Гармонические колебания

Лекция 1

План лекции

- Квазиупругие силы
- Незатухающие гармонические колебания
- Затухающие гармонические колебания
- Вынужденные колебания
- Резонанс
- Автоколебания
- Энергия гармонических колебания
- Сложение гармонических колебаний

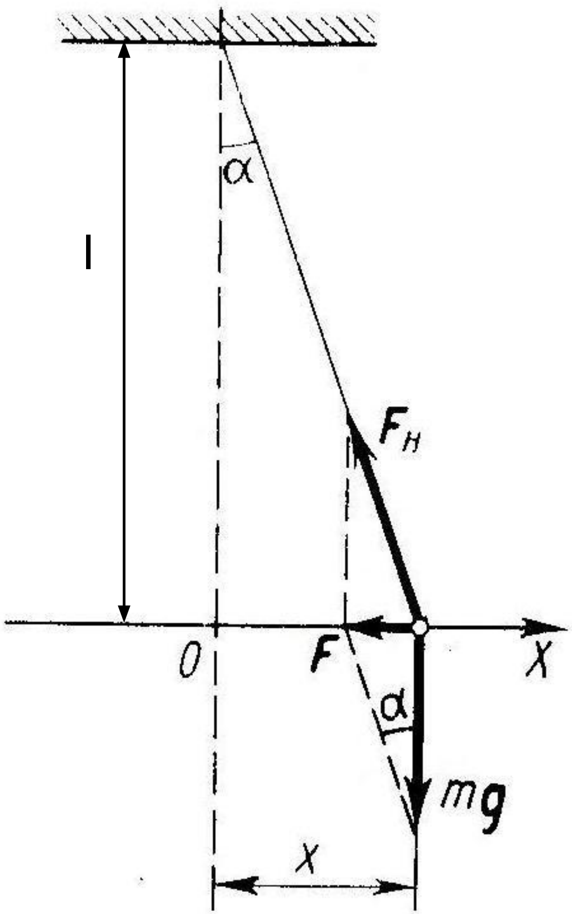
Определение:

Колебания, которые совершаются по закону синуса или косинуса называются **гармоническими.**

Свободные или собственные колебания

Колебания, совершаемые под действием собственных сил без внешнего воздействия, только при наличии начального смещения называются свободными или собственными

Незатухающие колебания



$$\alpha \approx \sin\alpha \approx tg\alpha \approx \frac{x}{l}$$

$$F = -mg \cdot tg\alpha = -mg\frac{x}{l} = -kx$$

$$k = \frac{mg}{l}$$

Квазиупругая сила

Силы, неупругие по природе, но аналогичные по свойствам силам, возникающим при малых деформациях упругих тел, называют квазиупругими.

$$F = -kx$$

Дифференциальное уравнение незатухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

Решение

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

или

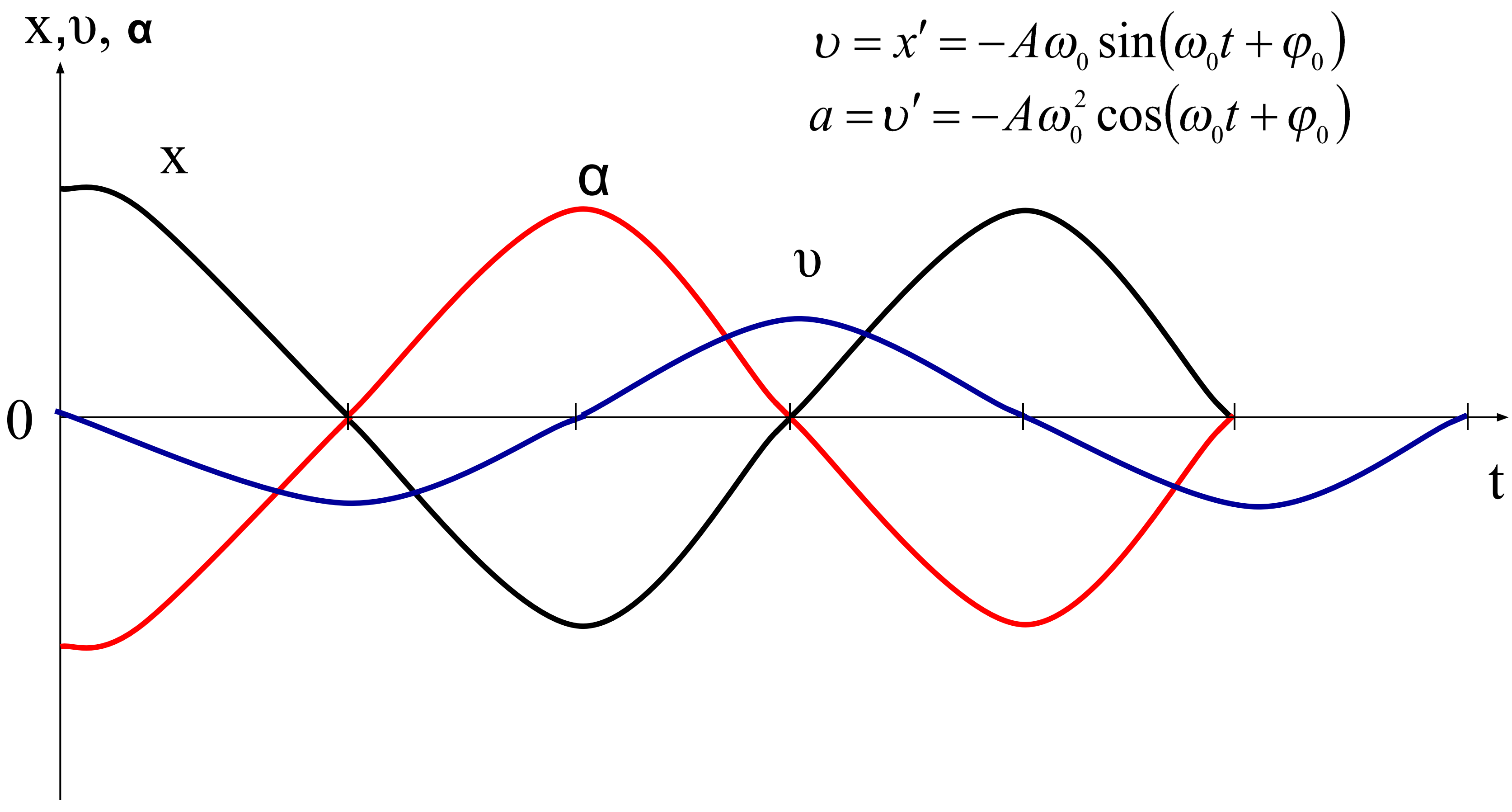
$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Временные графические зависимости

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = \upsilon' = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Затухающие колебания

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_{TP}$$

$$F_{TP} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt}$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m};$$

β – коэффициент затухания; ω_0 – круговая частота собственных колебаний системы.

