**Кубанский государственный технологический университет**

**Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности**

Учебная дисциплина

# Электротехника и электроника

## Лекция № 4

# Основы однофазных электрических цепей переменного тока

## *Учебные вопросы:*

1. Гармонические колебания. Основные понятия и определения.
2. Интегральные оценки гармонических (синусоидальных) колебаний
3. Способы представления гармонических колебаний.
4. Особенности **символического метода анализа** цепей переменного тока

## ***Литература:***


1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 61 –84.

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 37 –54.

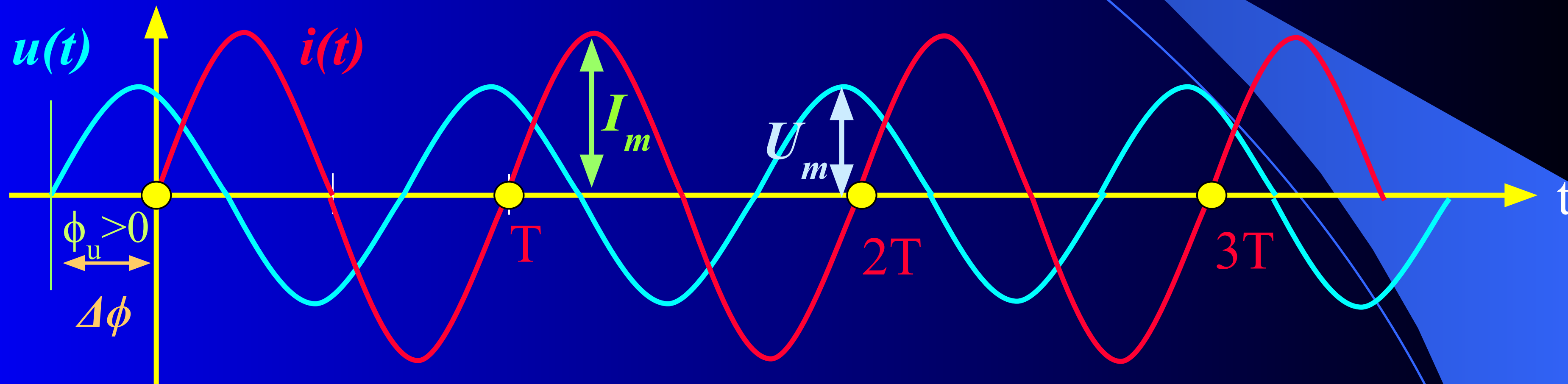
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

# 1. Гармонические колебания. Основные понятия и определения

***Гармоническим колебанием*** называют колебания, изменяющиеся по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$$




## Параметры гармонических колебаний

$I_m, U_m$ – амплитуда тока или напряжения ($I_m, U_m$) = const

$(\omega t + \phi_I), (\omega t + \phi_u)$ – полная фаза (фазовый угол), фаза, *рад*

$$f = \frac{1}{T}, \text{Гц}$$

$$\omega = \frac{d(\omega \cdot t + \varphi_u)}{dt}$$

Угловая частота, *рад/с.*

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

При совместном рассмотрении двух гармонических колебаний одинаковой частоты разность их фаз, равную разности их начальных фаз обычно называют **сдвигом фаз** и обозначают ***Δϕ*** или ***ϕ*.**

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$\Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\Delta\varphi = \varphi = 0$$

Колебания синфазные (совпадают по фазе)

$$\Delta\varphi = \varphi = \pm\pi$$

Колебания противофазные

$$\Delta\varphi = \varphi = \pm{}^{\pi}\!/_{2}$$

Колебания находятся в квадратуре

$$\Delta\varphi = \varphi > 0, \rightarrow т.е. \rightarrow \varphi_u > \varphi_i$$

**Напряжение опережает ток по фазе**

**Напряжение отстает от тока по фазе**

$$\Delta\varphi = \varphi < 0, \rightarrow т.е. \rightarrow \varphi_u < \varphi_i$$

Для питания различных электроэнергетических установок в России принята промышленная частота f = 50 Гц. В качестве источников гармонических колебаний промышленной частоты используются электромашинные генераторы

$$f = p_p \cdot n / 60$$

*где* ***$p_p$*** *число пар полюсов ротора,* ***n*** *– (об.мин) – скорость вращения ротора.*

## 2. Интегральные оценки гармонических (синусоидальных) колебаний

В практической электротехнике для оценки прежде всего энергетических возможностей переменного тока вводятся понятия **действующего** (среднеквадратического) и **среднего значения** переменного тока за период.

