3.6. Деревья

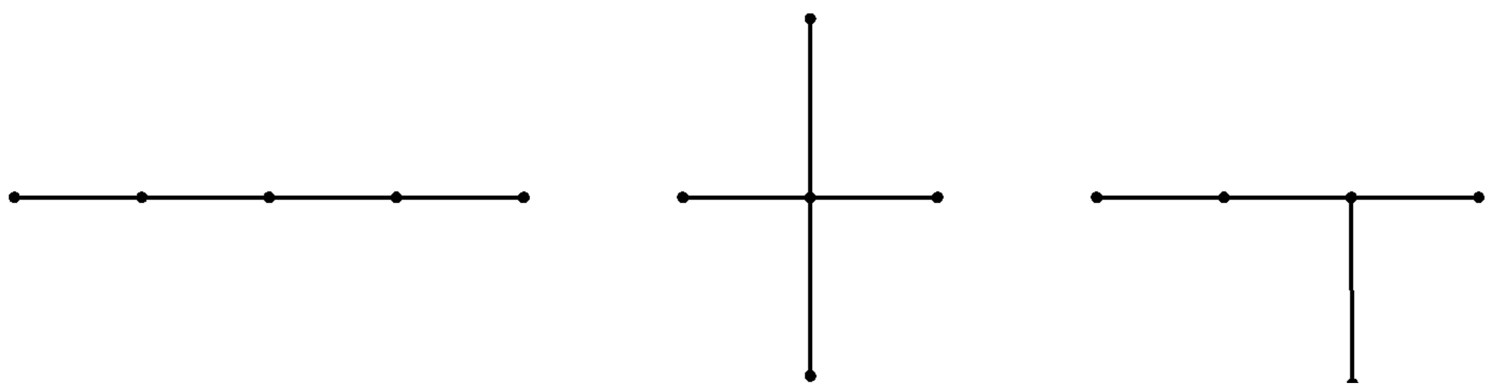
3.6.1. Неориентированные деревья

Граф (связный или несвязный) называется *ациклическим*, если в нем нет циклов.

Дерево – это связный ациклический граф. Если n – число вершин, m – число ребер, то для древовидных графом имеет место соотношение $m = n - 1$.

<u>Пример.</u>

Все различные деревья с 5 вершинами



Теорема (Свойства деревьев). Пусть $G=(V, E)$ - неориентированный граф. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. G является деревом.
2. Для любых двух вершин в G имеется единственная соединяющая их цепь.
3. G - связен, но при удалении из множества E любого ребра перестает быть связным.
4. G - связен и $|E| = |V| -1$.
5. G - ациклический и $|E| = |V| -1$.
6. G - ациклический, но добавление любого ребра к E порождает цикл.

3.6.2. Ориентированные деревья

Ориентированным деревом (или *ордеревом*, или *корневым деревом*) называется орграф со следующими свойствами:

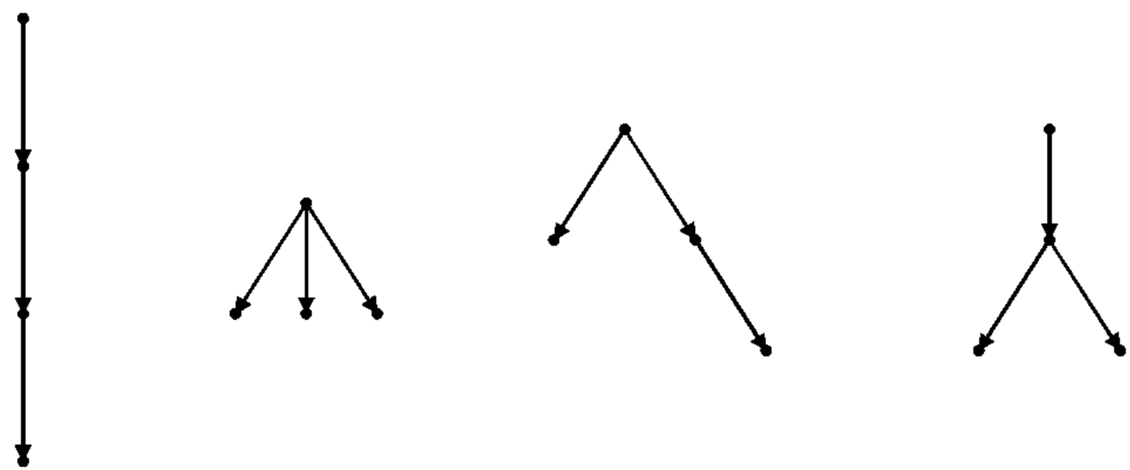
1) существует единственный узел, в который не входит ни один другой узел. Он называется *корнем* ордерева. Полустепень захода корня равна 0;

2) во все остальные узлы входит только по одному узлу. Полустепень захода остальных узлов равна 1;

3) каждый узел достижим из корня.

