3.4. Метрические характеристики графа

Пусть G – неориентированный граф, u и v – две его несовпадающие вершины.

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая длина простой цепи, соединяющей эти вершины. Такая кратчайшая цепь называется *геодезической*.

Обозначение: $d(u,v)$.

При этом

1) если вершины u и v совпадают, то $d(u,u)=0$;

2) если не существует цепи, соединяющей вершины u и v, то $d(u,v)=\infty$.

Эксцентриситет вершины u – это расстояние от вершины u до наиболее удаленной вершины графа, т.е.

$$e(u)=\max_{v\in V_G} d(u,v).$$

Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют *центральной*.

Центральные вершины образуют *центр графа*.

Величина наименьшего эксцентриситета называется *радиусом* графа.

Обозначение: $r(G) = \min\limits_{u \in V_G} e(u)$.

Вершину с наибольшим эксцентриситетом называют *периферийной*.

Величина наибольшего эксцентриситета называется *диаметром* графа.

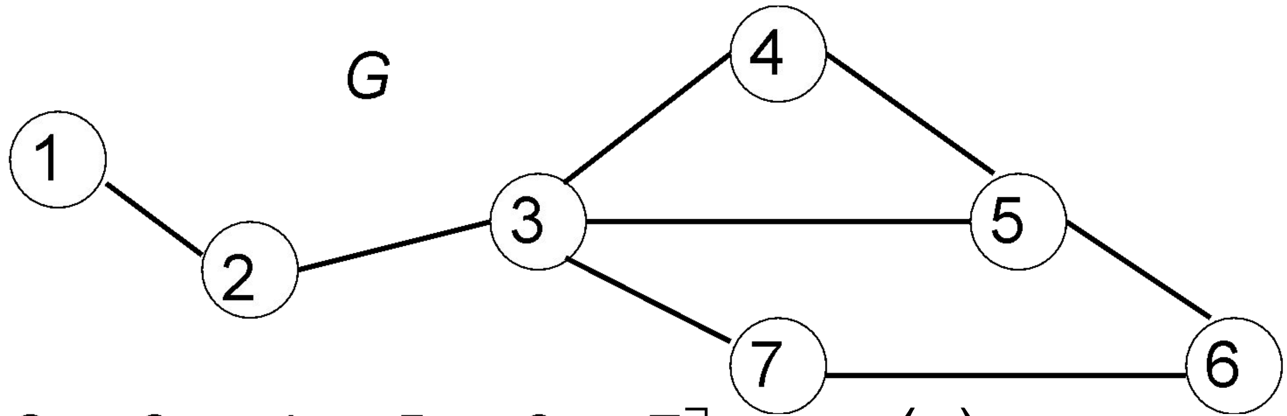
Обозначение: $d(G) = \max\limits_{u \in V_G} e(u)$.

Простая цепь длины $l = d(G)$ называется *диаметральной цепью*.

Матрица расстояний D_G

$$d_{ij} = \begin{cases} d(i, j), & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Пример.



$$D_G = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$e(u)$
$e(1) = 4$
$e(2) = 3$
$e(3) = 2$
$e(4) = 3$
$e(5) = 3$
$e(6) = 4$
$e(7) = 3$