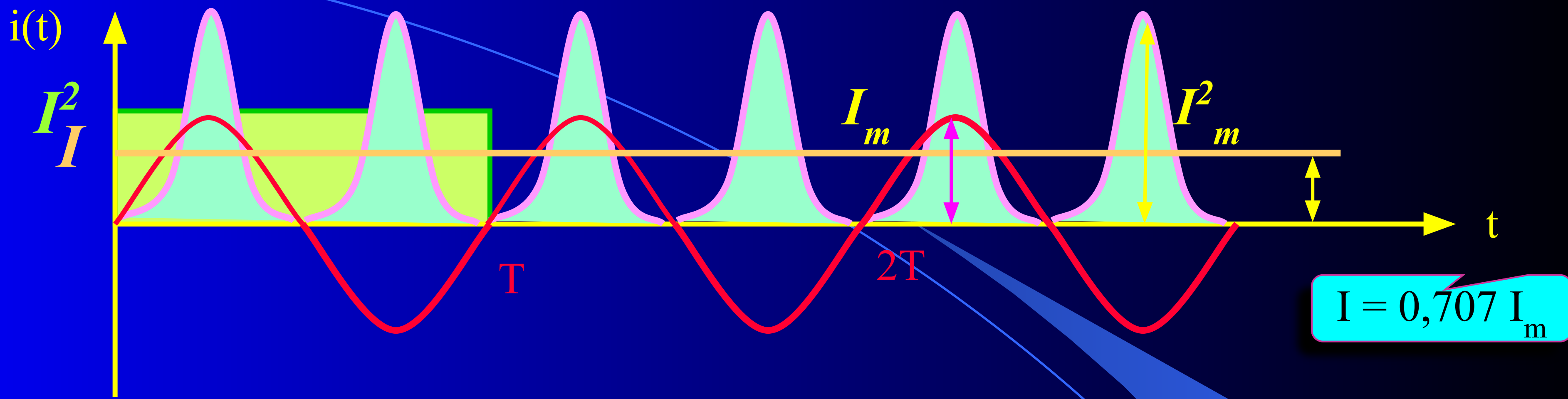
**Определение 1.** ***Действующим (его также называют эффективным или среднеквадратическим) значением периодического тока i(t) называют такой постоянный ток I, который в одном и том же сопротивлении R за время одного периода T тока i(t) выделяет равное с переменным током количества тепла***

$$\int_0^T p(t)dt = \int_0^T R\cdot i^2(t)dt = R\int_0^T i^2(t)dt = R\cdot T\cdot I^2$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Действующее значение **переменного тока (напряжения)**

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$




*Установим связь между действующим значением **I** и амплитудой $\boldsymbol{I_m}$ для тока i(t)*

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\sin^2(\omega t+\varphi_i)dt}=\sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\left[1-\cos 2(\omega t+\varphi_i)\right]dt}=$$

$$=\sqrt{\frac{I_m^2}{T}\left[\int_0^T dt-\underbrace{\int_0^T\cos 2(\omega t+\varphi_i)dt}\right]}=\sqrt{\frac{I_m^2}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0{,}707\cdot I_m$$

$$\boxed{I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}}\quad \boxed{I=0{,}707\,I_m}\quad \boxed{U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}}\quad \boxed{U=0{,}707\,U_m}\quad \boxed{E=\frac{E_m}{\sqrt{2}}}$$

***Пример:*** Пусть действующее значение напряжения ***U = 220 В,*** в этом случае амплитуда этого напряжения $U_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 311$ ***В***.