Пример.

Ориентированные деревья с 4 узлами



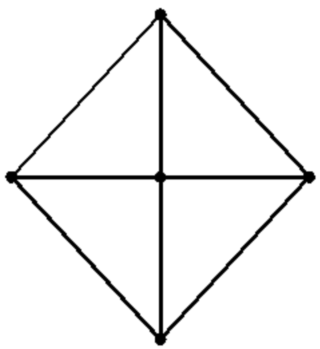
Теорема. Ордерево обладает следующими свойствами:
1. $m=n-1$.
2. Если в ордереве отменить ориентацию ребер, то получится обычное дерево;
3. Для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
4. Подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v, является ордеревом с корнем v. Это ордерево называется *поддеревом узла v*.

Концевая вершина ордерева называется *листом*.
Путь из корня в лист называется *ветвью*.
Длина наибольшей ветви ордерева называется *высотой*.
Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла.
Сам корень имеет уровень 0.
Узлы одного уровня образуют *ярус дерева*.

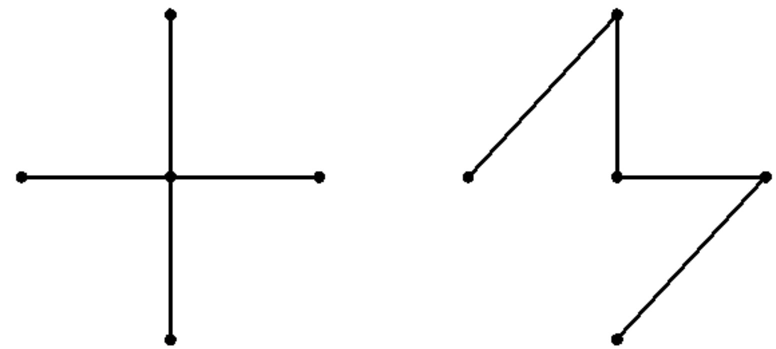
3.6.3. Деревья покрытия. Остовы

Пусть *G* – связный граф. *Деревом покрытия* графа *G* называется подграф, который является деревом, и множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа *G*.

<u>Пример.</u>



Граф



Деревья покрытия

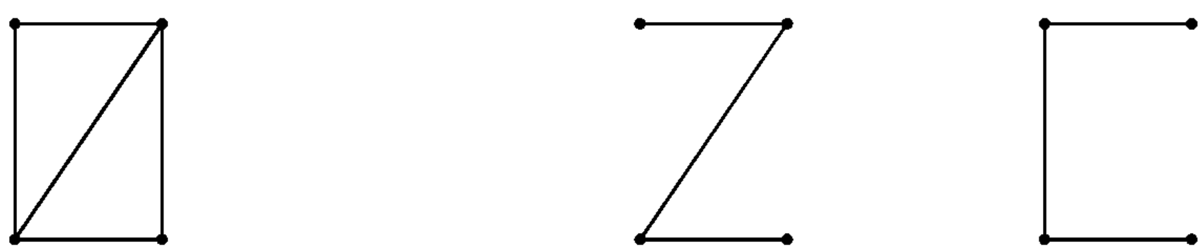
Теорема. Каждый связный граф содержит в себе дерево покрытия.

Пусть G – несвязный граф. *Остовом* (или *каркасом*) графа G называется объединение деревьев покрытия всех его компонент связности.

Следствие. Число ребер произвольного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m - n + k$ (m – число ребер, n – число вершин, k – число компонент связности).

Число $v(G) = m(G) - n(G) + k(G)$ называется *цикломатическим числом* графа G.

