РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЬНЫХ ЗАДАЧ

Оптимальность по Парето
Методы сверток критериев
Методы, использующие ограничения на критерии

Оптимальность по Парето

Большинство реально возникающих задач оптимизации являются многокритериальными. То есть, нужно оптимизировать одновременно не одну, а целое множество функций (критериев оптимальности).

Пусть имеются критерии оптимальности (эффективности): $f_1(X),\dots,f_k(X)$

где $X=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$

удовлетворяют ограничениям $D: g_i(X)\le b_i,\ i=\overline{1,m}$

Тогда задача оптимизации примет вид:

$$F=\{f_1(X),\dots,f_k(X)\}\to\min,\ X\in D\subset R^n$$

Оптимальность по Парето

Функции (критерии) могут быть **согласованными**, **нейтральными**, **конфликтующими**.

Критерии являются **согласованными**, если улучшение одного из них приводит к улучшению другого.

Критерии являются **нейтральными**, если изменение одного из них не влияет на другие.

Критерии являются **конфликтующими**, когда улучшение одного из них приводит к ухудшению других.

В последнем случае решение возможно только на основе **компромисса**, для чего используется понятие **множества Парето - множества точек несравнимых по предпочтению**.

Оптимальность по Парето

Определение 1. Решение $X^0 \in D$ называется оптимальным по Парето, если во множестве допустимых решений не существуют решения, которое по целевым функциям было бы не хуже, и по крайней мере по одной целевой функции было бы строго лучше чем X^0.

Определение 2. Множество всех допустимых, оптимальных по Парето, точек называется множеством Парето в пространстве переменных.

Определение 3. Множество Парето в критериальном пространстве – это множество $\{f_i(X)\}$, $i = \overline{1,k}$, где X – множество точек, оптимальных по Парето, в пространстве переменных.

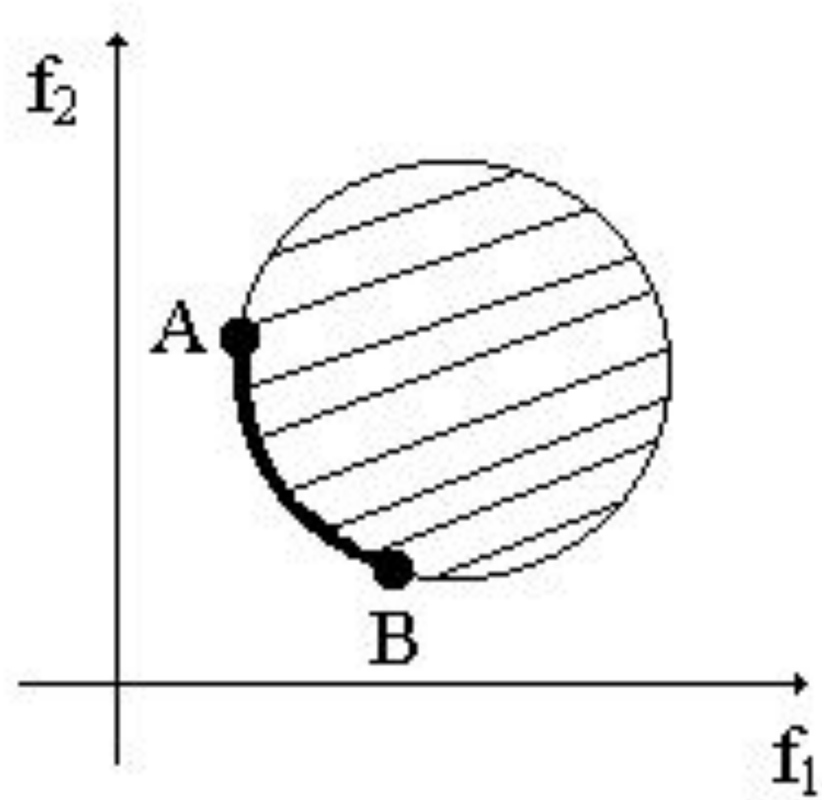
Оптимальность по Парето

Из определения следует, что **решение многокритериальной задачи оптимизации целесообразно выбирать из множества Парето, так как любое другое может быть улучшено некоторой точкой Парето как минимум по одному критерию без ухудшения других**.

Оптимальность по Парето

Рассмотрим простейшую ситуацию. Заштрихованная область изображает значения двух критериев оптимизации f1 и f2, которые соответствуют переменным X в допустимой области.

Множество точек, оптимальных по Парето, лежит между точками минимума (если задача на минимум), полученных при решении многокритериальной задачи отдельно по каждому критерию. Точками Парето является множество контурных точек между точками A и B.



Оптимальность по Парето

Точек оптимальных по Парето, даже в простейших задачах может быть много.

Чем больше точек Парето, тем хуже, так как с формальных позиций они равноценны между собой.