Решение

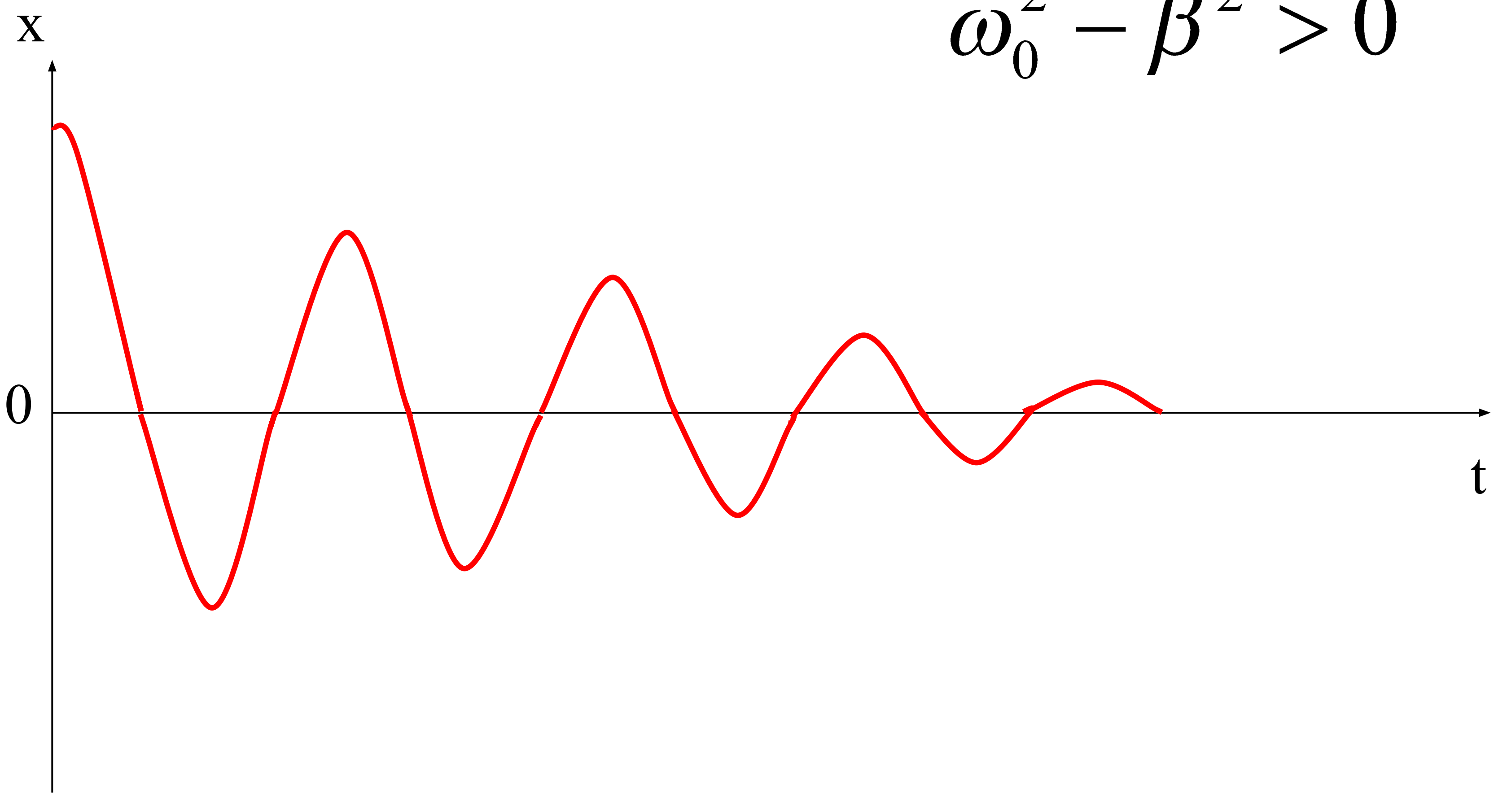
$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \pm A_0 e^{-\beta t}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

