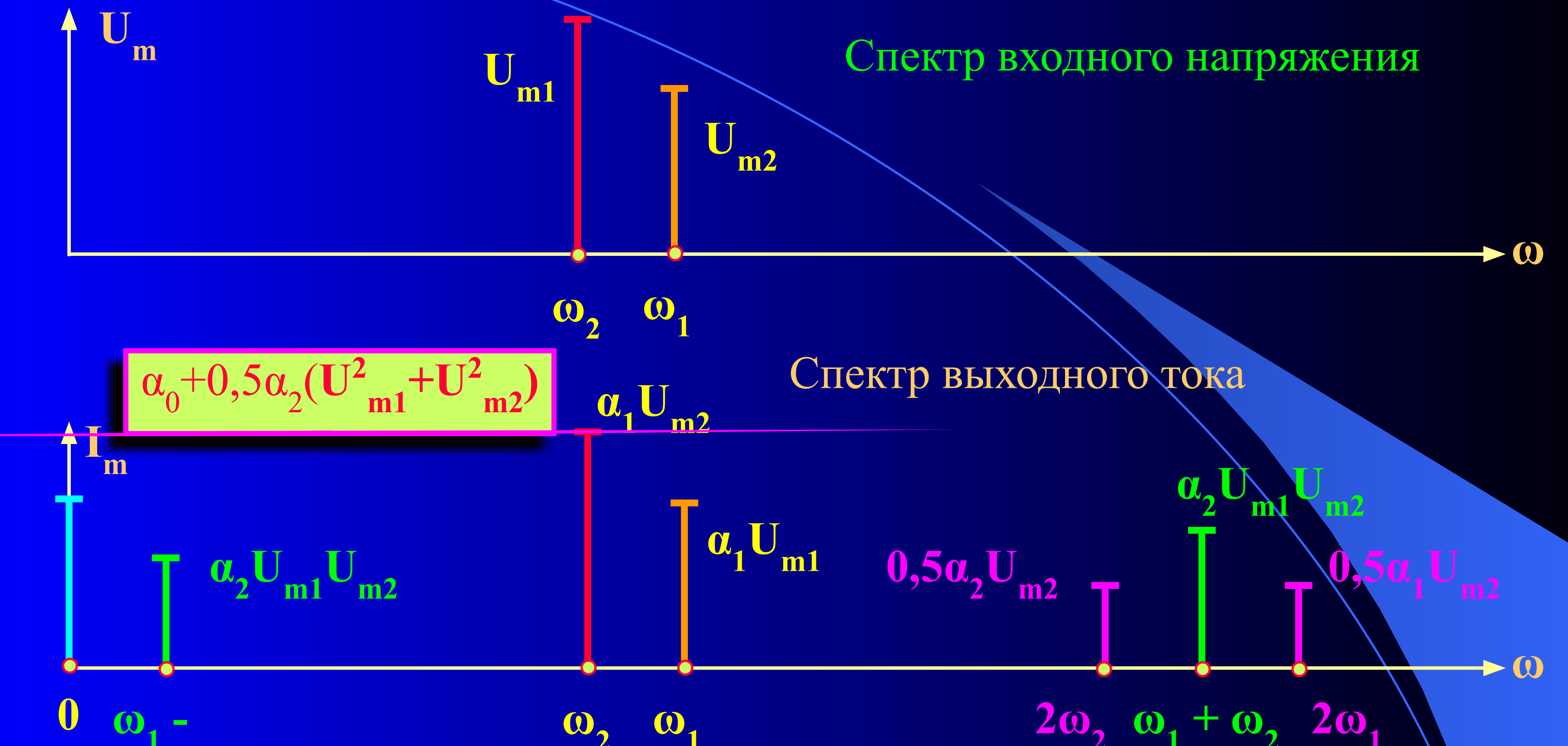
<u>Постановка задачи:</u> *Пусть на вход нелинейного элемента, ВАХ которого аппроксимирована полиномом второй степени* $i(t) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2$, *подано напряжение смещения и бигармонический сигнал.*

Определим ток в цепи нелинейного элемента в виде:

$$i = a_0 + a_1 U_{m1}\cos\omega_1 t + a_1 U_{m2}\cos\omega_2 t + a_2 U_{m1}^2\cos^2\omega_1 t + a_2 U_{m2}^2\cos^2\omega_2 t + \\ + 2a_2 U_{m1} U_{m2}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$$

$$i(t) = \left[a_0 + \frac{a_2}{2}(U^2{}_{m1} + U^2{}_{m2})\right] + a_1 U_{m1}\cos\omega_1 t + a_1 U_{m2}\cos\omega_2 t + \frac{a_2 U^2{}_{m1}}{2}\cos 2\omega_1 t + \\ + \frac{a_2 U^2{}_{m2}}{2}\cos 2\omega_2 t + a_2 U_{m1} U_{m2}\cos(\omega_1 + \omega_2)t + a_2 U_{m1} U_{m2}\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