$r(G) = 2$

$d(G) = 4$

центральная вершина: 3

периферийные вершины: 1, 6

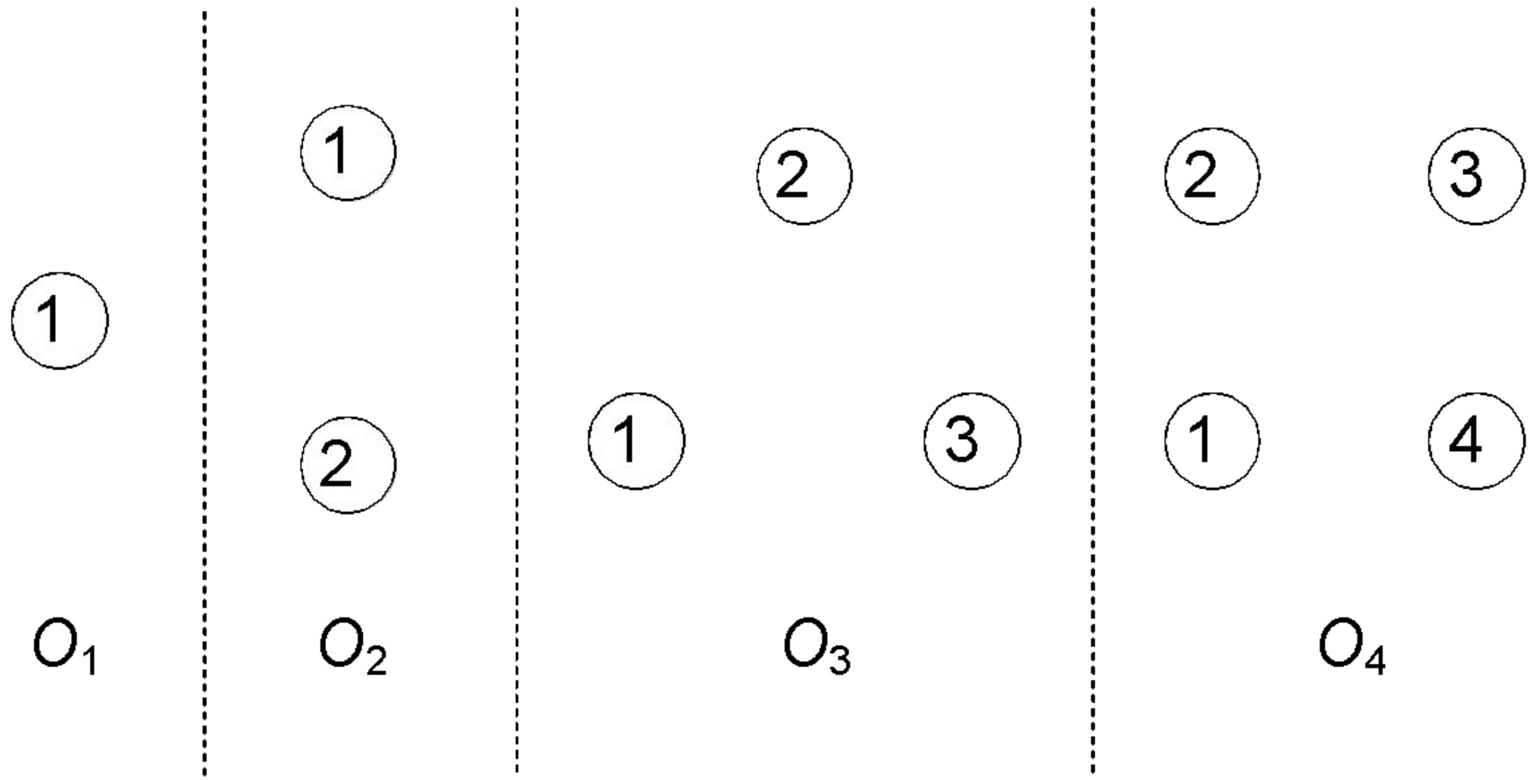
3.5. Виды графов
и
операции над ними

3.5.1. Некоторые специальные графы

Пустой граф G – граф, в котором ребра отсутствуют.

O_n – пустой граф порядка n

<u>Пример</u>

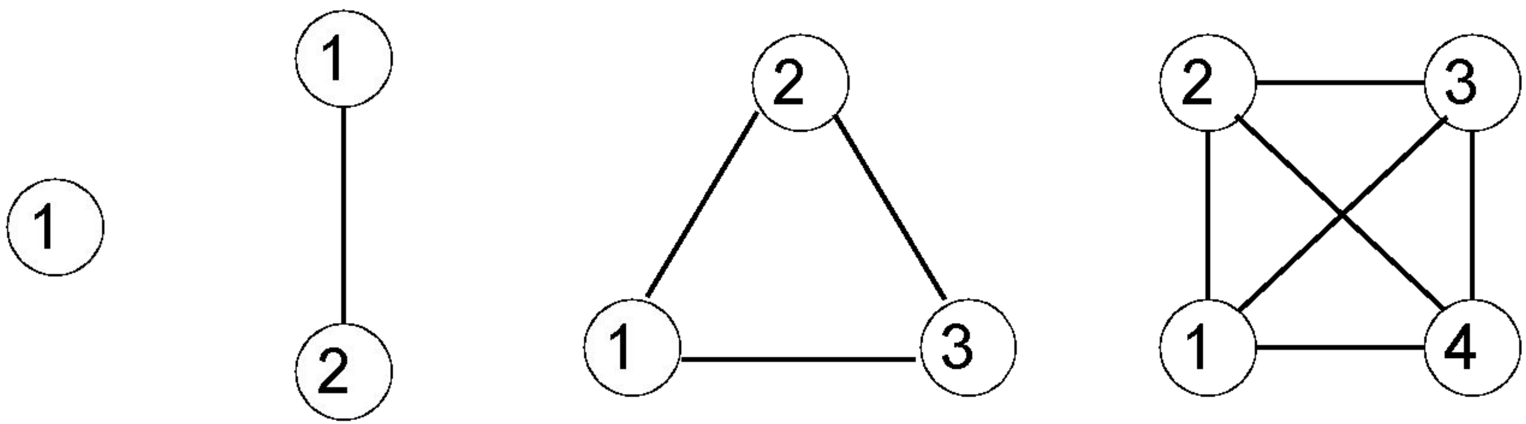


Полный граф G – граф, в котором любые две его вершины смежны.

K_n – полный граф порядка n

Число ребер: $m = |E_G| = \dfrac{n(n-1)}{2}$

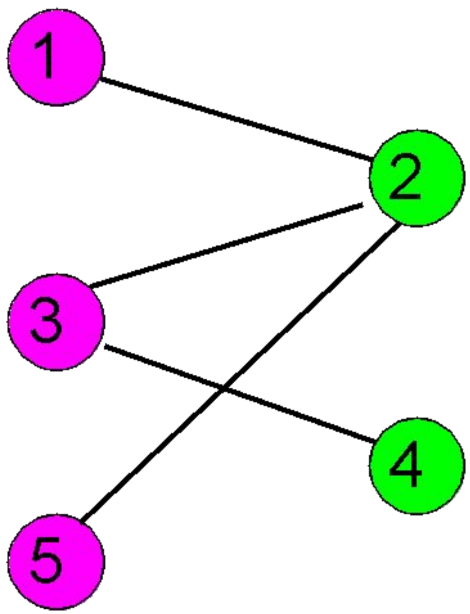
<u>Пример</u>

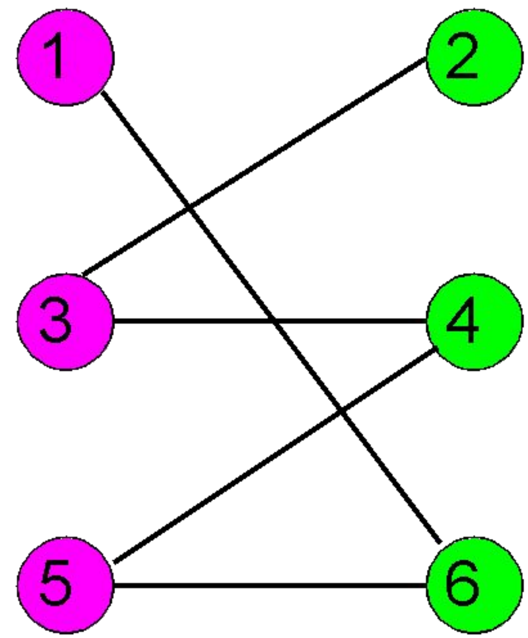


K_1 K_2 K_3 K_4

Граф $G(V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить так, что $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. При этом каждое ребро $e \in E$ соединяет вершины из разных множеств.