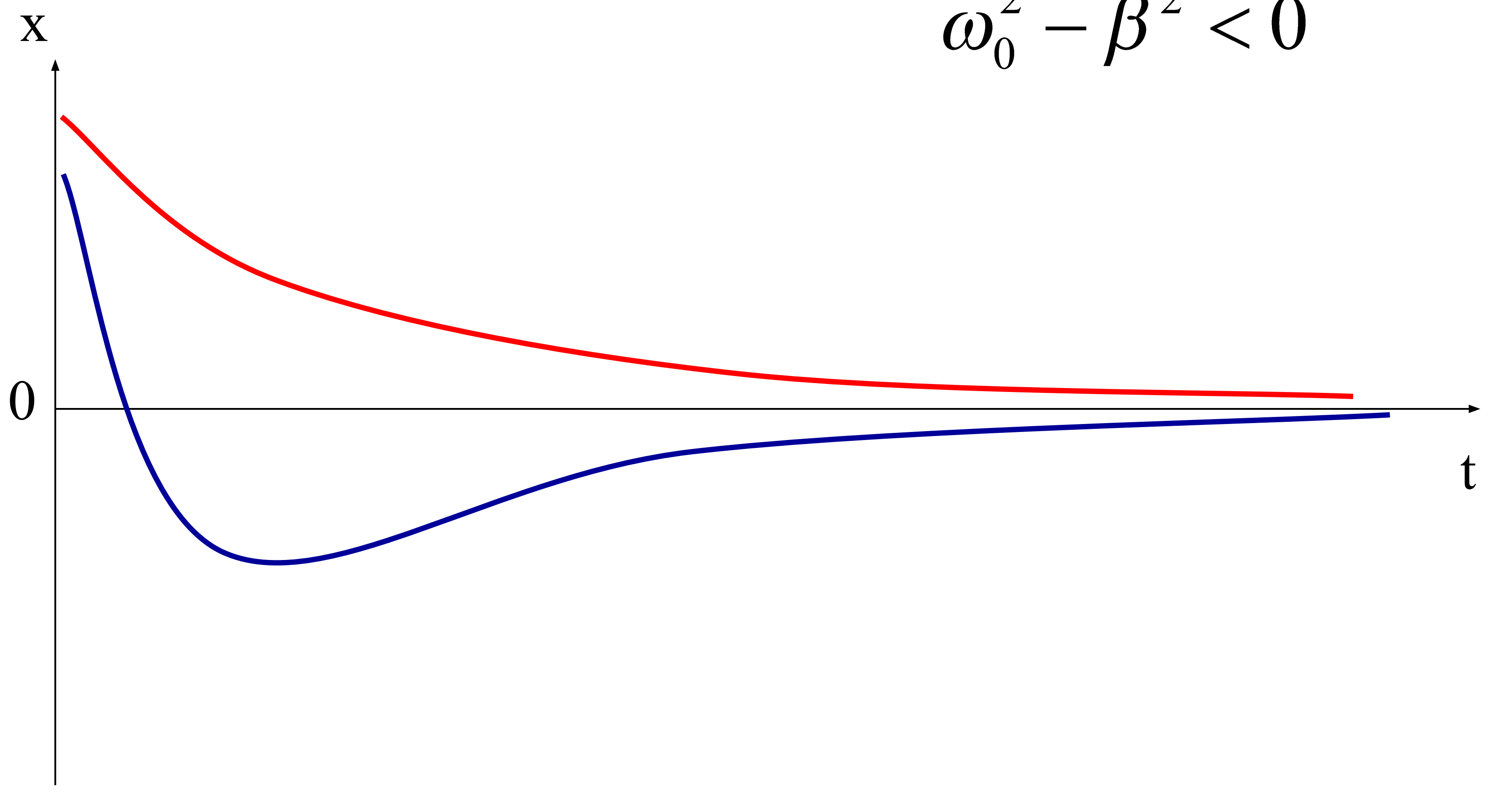
Временная графическая зависимость

$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0$$



Апериодический процесс

$$\omega_0^2 - \beta^2 < 0$$



Логарифмический декремент затухания

Величина, численно равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд колебаний, разделенных интервалом времени, равным периоду колебаний:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}$$

$$\lambda = \beta T$$

Вынужденные колебания

Вынужденными **колебаниями называются такие колебания, которые возникают в системе при участии внешней силы, изменяющейся по периодическому закону**

$$F = F_0 \cos \omega t$$

F_0 – амплитуда; ω – круговая частота колебаний вынуждающей силы

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

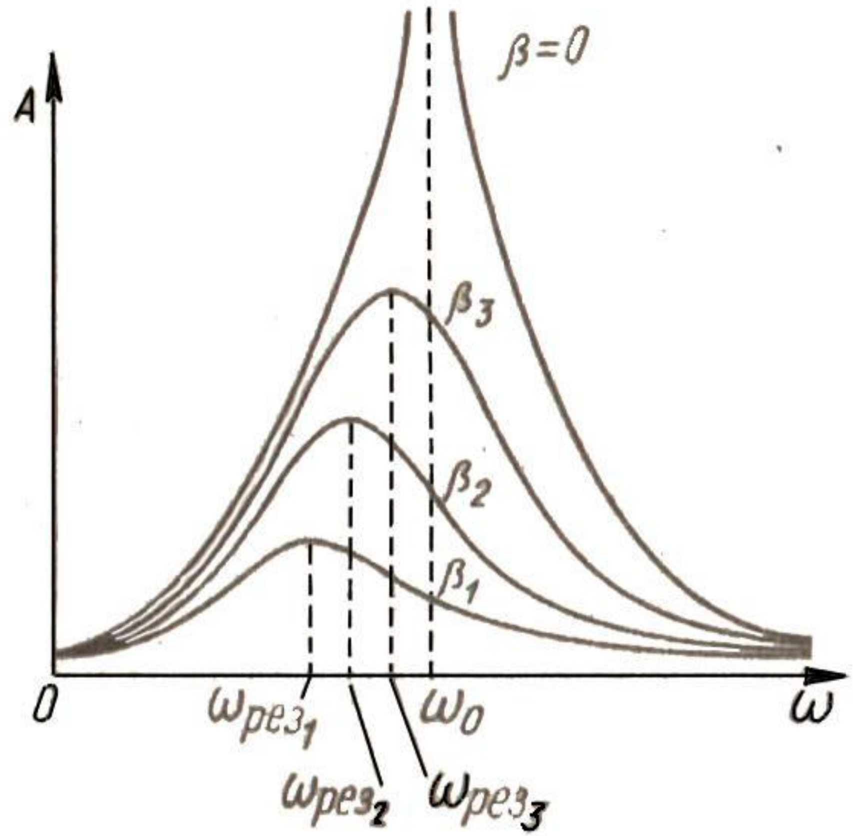
Решение

Сумма колебаний с амплитудой

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Резонанс

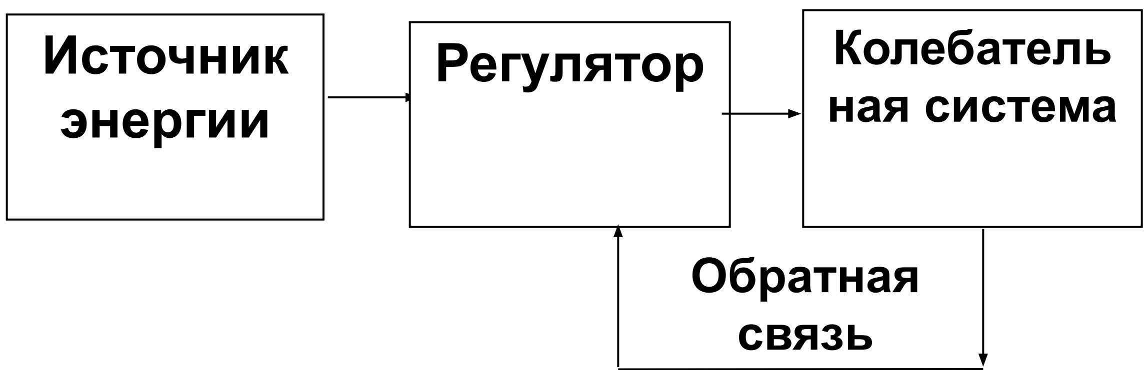
Амплитуда вынужденных колебаний имеет максимальное значение при некоторой определенной частоте вынуждающей силы, называемой *резонансной*



$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$

Автоколебания

Незатухающие колебания, существующие в какой-либо системе при отсутствии переменного внешнего воздействия, называются *автоколебаниями*, а сами системы – *автоколебательными*



Кинетическая и потенциальная энергии незатухающего колебательного движения

$$E_k = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \qquad\qquad E_n = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \upsilon_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