<u>Пример.</u>



Граф $m = 5$, $n = 4$, $k = 1$ $v(G) = 5 - 4 + 1 = 2$, т.е. любые 2 ребра необходимо удалить

3.7. Раскраска графов

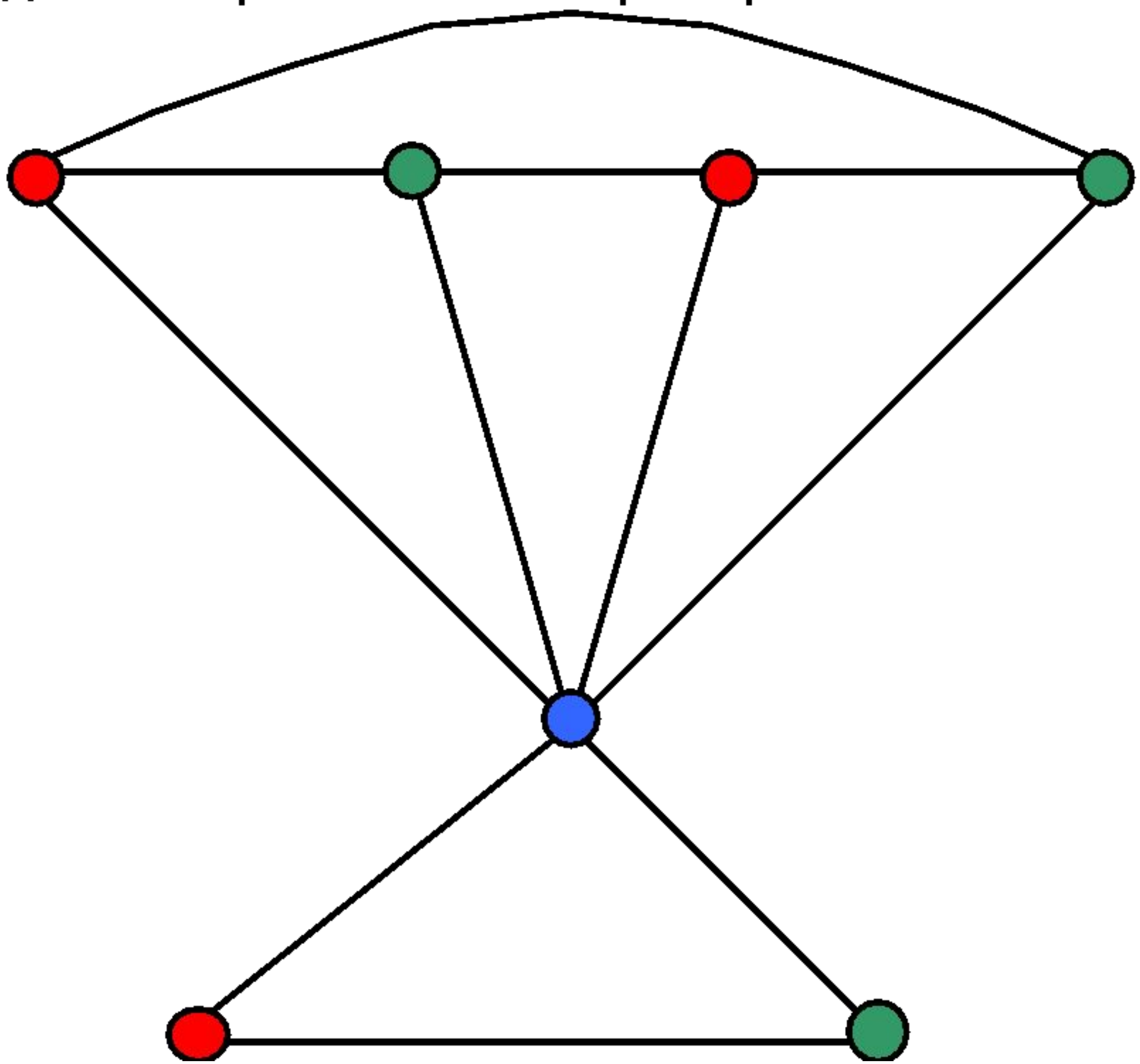
Пусть G - некоторый граф, $k-$натуральное число. Произвольная функция вида $f: V_G \to \{1,\ldots,k\}$ называется $k-$ *раскраской графа* G.

Раскраска называется *правильной,* если $f(u) \neq f(v) \forall$ любых смежных вершин u и v

Алгоритм правильной раскраски

- ✓ произвольной вершины V_1 графа G применим цвет 1.
- ✓ Если вершины $V_1,\ldots,V_i$ раскрашены l цветами $1,2,\ldots,l$, $l \leq i$, то новой произвольно взятой вершине V_{i+1} припишем цвет, не использованный при раскраске вершин из её окружения (т.е. инцидентных ей вершин).