Пример.

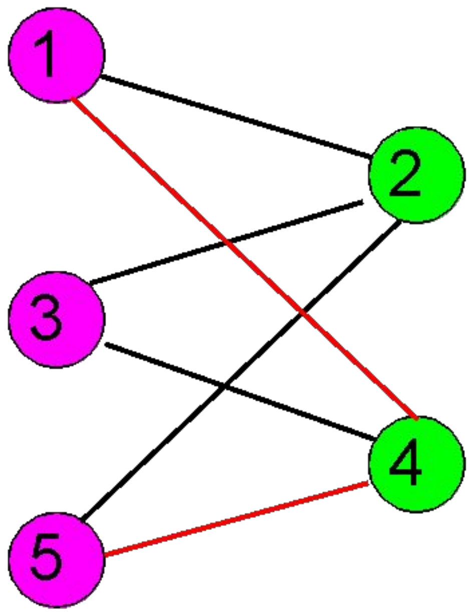




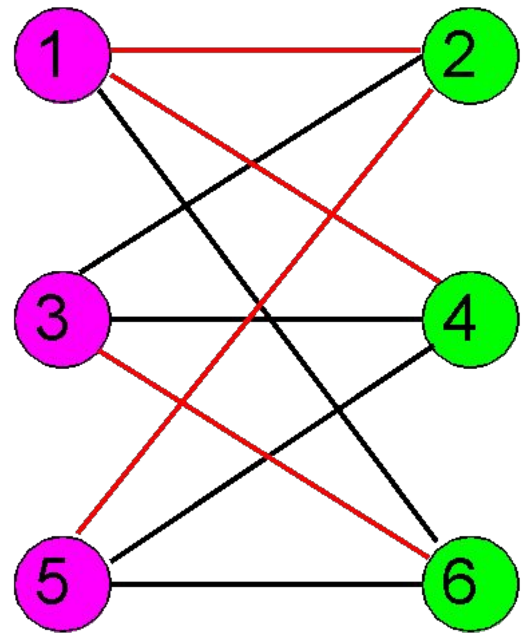
Граф $G(V, E)$ называется *полным двудольным*, если любая вершина из одной доли смежны со всеми вершинными из другой доли.

Обозначение: K_{n_1,n_2}, если $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$.

Пример.



$K_{3,\,2}$



$K_{3,3}$

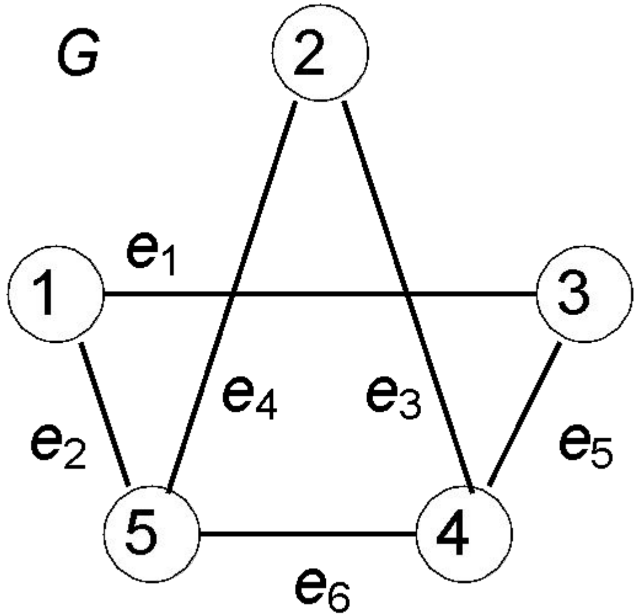
3.5.2. Реберный граф

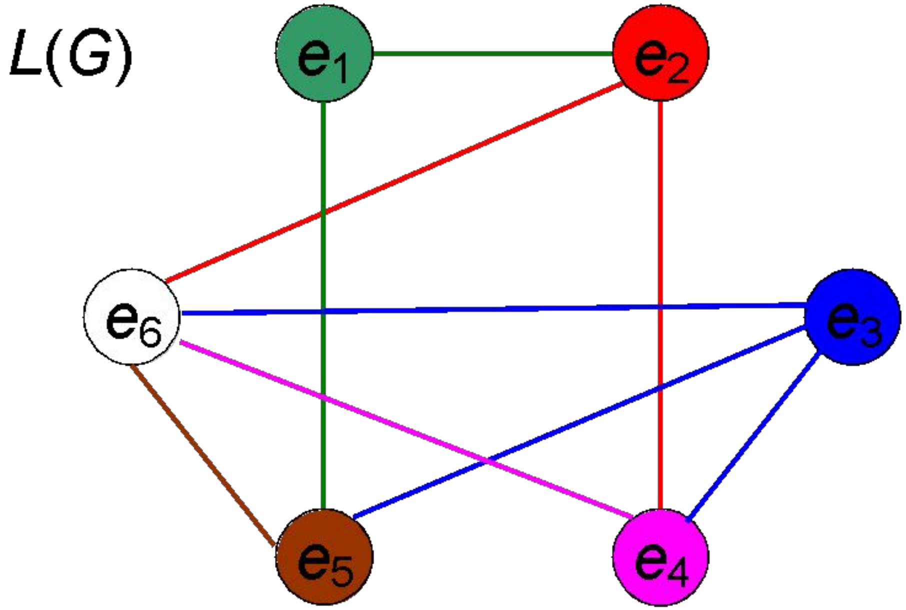
Для произвольного графа G реберный граф $L(G)$ определяется двумя условиями:

1) $V_{L(G)} = E_G$

2) вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, когда ребра e_1 и e_2 смежны в G.

Пример.