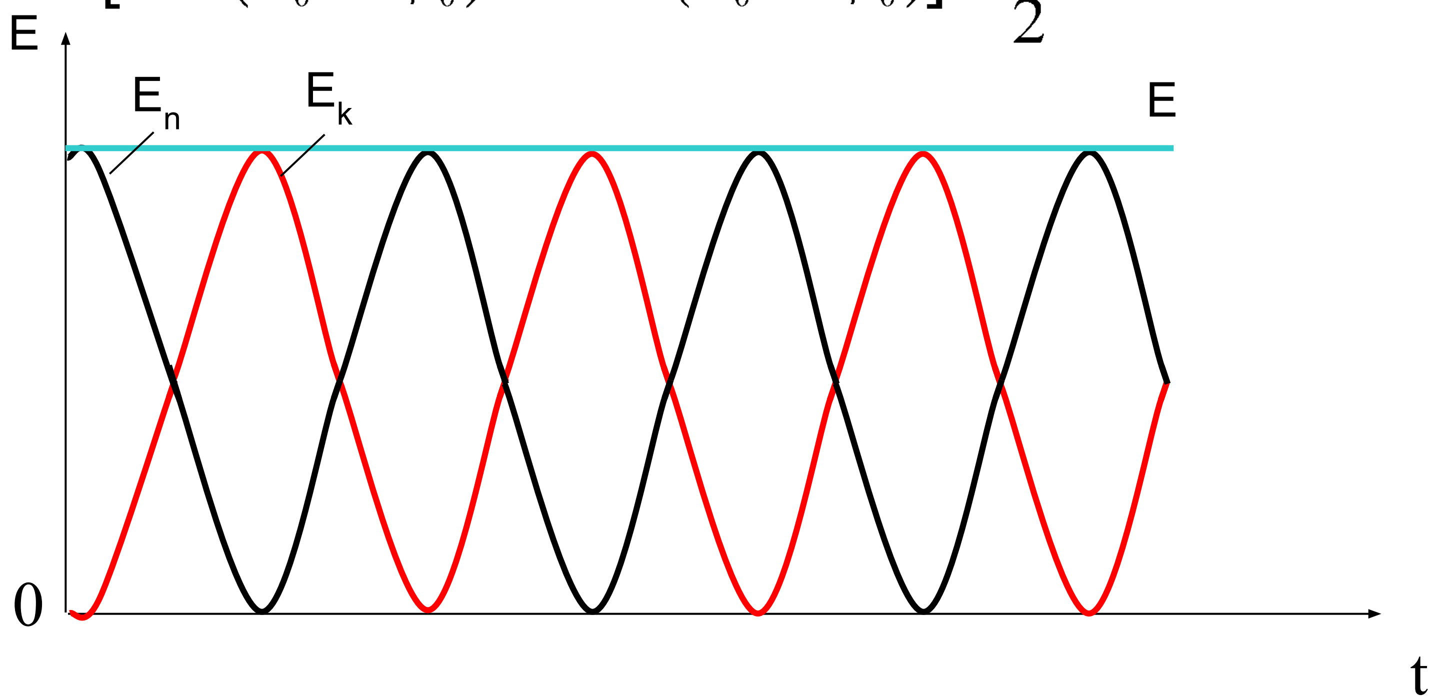
$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_n = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Полная энергия незатухающих колебаний

$$E = E_k + E_n = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$



Сложение колебаний

Сложение гармонических колебаний, направленных по одной прямой

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02})$$

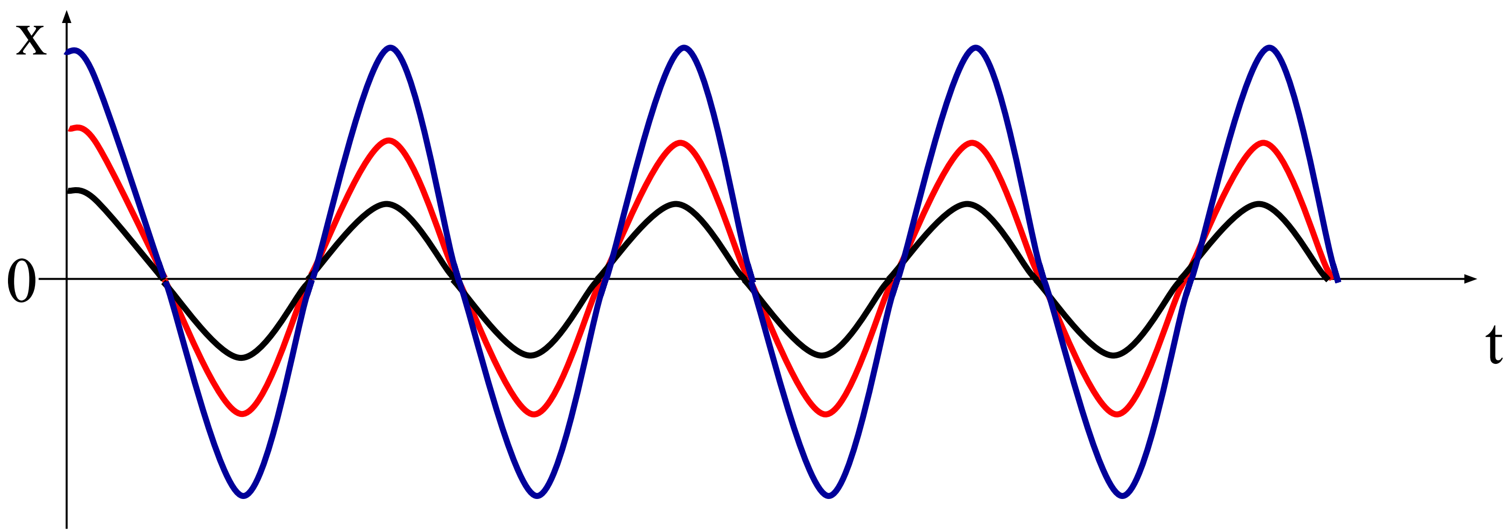
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02})$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

Частные случаи

1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi, \ \cos 2k\pi = +1, \ \textit{где} \ \ k = 0, \ 1, \ 2, ...,$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