Очевидно, что с точки зрения практики надо выйти на одну или несколько точек, оптимальными по Парето, для чего после построения множества Парето осуществляют его сужение.

Оптимальность по Парето

Для построения множества Парето могут быть использованы следующие методы:

1) **методы свертки критериев**,
2) **методы, основанные на наложении ограничений на критерии**,
3) **методы, основанные на отыскании компромиссного решения**,
4) **методы целевого программирования** и др.

Методы сверток критериев

Задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче однокритериальной оптимизации введением одного обобщенного критерия

$$F^0 = \alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_k f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) \to \min, x \in D$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ – вектор весовых коэффициентов критериев, характеризующий относительную важность соответствующего критерия. Обычно, весовые коэффициенты используются в нормированном виде и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}.$$

Методы сверток критериев

Функция F^0 называется **аддитивной сверткой**.

В результате оптимизации аддитивной свертки может быть получена точка, оптимальная по Парето.

Задача должна решаться многократно, с изменением весовых коэффициентов, чтобы сгенерировать множество точек Парето.

Кроме того, при изменении коэффициентов во всем диапазоне может получаться одна и та же точка.

Методы сверток критериев

Аддитивная свертка критериев имеет ряд недостатков:

- не всегда потеря качества по одному из критериев компенсируется приращением качества по другому. Оптимальное по свертке решение может характеризоваться низким качеством по ряду частных критериев и в связи с этим будет неприемлемым;

- не всегда удается задать веса критериев, чаще всего известна лишь сопоставимая важность критериев; в иных случаях нет никакой информации;

- величина целевой функции, полученная при решении по свертке, не имеет ни какого физического смысла.

Методы сверток критериев

Другие свертки критериев мультипликативного вида:

$$F^0 = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i f_i(x))^{\beta_i} \to \min$$

с теми же самыми ограничениями, как в аддитивной свертке.

Такие виды сверток не нашли широкого применения.

Иногда используется свертка нормализованного критерия:

$$F^0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{(f_i(x) - f_i^*)^2}{(f_i^*)^2} \to \min, x \in D$$

где f_i^* – оптимальные значения частных критериев, полученные путем их оптимизации при исходных ограничениях и отбрасывании других критериев. Эту свертку надо минимизировать.

Методы, использующие ограничения на критерии

Это направление различает два подхода:

Дискриминационный метод.

Метод последовательных уступок.

Дискриминационный метод

На все или на часть критериев накладывается определенный уровень ограничений.

Затем ищется оптимум по обобщенному критерию (в качестве обобщенного критерия может быть использована аддитивная свертка), то есть решается задача

$$F^0 = \sum_{i=1}^{S_i} \alpha_i f_i(X) \to \min, X \in D$$

при наличии ограничений

$$f_j(X) \le a_j, \quad j = \overline{S,k} \qquad \sum_{i=1}^{S} \alpha_i = 1; \alpha_i \ge 0; i = \overline{1,S}$$

где величины a_j есть уступки, назначаемые из практических соображений.

Метод последовательных уступок

Все критерии $f_1(X),\ldots,f_k(X)$ располагаются в порядке уменьшения их приоритета (**важности**). Затем решается последовательность однокритериальных задач оптимизации при **дополнительных ограничениях** на **предыдущие** по важности критерии.

Рассмотрим последовательность шагов процесса решения задачи.

Метод последовательных уступок

1 этап. Решается задача $f_1(X) \to \min$ при $X \in D$. Определяется f_1^* и назначается уступка Δf_1

2 этап. Решается задача $f_2(X) \to \min$ при $X \in D$ при наличии ограничения

$$f_1(X) - f_1^* \le \Delta f_1$$

Определяется f_2^* и назначается уступка Δf_2.

k-ый этап. Решается задача $f_k(X) \to \min$ при $X \in D$ при наличии ограничений

$$\begin{cases} f_1(X) - f_1^* \le \Delta f_1 \\ f_2(X) - f_2^* \le \Delta f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k-1}(X) - f_{k-1}^* \le \Delta f_{k-1} \end{cases}$$

Метод последовательных уступок

Точка, полученная после последнего этапа, является оптимальной по Парето.

Чтобы получить несколько точек, надо **менять приоритет критериев и величины уступок**.

Преимуществом этого подхода перед методом сверток состоит в том, что одновременно **при генерации точек Парето происходит его сужение**.

Метод последовательных уступок

Однако этот метод также имеет недостатки:

- величины уступок не соизмеримы друг с другом, сложно их выбирать;

- в общем случае полученное решение не оптимально по Парето.

Метод последовательных уступок

После построения множества Парето на практике требуется его сузить, для чего можно использовать следующие приемы:

- уменьшить количество целевых функций, то есть отбросить часть критериев;
- наложить дополнительные ограничения на часть критериев;
- использовать диалоговую процедуру с целью корректировки постановки задачи.