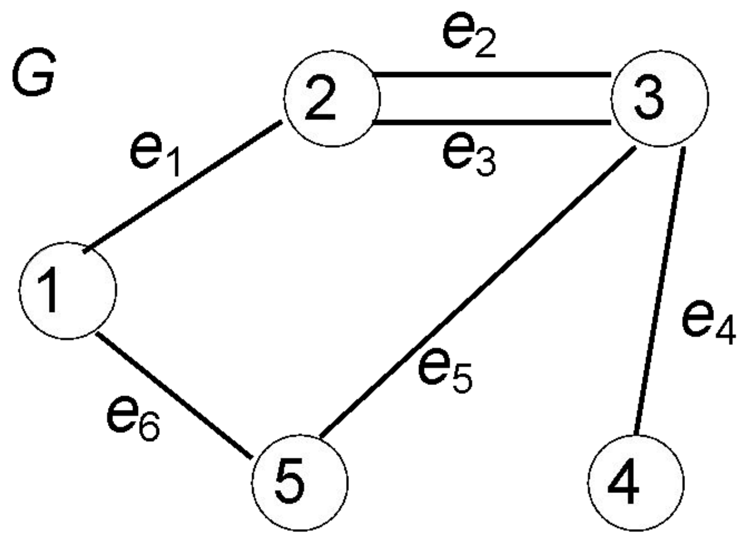




Проверка:

$$A(L(G)) = I^T(G) \cdot I(G) - 2E$$

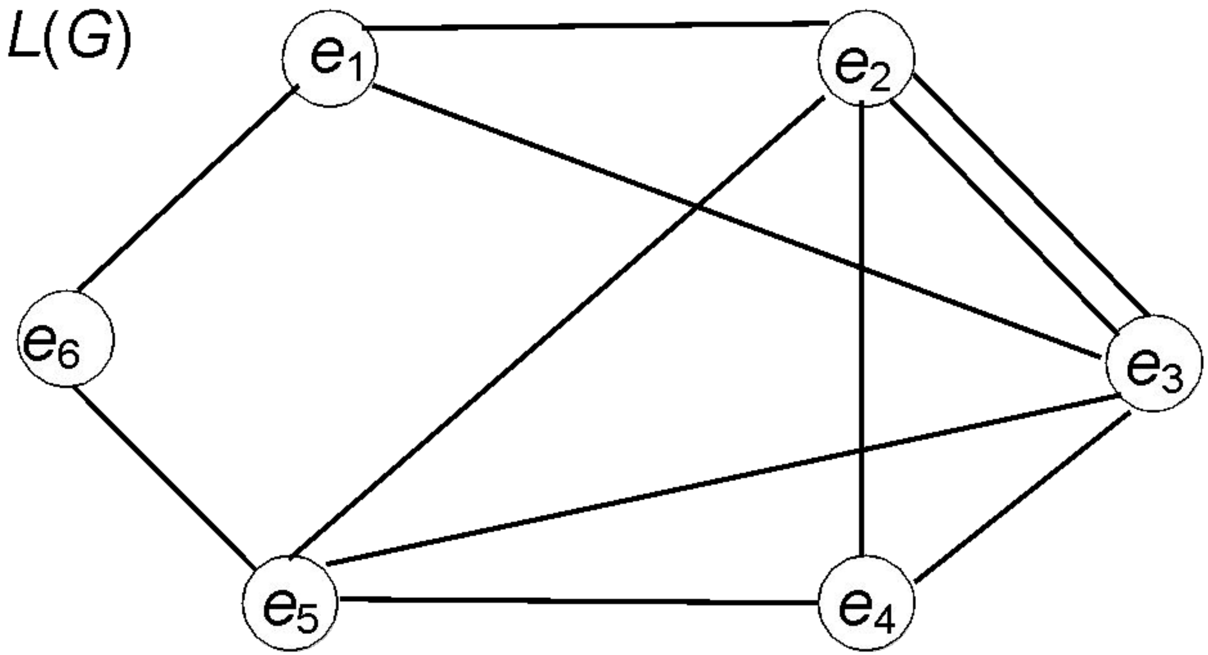
Пример.



$$
I(G) = \left[\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

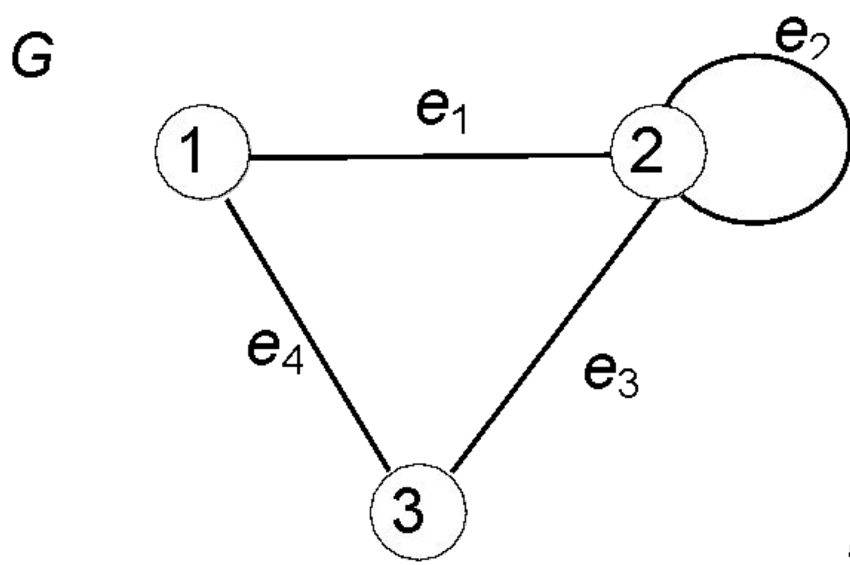
$$A(L(G)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 2E =$$