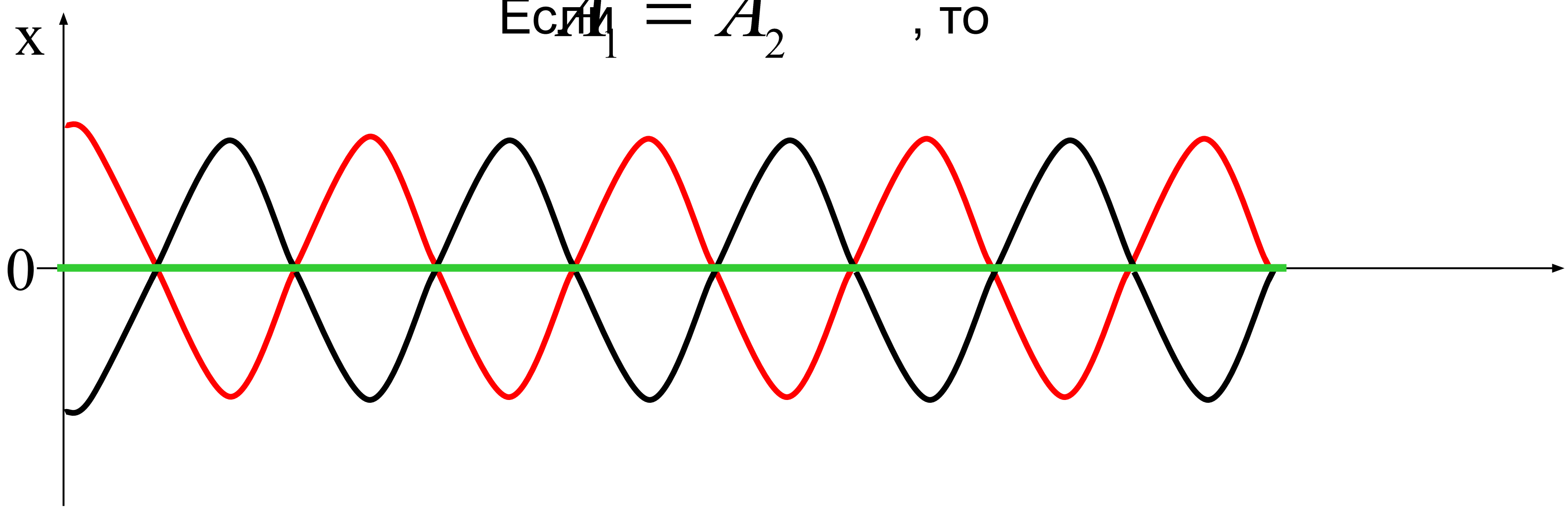


Частные случаи

$$2)\ \ \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi,\ \ \cos(2k+1)\pi = -1,$$

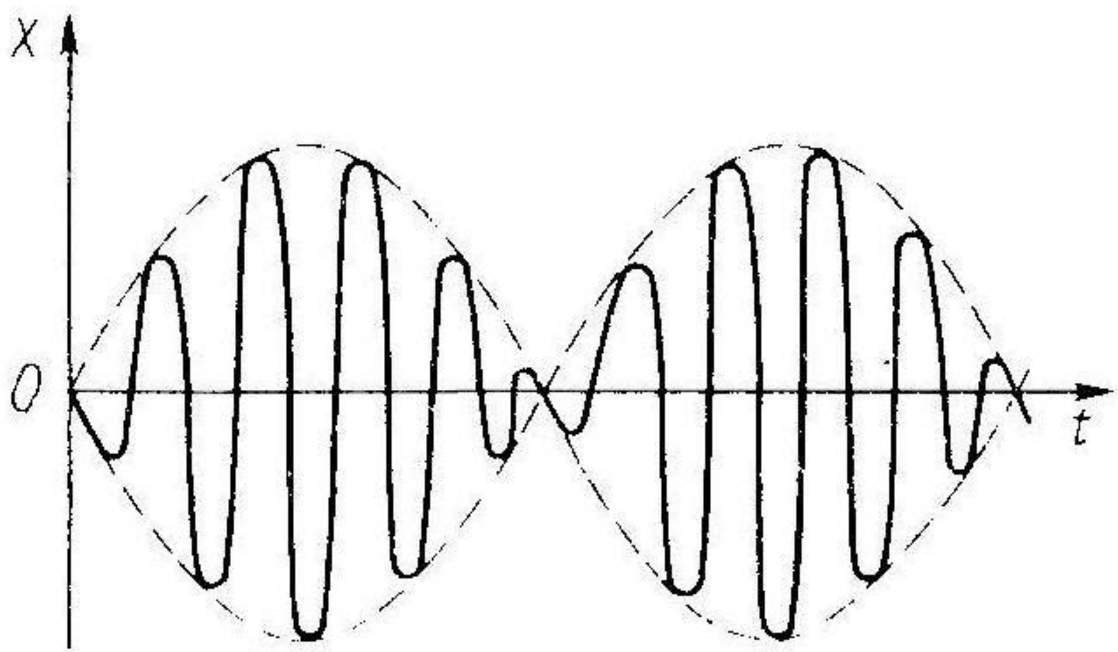
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \left|A_1 - A_2\right|,$$