Действующее (или эффективное) значение переменного тока – это значение переменного тока, эквивалентное постоянному току по тепловому воздействию

*Действующие значения синусоидальных токов, напряжений и ЭДС измеряются приборами **<u>электромагнитной</u>** и **<u>электродинамической</u>** систем.*

*При расчете электрических цепей переменного тока и их исследованиях чаще всего пользуются **действующими** (эффективными) значениями тока, напряжения и ЭДС.*

Среднее значение переменного тока эквивалентно постоянному току по количеству электричества ***Q,*** *проходящему через поперечное значение проводника* за определенный промежуток времени

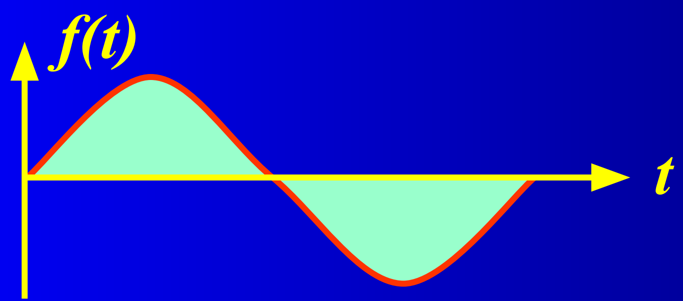
**Определение 2.** **Средним значением $I_{CP}$ периодического тока *i(t)* называют среднее значение тока за положительный полупериод, совпадающее со средним значением по модулю.**

$$U_{CP}=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}u(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}U_m\sin(\omega t+\varphi_u)dt=\frac{2U_m}{\pi}=0{,}637\cdot U_m$$

*Средние значения синусоидальных токов, напряжений и ЭДС измеряются приборами* ***магнитоэлектрической систем*** **совместно с выпрямительными устройствами.**

$$F_{CP}=\frac{1}{T}\int_0^{T}f(t)dt$$

Для гармонически изменяющихся токов и напряжений среднее значение за период равно нулю, так как площадь за период равна нулю.