Рассмотрим спектральный состав тока



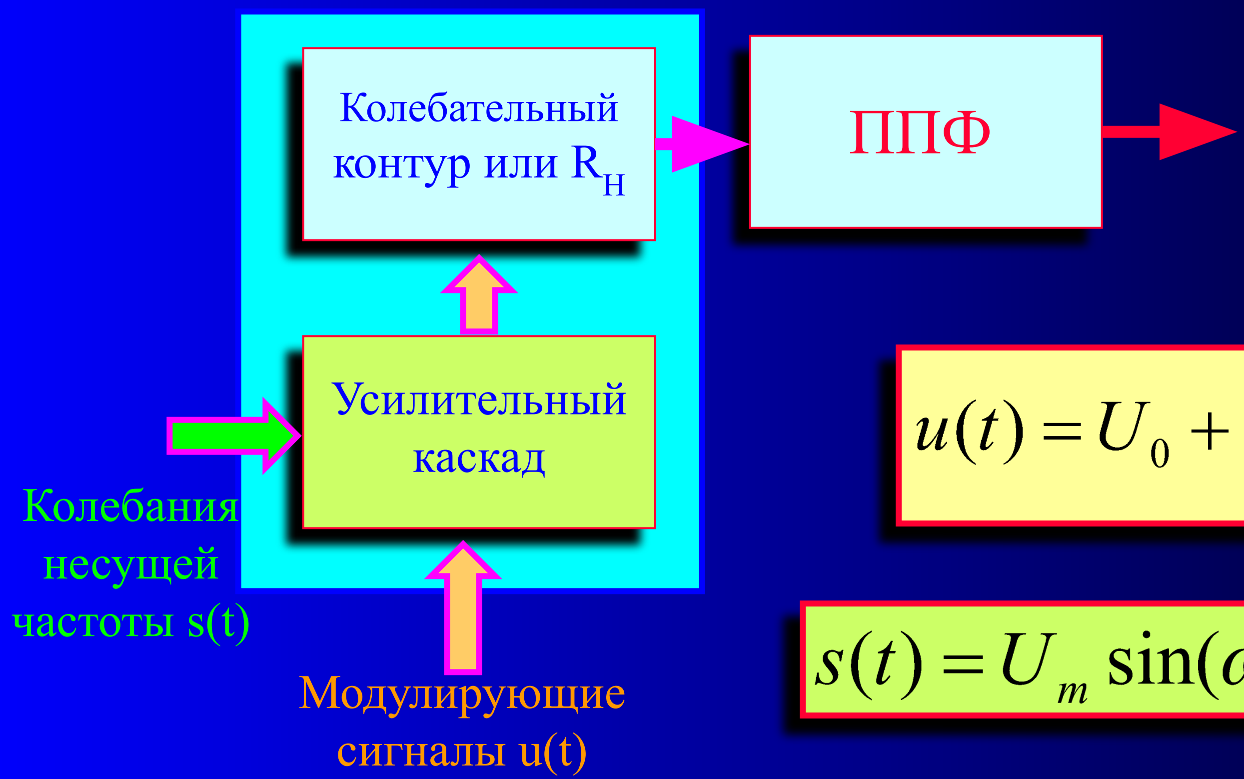
Принципиально новым по сравнению с воздействием на нелинейный элемент одного гармонического колебания здесь является *появление спектральных составляющих с комбинационными частотами* $\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$.

Если ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована в общем случае полиномом степени N, то в спектральном составе тока будут присутствовать составляющие с комбинационными частотами $p\omega_1 \pm q\omega_2$, где **p** и **q** (0,1,2,.. R).

❑ Спектральный состав тока при преобразовании частоты

При передаче электрических сигналов на расстояние часто возникает необходимость переносить спектр сигнала вверх или вниз по шкале частот. Такой перенос спектра называется *преобразованием частоты*.

Необходимость в преобразовании частот возникает, например, когда спектр сигнала, который нужно передать, расположен на шкале частот *значительно ниже полосы пропускания системы передачи*.