Если $A_1 = A_2$, то



Биения

$$\omega_{01} \approx \omega_{02}$$

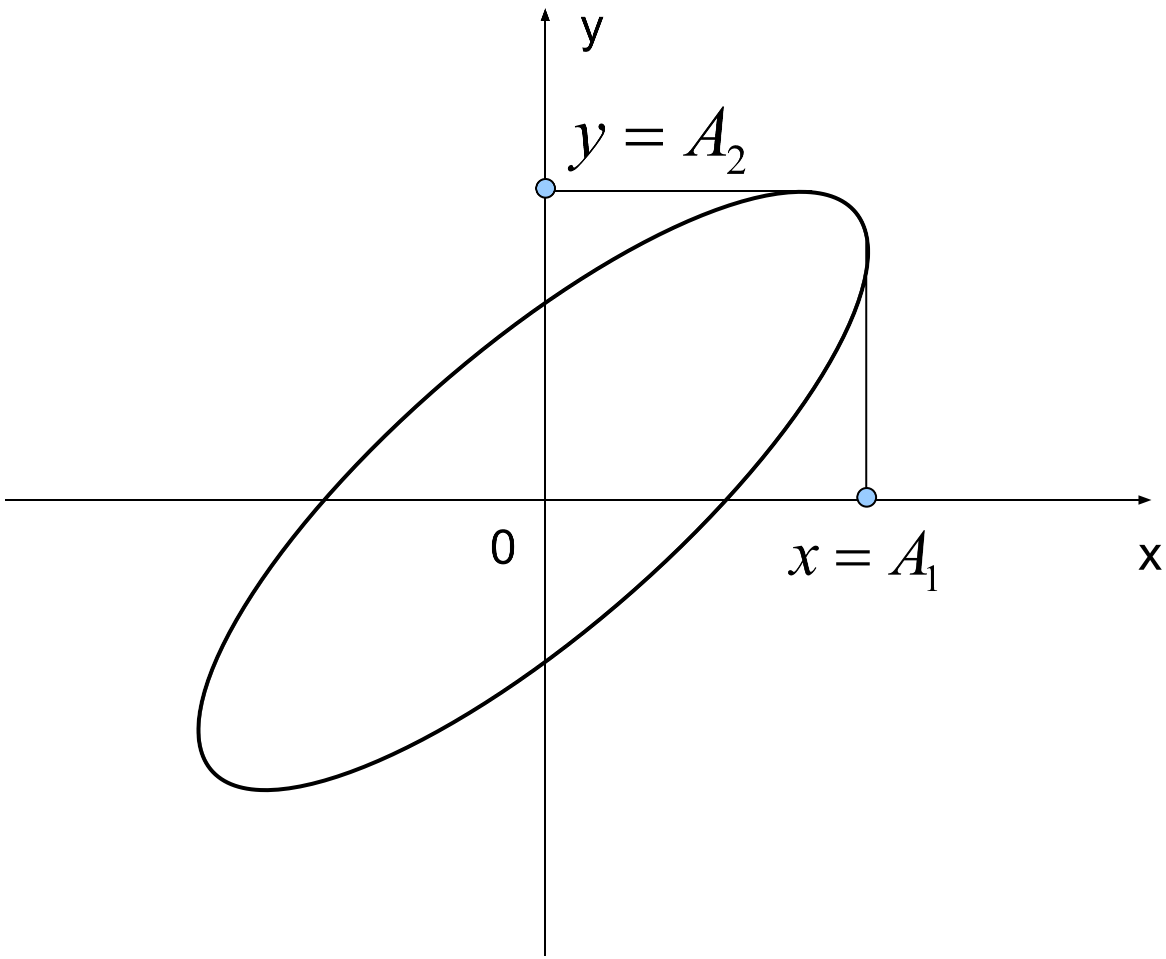


Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}); \quad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

Эллипс



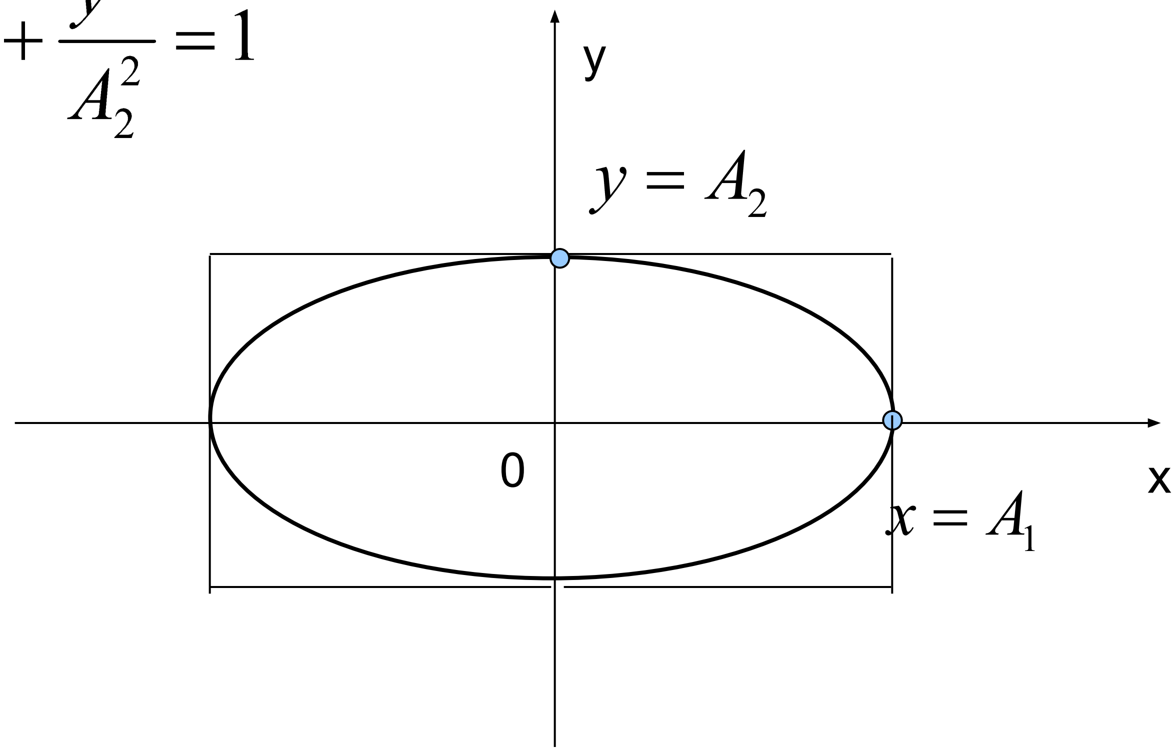
Частные случаи

$$\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \textit{где} \;\; k=0,1,2\ldots;$$

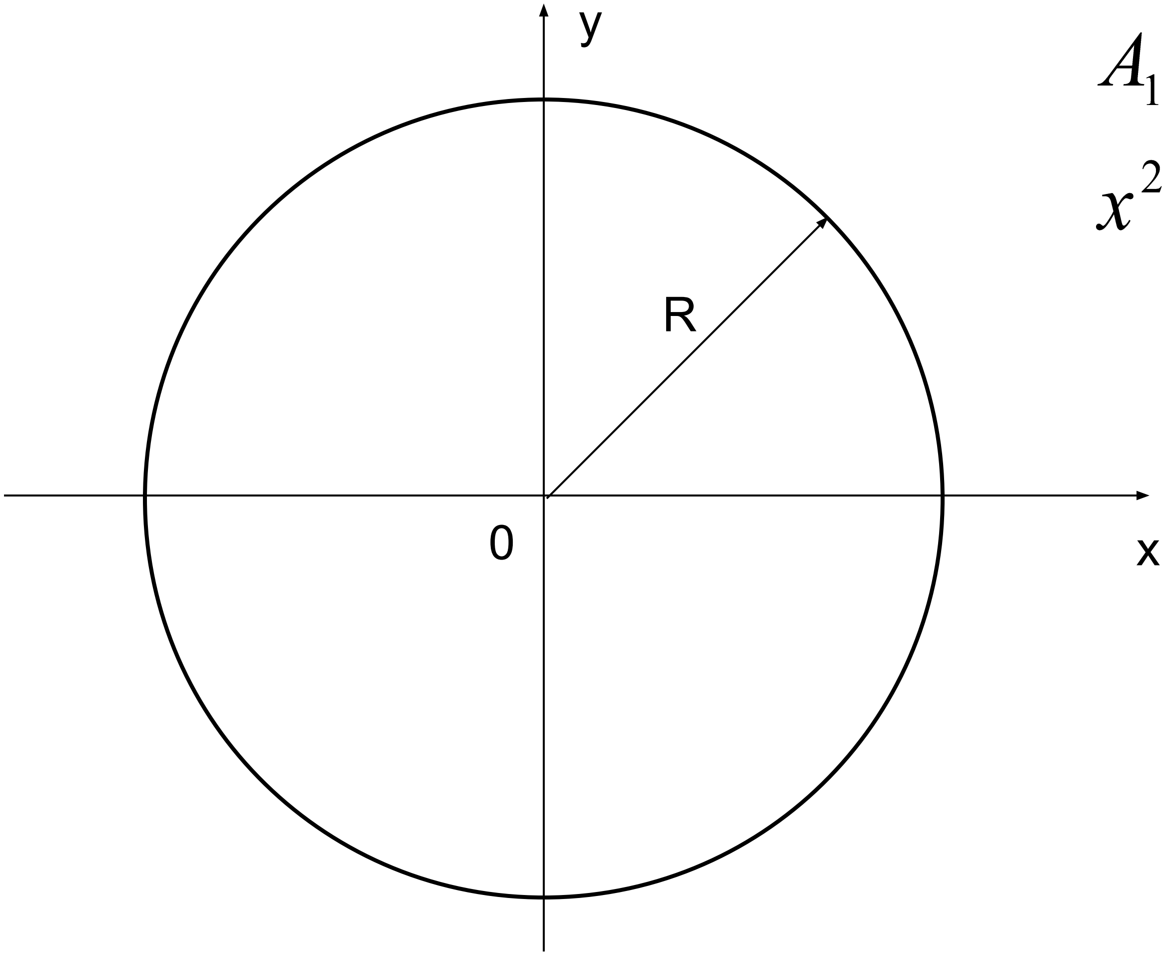
$$\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=0, \;\; \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=1$$