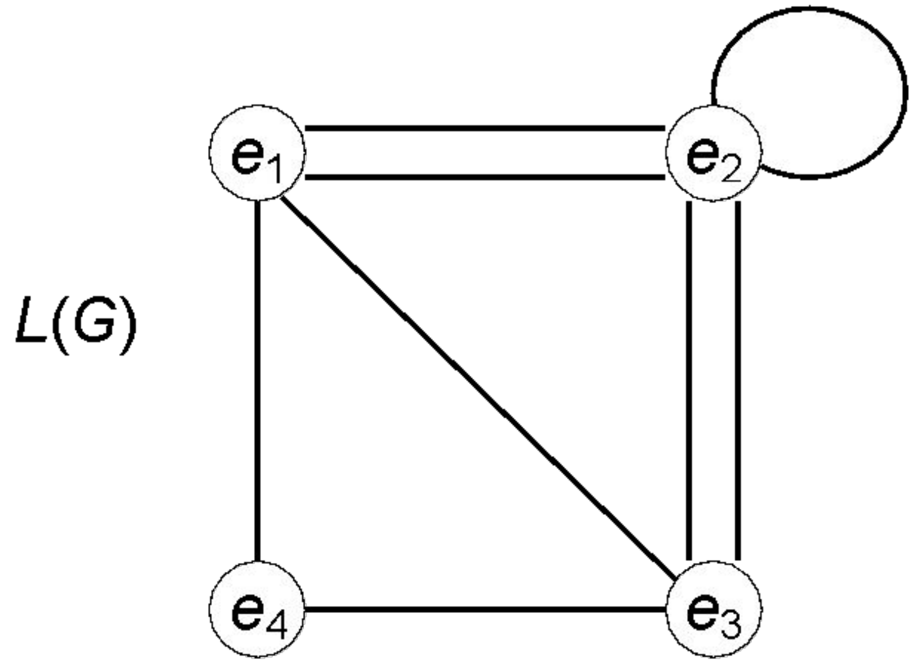
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2E = \left[\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline e_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ e_3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$



L(G)
e1
e2
e3
e4
e5
e6

Пример.





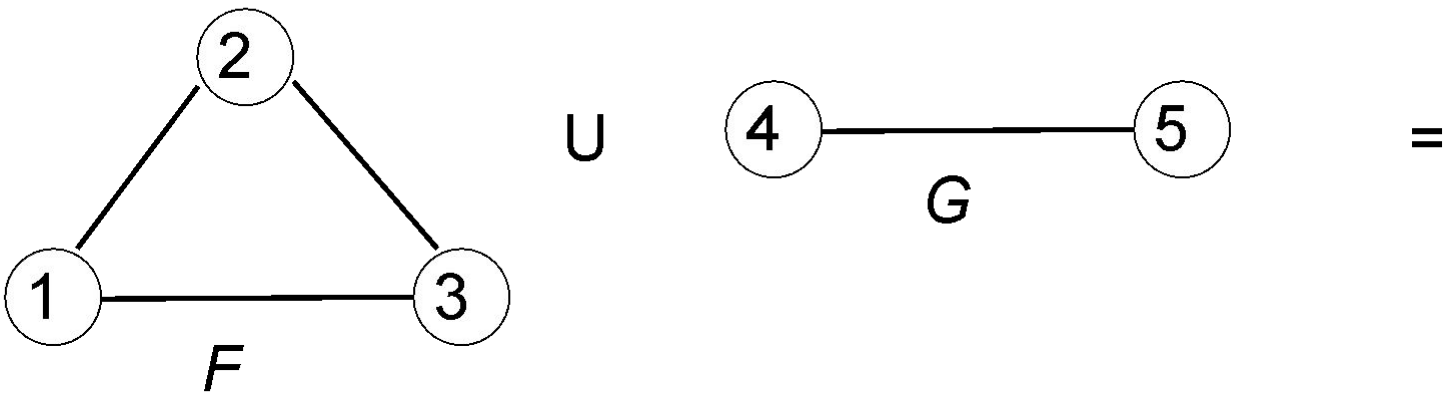
Проверку выполнить самостоятельно!!!