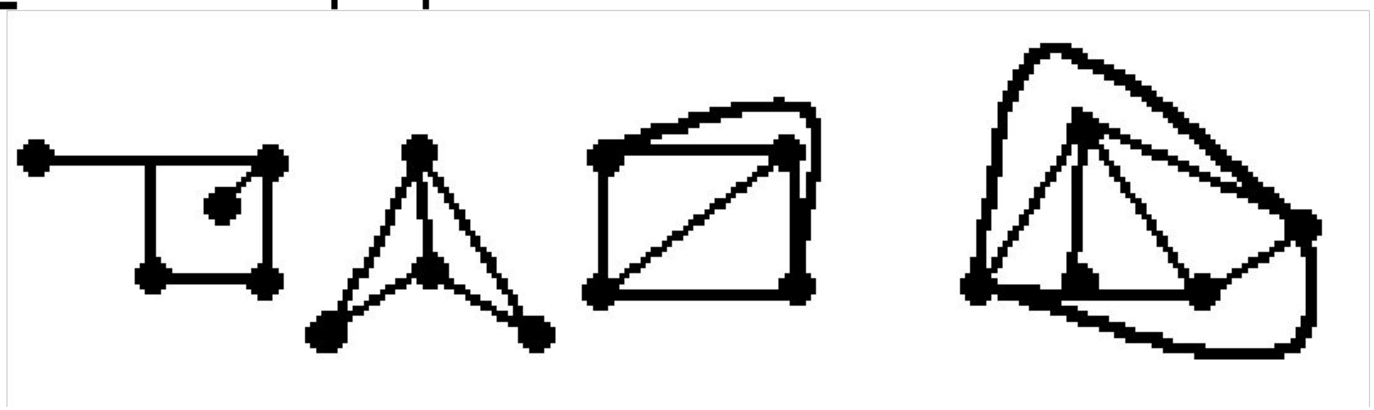
Пример. Одна из правильных 4-раскрасок.



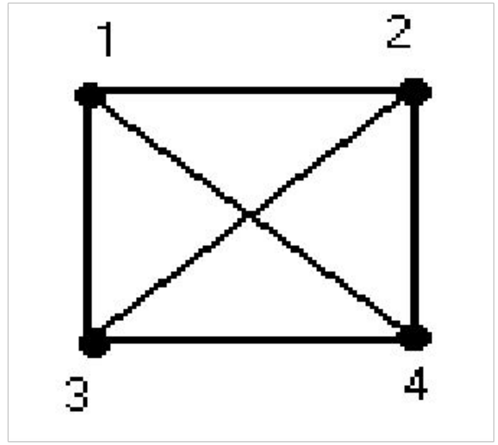
3.8. Планарность

3.8.1. Плоские и планарные графы

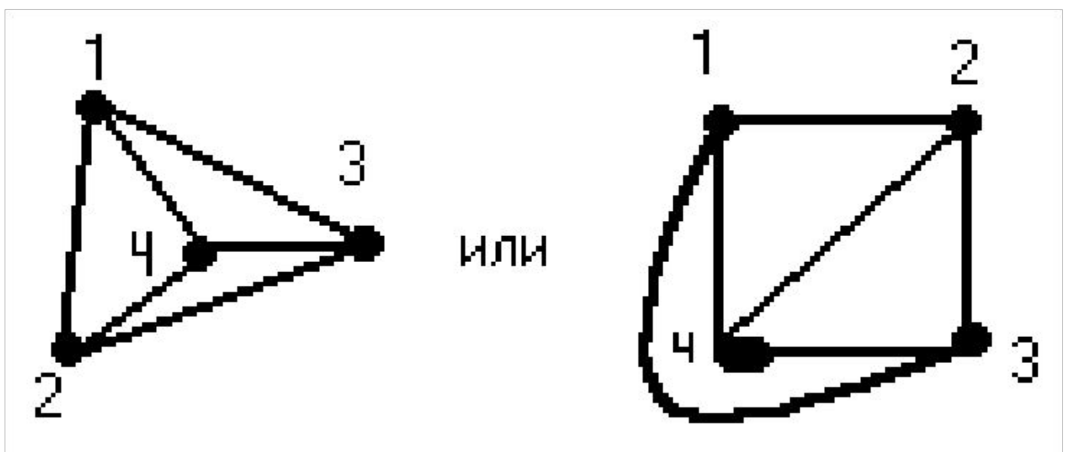
Граф называется *плоским*, если его вершины – это точки лежащие на плоскости, а рёбра – линии на плоскости, которые не пересекаются друг с другом.
Граф называется *планарным*, если он изоморфен плоскому графу.
Пример. Плоские графы:



Пример. Граф K_4:



является планарным т.к. его можно представить в виде плоского



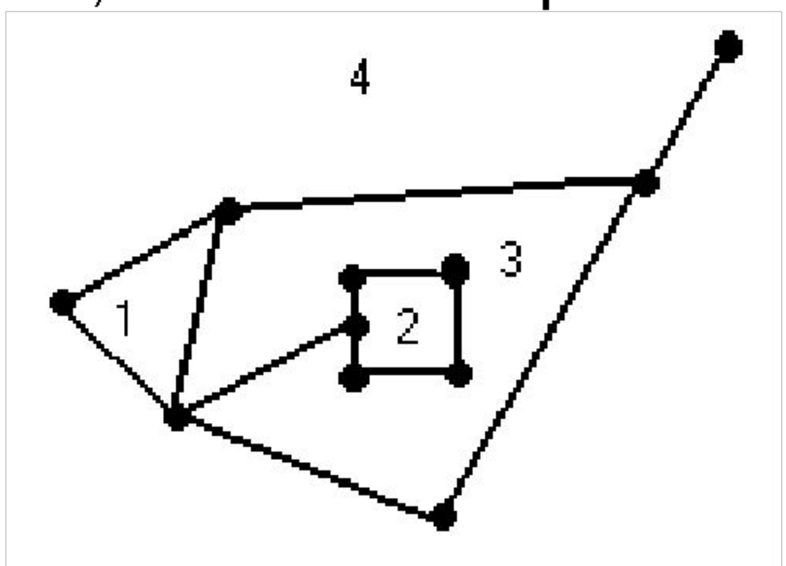
3.8.2. Грани плоского графа. Формула Эйлера

G -связный плоский граф .Область, ограниченная ребрами в графе *G* и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется *гранью*. Внешняя часть плоскости также образует грань.

Таким образом, плоский граф разделяет плоскость на грани.

Границей грани будем считать множество вершин и рёбер, принадлежащей этой грани.

Пример. Граф с 4-мя гранями. Плоский граф имеет единственную неограниченную грань (4). Такая грань называется внешней, а остальные грани - внутренними.



Теорема Эйлера. Для всякого связного плоского графа G верно равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где f -число граней плоского графа.

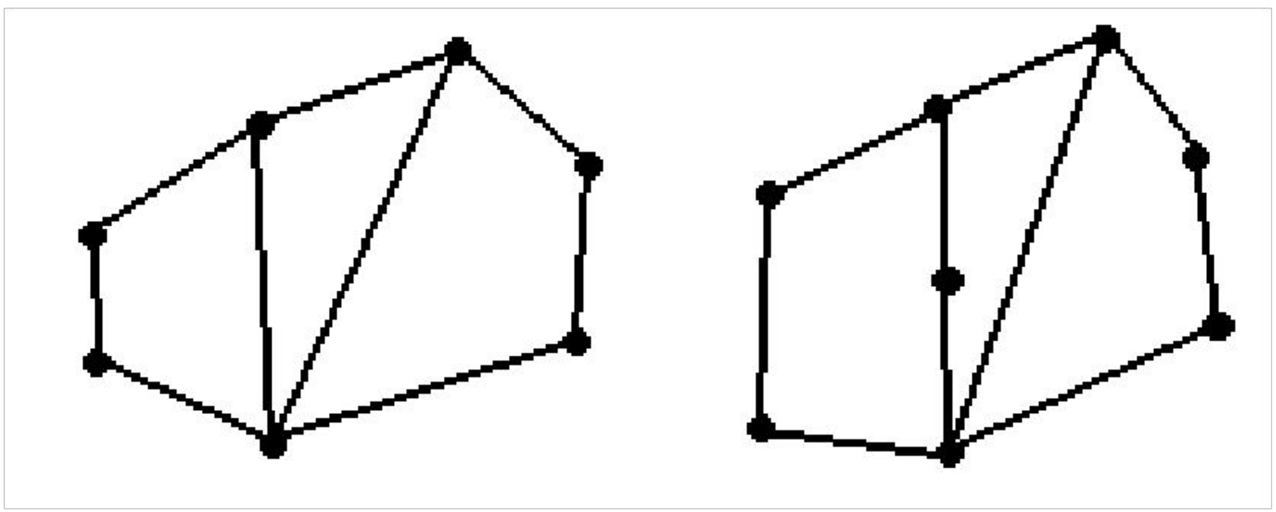
Теорема. Если G связный планарный граф $(n > 3)$, то $m \leq 3n - 6$.