Частные случаи

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



Частные случаи



$$A_1 = A_2 = R$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Частные случаи

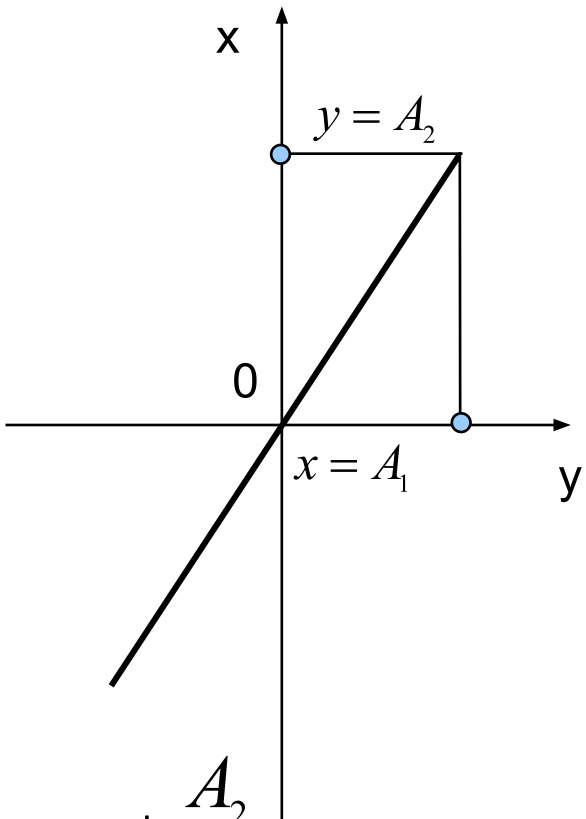
$$\varphi_{02}-\varphi_{01}=k\pi,\quad \text{где}\quad k=0,1,2...;\quad \cos k\pi=\pm 1,\quad \sin^2 k\pi=0$$

и тогда $$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}\pm 2\frac{xy}{A_1A_2}=0$$

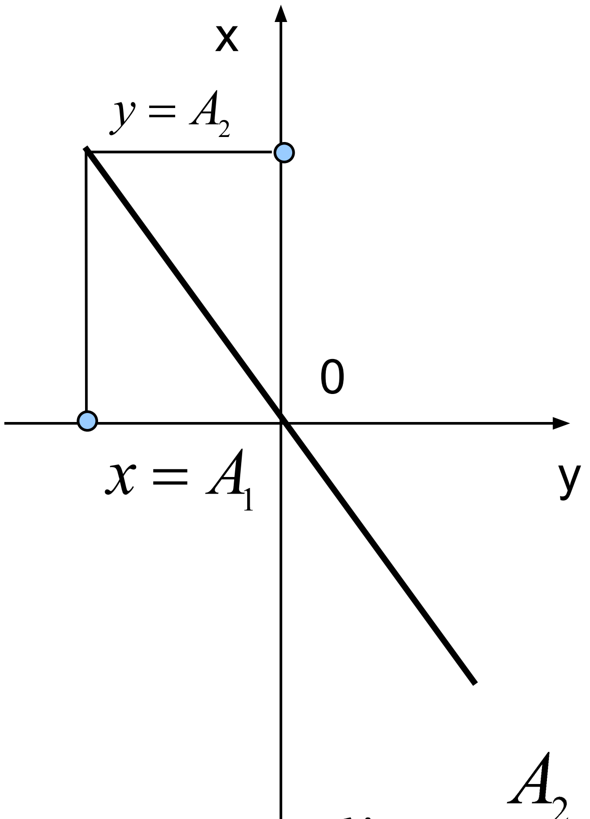
$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{x}{A_1}\pm\frac{y}{A_2}\right)^2=0;\quad \frac{x}{A_1}\pm\frac{y}{A_2}=0;\quad y=\pm\frac{A_2}{A_1}\cdot x;$$

График прямой



$$y = +\frac{A_2}{A_1} \cdot x;$$



$$y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x;$$

Фигуры Лиссажу

В зависимости от отношения частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}$