$$\boxed{I_{CP}=0{,}637\cdot I_m}\qquad \boxed{U_{CP}=0{,}637\cdot U_m}$$

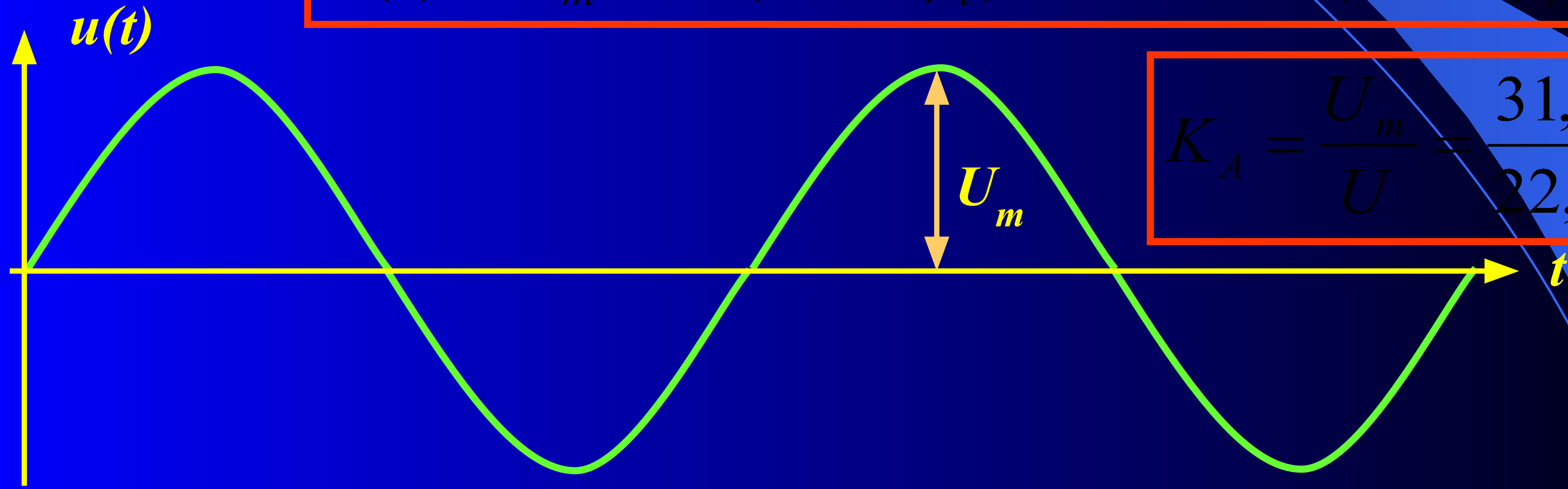
$$\boxed{E_{CP}=0{,}637\cdot E_m}$$

Отклонения кривых периодических токов и напряжений от синусоидальной формы характеризуется *коэффициентом амплитуды* $К_А$ и *коэффициентом формы* $К_Ф$

$$K_A = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U}$$

$$K_Ф = \frac{I}{I_{CP}} = \frac{U}{U_{CP}}$$

$$u(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = 31{,}4 \sin(\omega t + \varphi_i)$$




$$K_A = \frac{U_m}{U} = \frac{31{,}4}{22{,}2} = 1{,}41$$

$$U = 0{,}707 \cdot U_m = 0{,}707 \cdot 31{,}4 = 22{,}2 B$$

$$U_{CP} = 0{,}637 \cdot U_m = 0{,}637 \cdot 31{,}4 = 20{,}0 B$$

$$K_Ф = \frac{U}{U_{CP}} = \frac{22{,}2}{20} = 1{,}11$$

Определим мгновенную мощность гармонического колебания в пассивном линейном двухполюснике.

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)\cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{2} U_m I_m \left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right] = \underbrace{U \cdot I \cos(\Delta\varphi)}_{\text{Постоянная составляющая}} - \underbrace{U \cdot I \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{Переменная составляющая}}$$

Мгновенная мощность положительна, когда ток и напряжение имеют одинаковые знаки (энергия поступает от источника в нагрузку), и отрицательна если знаки напряжения и тока разные (энергия возвращается источнику).

Определим среднюю мощность гармонических колебаний

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[UI\cos(\Delta\varphi) - UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]dt =$$

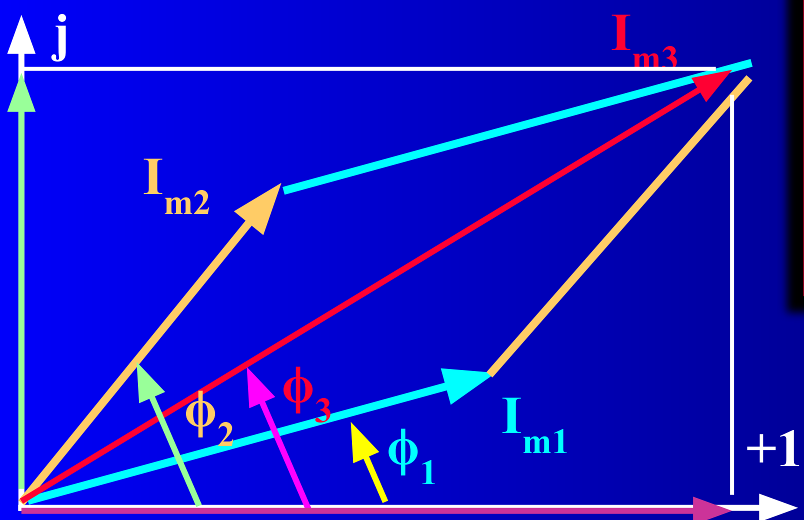
$$= \frac{UI}{T}\cos(\Delta\varphi)\int_0^T dT - \frac{UI}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)dt = U\cdot I\cdot\cos(\Delta\varphi)$$

$\boldsymbol{P} \Rightarrow$ [Вт]

В пассивных электрических цепях Р > 0, разность фаз **- π/2< Δφ < π/2**

# 3. Способы представления гармонических колебаний.

Гармонические колебания можно представить различными способами: функциями времени (***временное представление***), вращающимися векторами (***векторное представление***), **комплексными числами**, амплитудными и фазовыми спектрами (***спектральное представление***).