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\Omega t + \varphi_k)$$

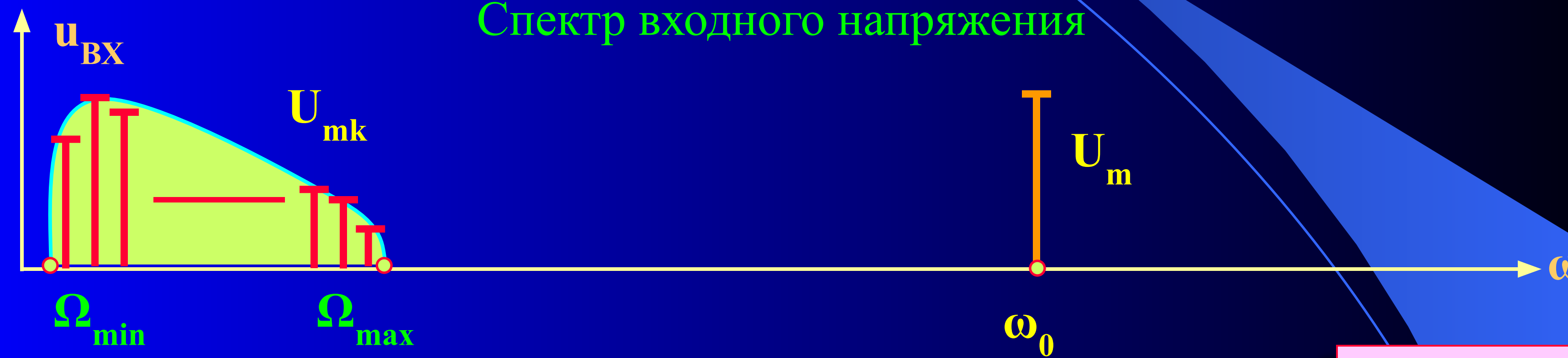
$$s(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \phi); \rightarrow \omega_0 \gg \Omega$$

Напряжение на входе нелинейного элемента (вход усилительного каскада)

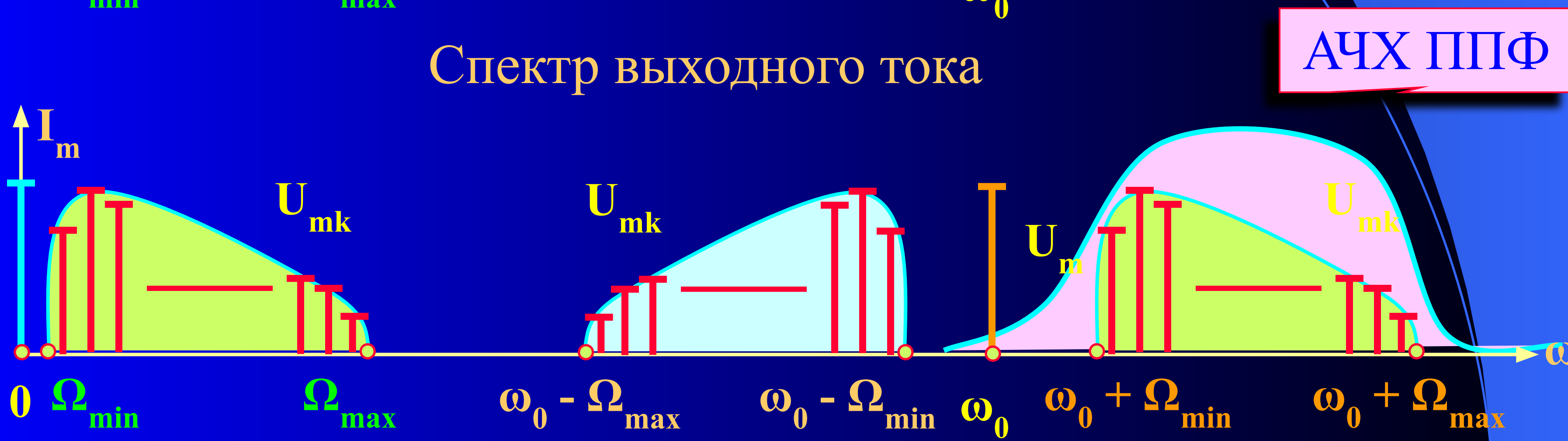
$$u_{BX}(t) = u_{БЭ} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\Omega t + \varphi_k) + U_m \sin \omega_0 t + \phi$$

$$i_K(t) = F_\xi(u_{БЭ}) = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0) + a_2(u_{БЭ} - U_0)^2$$

Спектр входного напряжения



Спектр выходного тока



Задание на самостоятельную работу

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 372 – 384.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 263 –281.
3. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышов Э.П. Основы теории электрических цепей: *Учебник для вузов*, - СПб.: Изд-во «Лань», 2002 г, с. 356 –364.
4. Фрикс В.В. Основы теории цепей: *Учебное пособие*, - М.: ИП Радио Софт, 2002 г, с. 193 –214.