и разности начальных фаз $\varphi_{01} - \varphi_{02}$ слагаемых колебаний

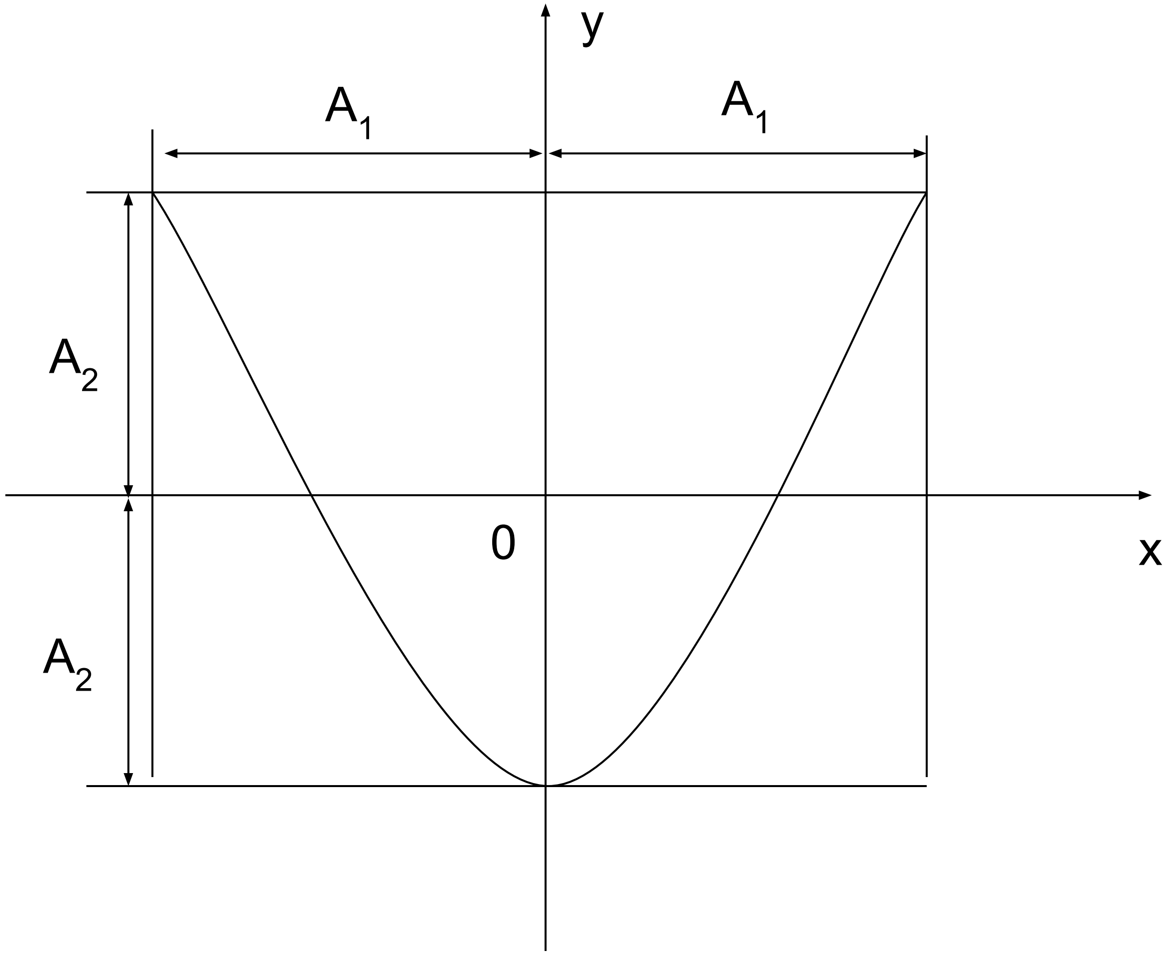
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = 0;$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}, \quad \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2};$$

Фигуры Лиссажу

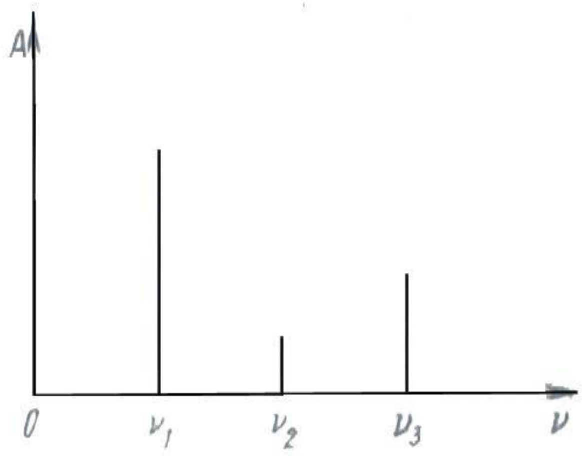


Сложение колебаний. Гармонический спектр сложного колебания

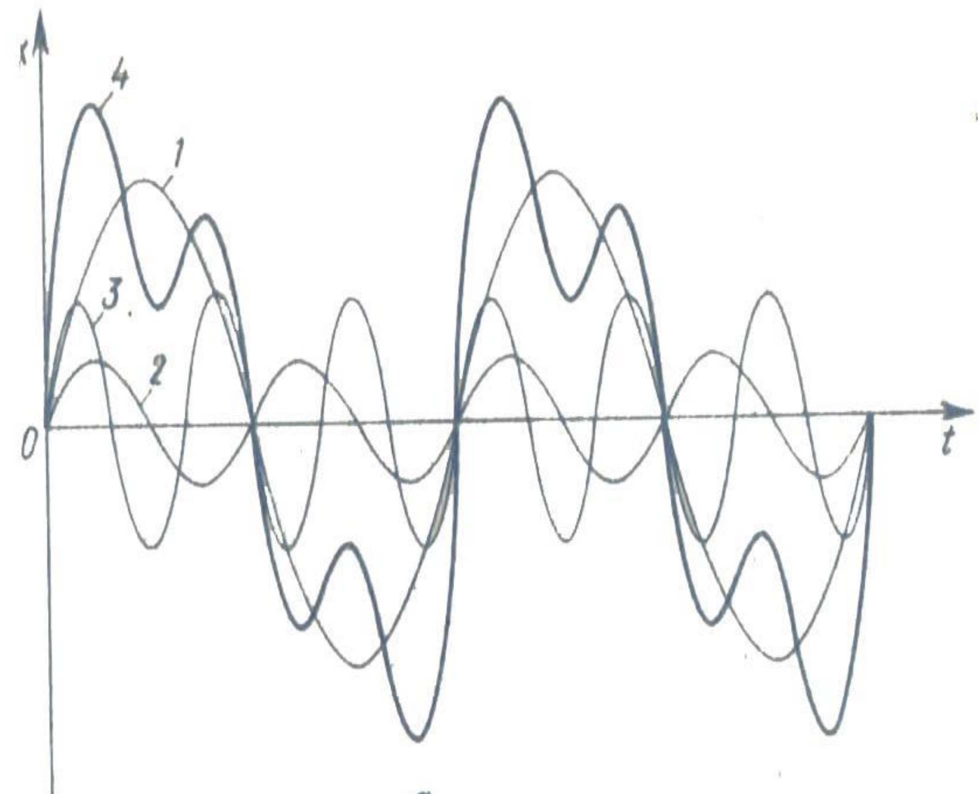
Фурье показал, что периодическая функция любой сложности может быть представлена в виде суммы гармонических функций, частоты которых кратны частоте сложной периодической функции

Совокупность гармонических колебаний, на которые разложено сложное колебание, называется *гармоническим спектром сложного колебания*

Спектр сложного колебания. Сложное колебание



б



а

КРАСНОЯРСКАЯ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ
МЕДИЦИНСКАЯ
АКАДЕМИЯ

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