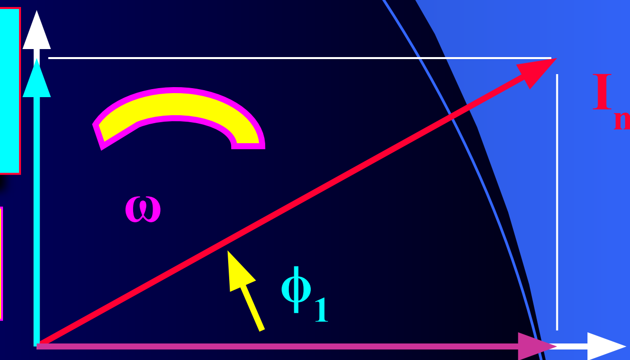

$$I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\varphi_3 = arctg\,\frac{I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2}{I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi}$$

Наиболее распространенными являются представление гармонических колебаний с помощью ***комплексных чисел***

$$\mathrm{Im}\left\{\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

**Мнимая часть**




$$i(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m\cos(\omega t + \varphi_i) + jI_m\sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

*Комплексная амплитуда тока*

$$\mathrm{Re}\left\{\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

**Действительная часть**

## Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$$\dot{U} = x + jy = r[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$$

$$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi)$$

## Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексных чисел

$$\dot{U} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \exp(j\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + jb^2} \geq 0 \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a}$$

$$\dot{u}(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi) + jU_m\sin(\omega t + \varphi) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$$

**Комплексное действующее значение**

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = U \cdot e^{j\varphi}$$

## Комплексная форма записи *законов Ома и Кирхгофа*

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}};\ \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{Z}_k \cdot \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$$

***Пример:*** **Представить комплексный ток, заданный в алгебраической форме**

$$\dot{I} = (4 + j3)$$

**в тригонометрической и показательной формах записи**

**Р е ш е н и е.**

**Действующее значение тока (модуль комплексного тока)**

$$I = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5A$$

**Аргумент комплексного тока**

$$tg\varphi_i = 3/4 = 0{,}75$$

$$\varphi_i = arctg(3/4)$$

$$\varphi_i = 36^{\circ}50$$

***Тригонометрическая форма записи комплексного тока***

$$\dot{I} = (4 + j3) = I(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i) = 5(\cos 36^{\circ}50' + j\sin 36^{\circ}50')A$$

***Показательная форма записи комплексного тока***

$$\dot{I} = (4 + j3) = I \cdot \exp(j\varphi_i) = I \cdot e^{j\varphi_i} = 5 \cdot \exp(j36^{\circ}50') = 5 \cdot e^{j36^{\circ}50'} A$$

# 4. Особенности **символического метода анализа** цепей переменного тока

При расчетах электрических цепей переменного тока широко используется метод комплексных амплитуд (составляющий основу ***символического метода анализа***)