Следствие. K_5 и $K_{3,3}$ непланарны.

3.8.3. Теорема Понтрягина-Куратовского

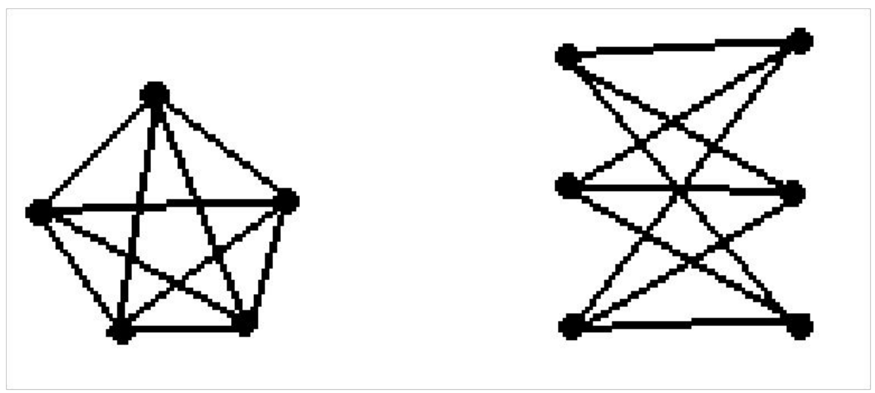
Введем операцию *подразбиения ребра* $e = \{ab\}$ графа. Она состоит в следующем: из графа удалятся ребро e и добавляются два новых ребра $e_1 = \{av\}$ и $e_2 = \{vb\}$, где v новая вершина.

Два графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его рёбер.



Если граф планарный, то любой гомеоморфный ему граф также является планарным.

Теорема (Понтрягина-Куратовского): Граф планарен $\Leftrightarrow$ когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $К_5$ или $К_{3,3}$.



$К_5$ $К_{3,3}$

3.8.4. Алгоритм укладки графа на плоскости

Пусть построена некоторая укладка подграфа $\tilde{G}$ графа G. *Сегментом* S относительно $\tilde{G}$ (или просто сегментом) будем называть подграф графа G одного из двух видов:

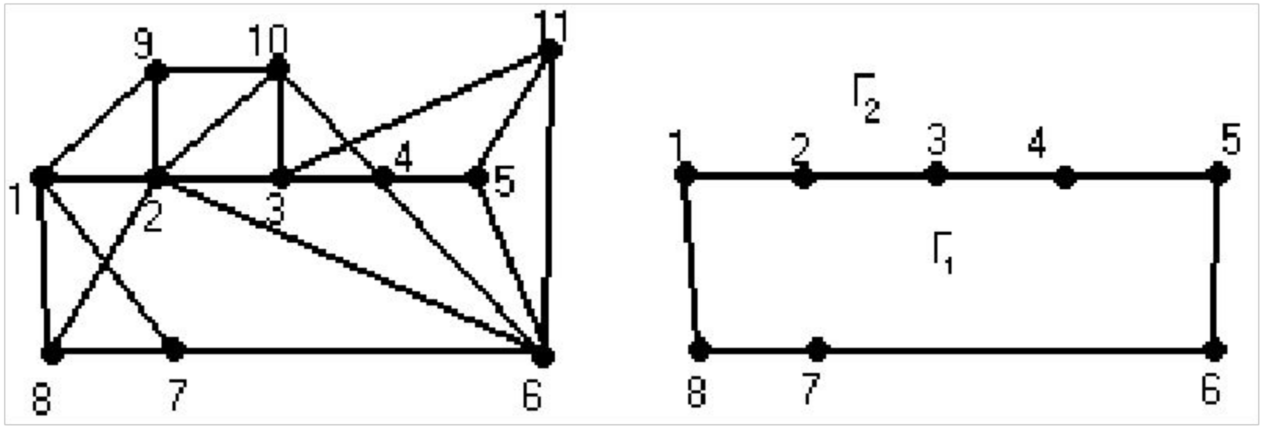
1) Ребро $e = \{u, v\} \in E_G$ такое, что $e \notin E_{\tilde{G}}$, $\{u, v\} \in V_{\tilde{G}}$;

2) Компоненту связности графа $G - \tilde{G}$, дополненную всеми рёбрами графа G, инцидентными ее вершинам (взятой компоненты), и концами этих рёбер.