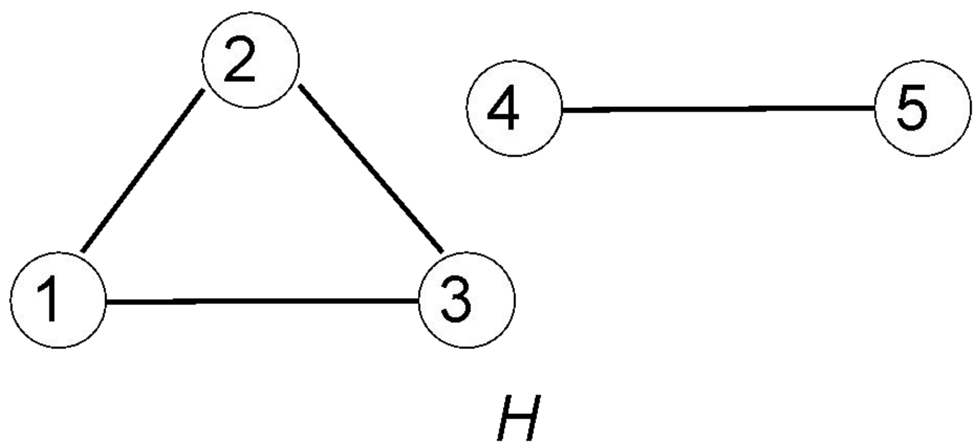
3.5.3. Операции над графами

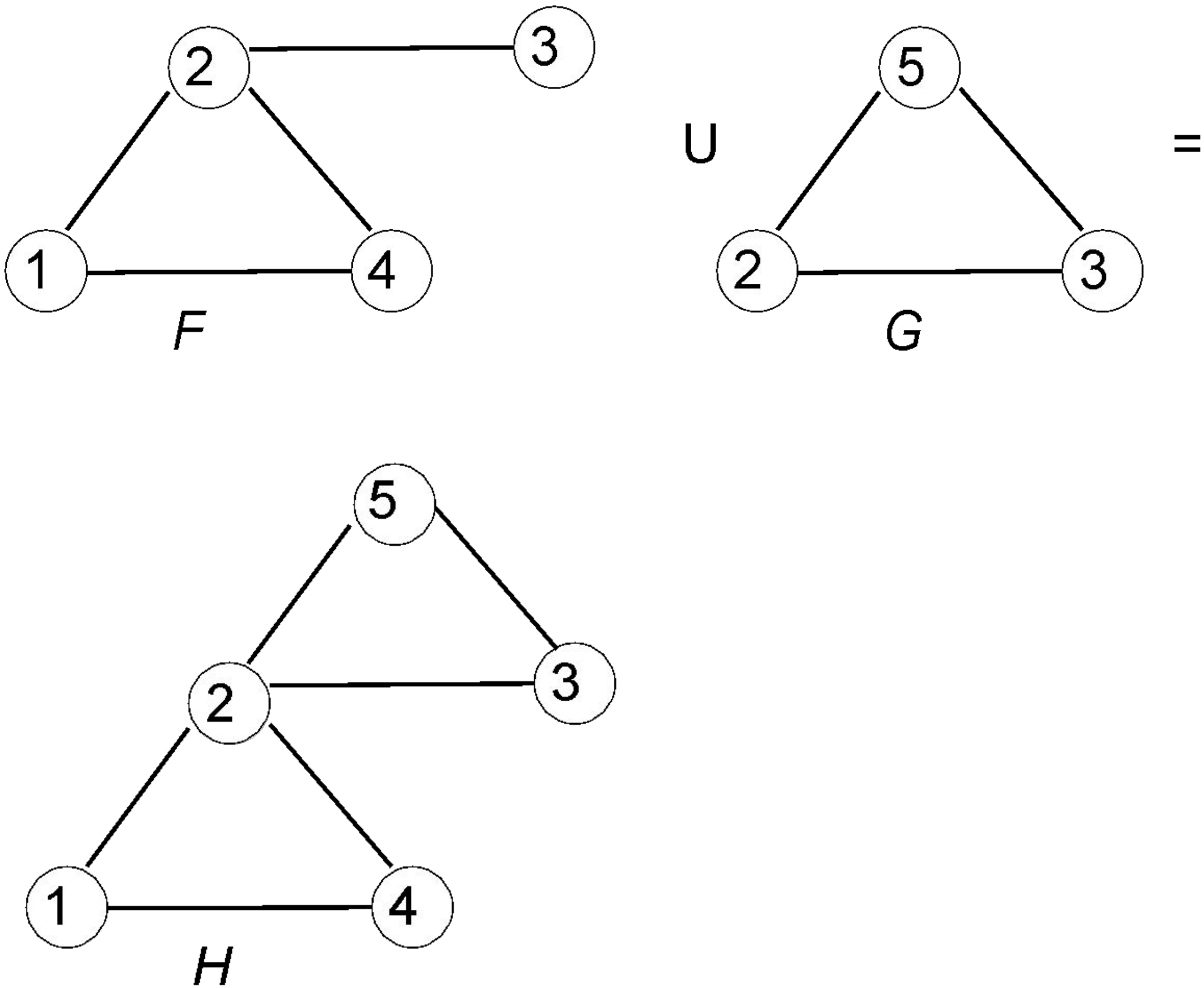
Объединение. Граф H называется *объединением* графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G$.

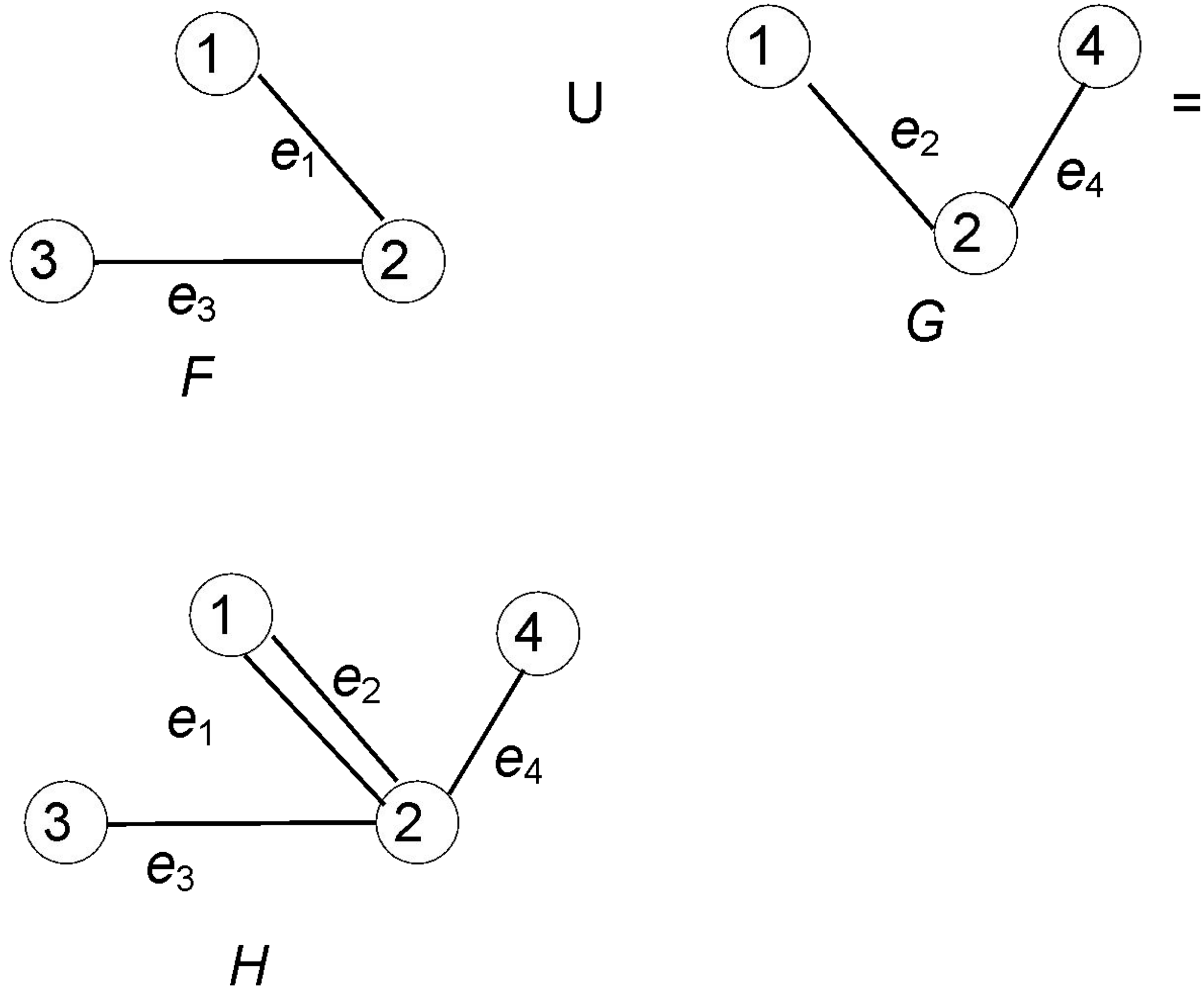
Обозначение $H = F \cup G$.