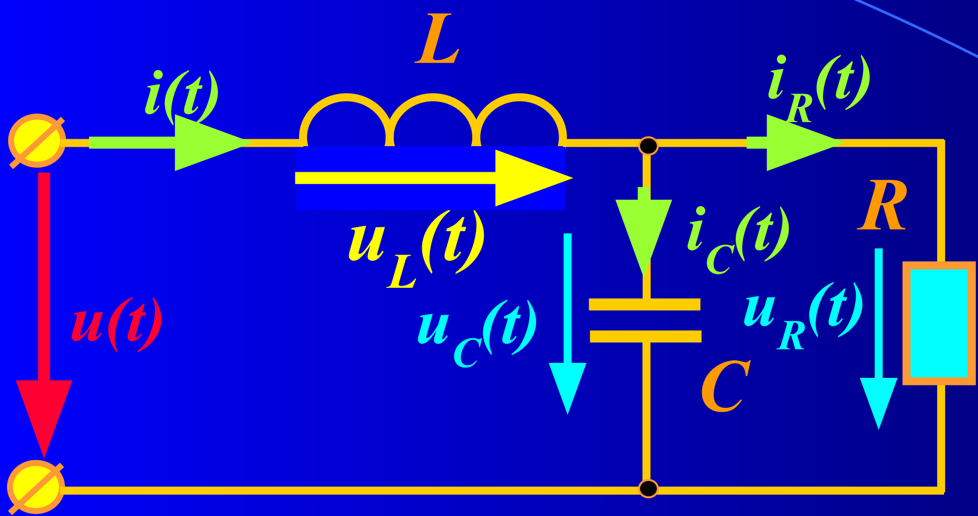
$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi_i} \qquad \dot{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \qquad \dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi_u} \qquad \dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$$

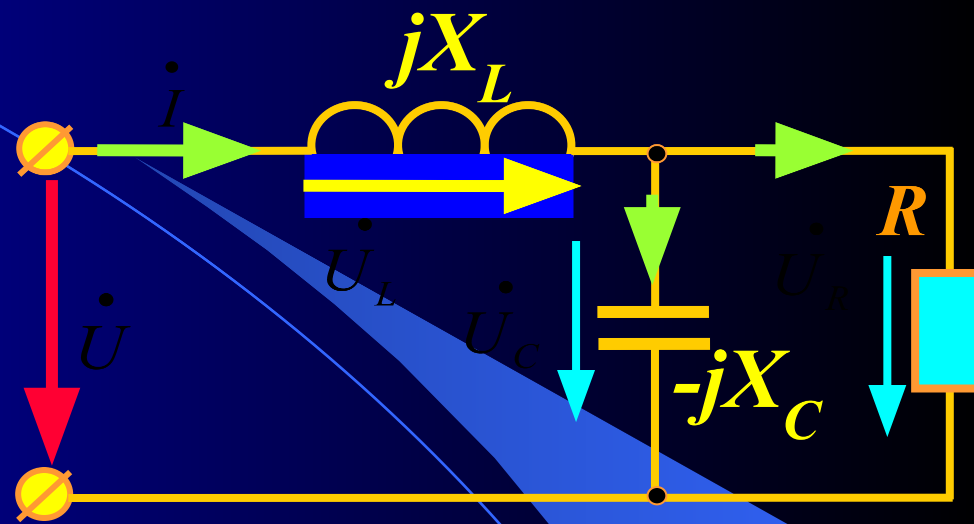
**При таком подходе методы расчета ЭЦ переменного тока аналогичны методам расчета ЭЦ постоянного тока.**

***Записи соответствующих уравнений, составленных по законам Ома и законам Кирхгофа одинаковы по форме для ЭЦ однофазного переменного тока и постоянного тока***

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Рассмотрим пример использования **символического метода анализа** для цепи переменного тока




Система уравнений для мгновенных значений *i(t)* и *u(t)*

$$\begin{cases} i - i_R - i_C = 0 \\ L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i dt = u \\ R \cdot i_R - \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i dt = 0 \end{cases}$$

Переход к символическому методу записи

Система уравнений для комплексных действующих значений токов и напряжений

$$\begin{cases} \dot I - \dot I_R - \dot I_C = 0 \\ jX_L \cdot \dot I - jX_C \cdot \dot I_C = \dot U \\ R \cdot \dot I_R + jX_C \cdot \dot I_C = 0 \end{cases}$$

# Задание на самостоятельную работу

***<u>Литература</u>:***


1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 61 –84.

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 37 –54.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.