Вершину v сегмента S относительно $\tilde{G}$ будем называть *контактной*, если $v \in V_{\tilde{G}}$.

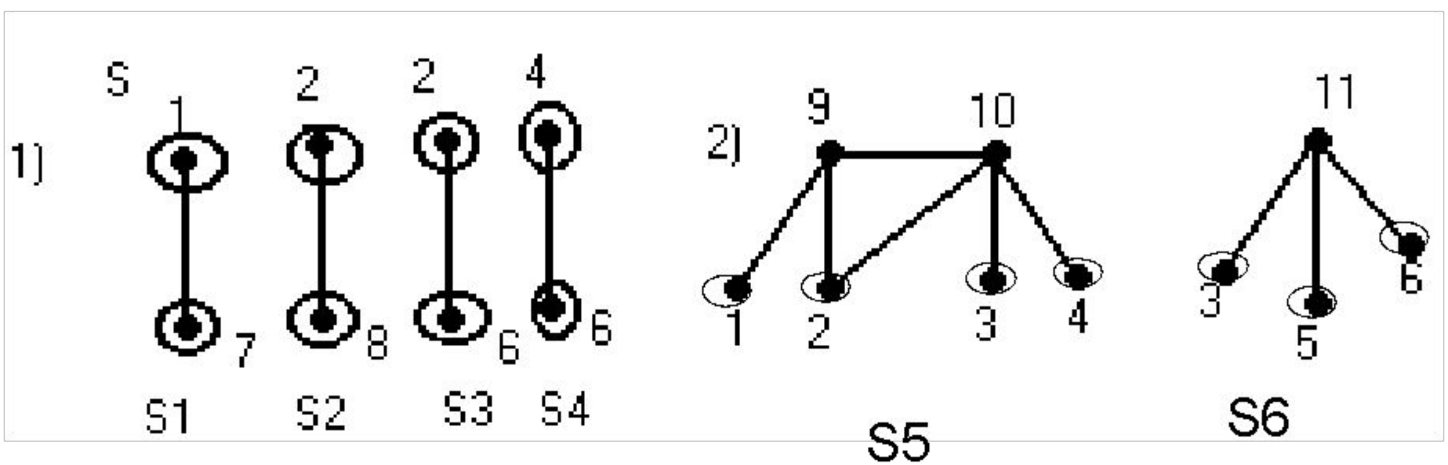
Пример.

G $\qquad\qquad$ $\tilde{G}$



$G-\tilde{G}$ компоненты связности

сегменты



Т.к. $\widetilde{G}$ плоский, то он разбивает плоскость на грани. *Допустимой гранью* для сегмента S относительно $\widetilde{G}$ называется грань Γ графа $\widetilde{G}$, содержащая все контактные вершины сегмента S.

Через $\Gamma(S)$ будем обозначать множество допустимых граней для S. Может оказаться, что $\Gamma(S) = 0$.

Пример. $\Gamma(S) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

Простую цепь L сегмента S, соединяющие две различные контактные вершины и не содержащих других контактных вершин, назовём α – *цепью*.

Алгоритм укладки графа на плоскости

0. Выберем некоторый простой цикл C графа G и уложим его на плоскости. Положим $\tilde{G} = C$.

1. Найдем грани $\tilde{G}$ и сегменты относительно $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто, то перейти к п.7.

2. Для каждого сегмента S определим множество $\Gamma(S)$.

3. Если $\exists$ сегмент S, для которого $\Gamma(S) = \varnothing$

4. Если $\exists$ сегмент S, для которого имеется единственная грань Γ, то перейдём к п.6. Иначе к п.5

5. Для некоторого сегмента $S(\Gamma(S) > 1)$ выбираем произвольно допустимую грань Γ.

6. Поместим произвольную $\alpha - цепь$ $L \in S$ в грань Γ; заменим $\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$ и перейдем к п.1

7. Построена укладка $\tilde{G}$ графа G на плоскости. Конец.