<u>Пример</u>



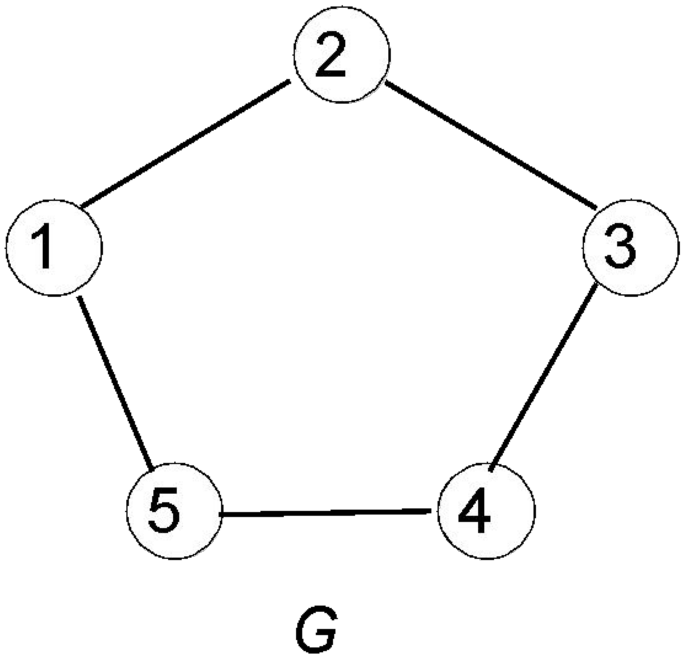


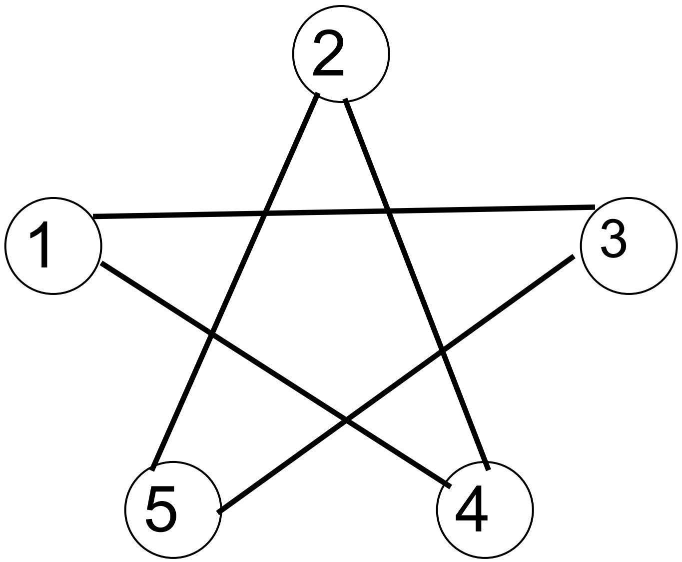

2
3
1
4
F
U
5
2
3
G
=
5
2
3
1
4
H


1
2
3
e1
e3
F
U
1
2
4
e2
e4
G
=
1
2
3
4
e1
e2
e3
e4
H

Дополнение графа до полного графа. Граф $\overline{G}$ называется *дополнением графа G до полного*, если у него $V_{\overline{G}} = V_G$, а $E_{\overline{G}}$ определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не являются смежными в графе G.

Пример

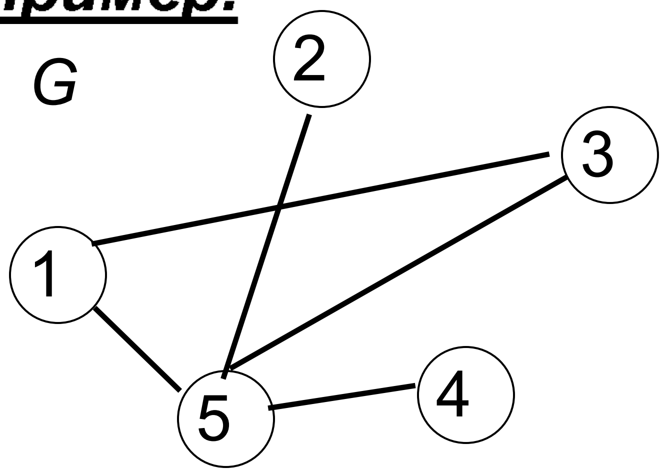


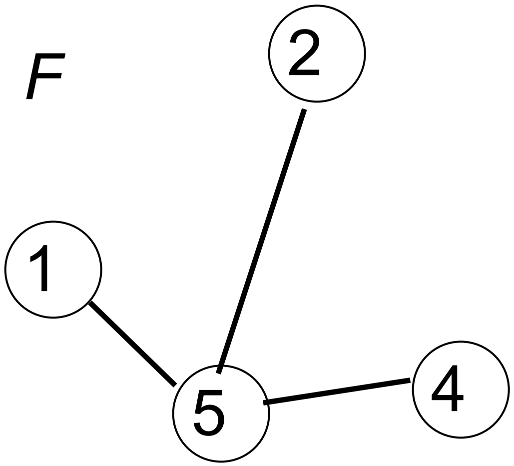


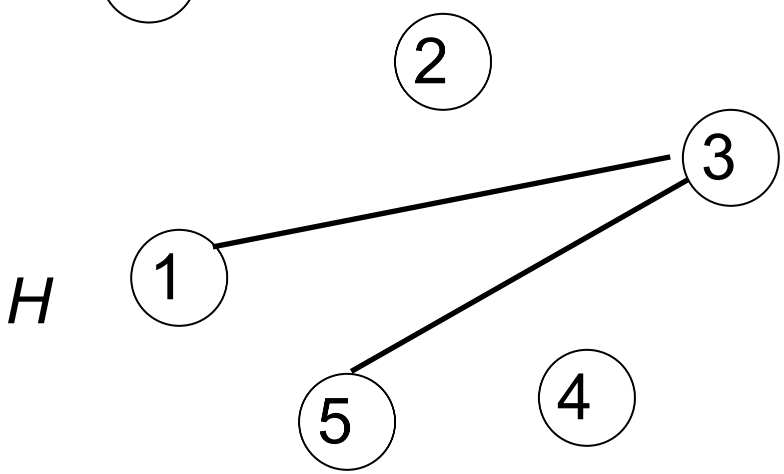
$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \quad 10 - 5 = 5$$

Дополнение подграфа F до графа G. Пусть F – подграф графа G. Граф H называется дополнением F до G, если у него $V_H = V_G$, а E_H определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не смежны в графе F, но смежны в G.

Пример.

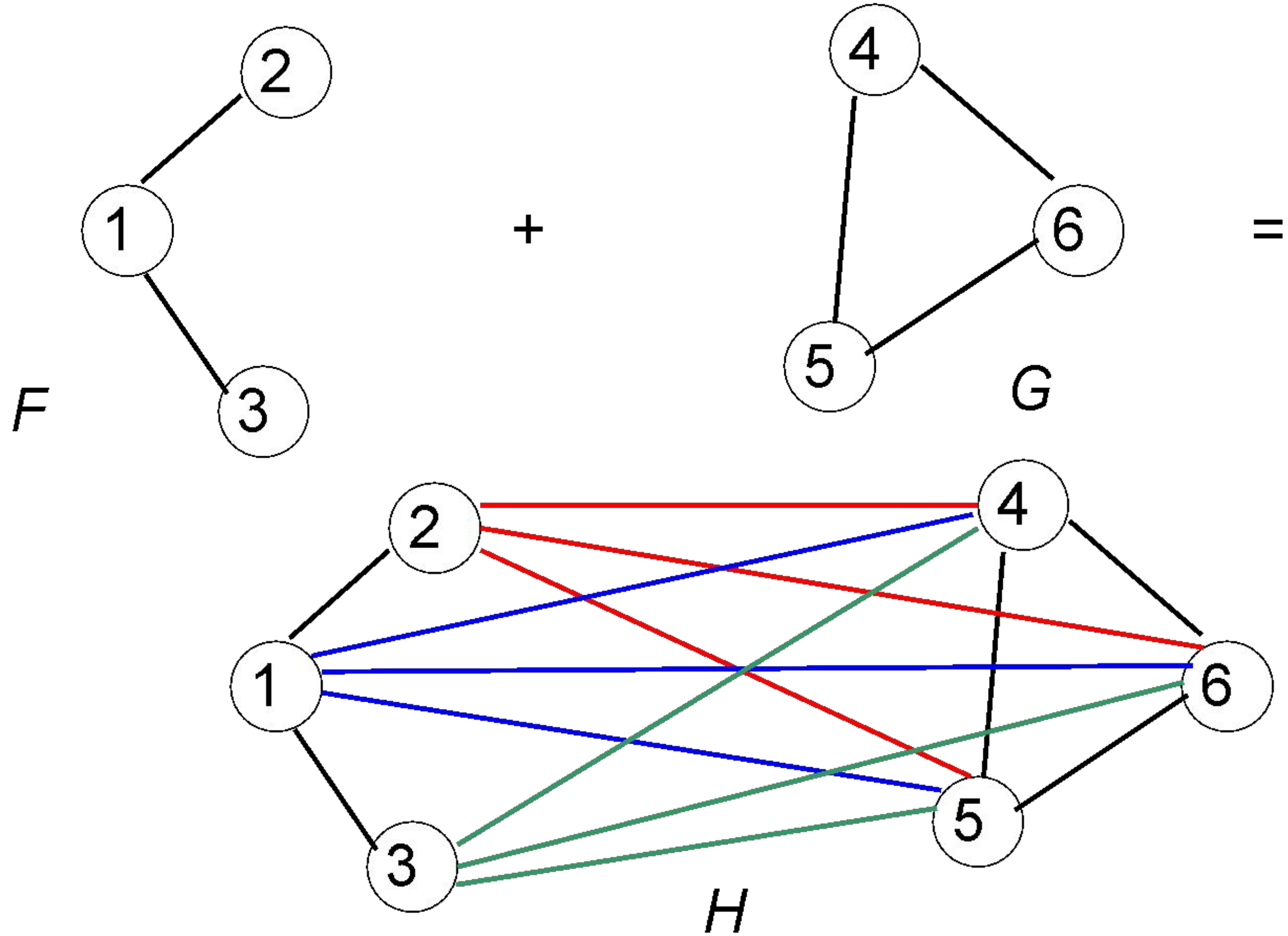






Соединение. Граф H называется соединением графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G \cup E_{FG}$,
где E_{FG} – множество всех дуг, соединяющих вершины из разных графов. Обозначение: $H = F + G$

Пример.



Произведение. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графа. Произведением этих графов называется граф $G = G_1 \times G_2$, для которого

$V_G = V_1 \times V_2$ – декартово произведение множеств вершин исходных графов,

E_G определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда

1) $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2,

2) $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

Пример.