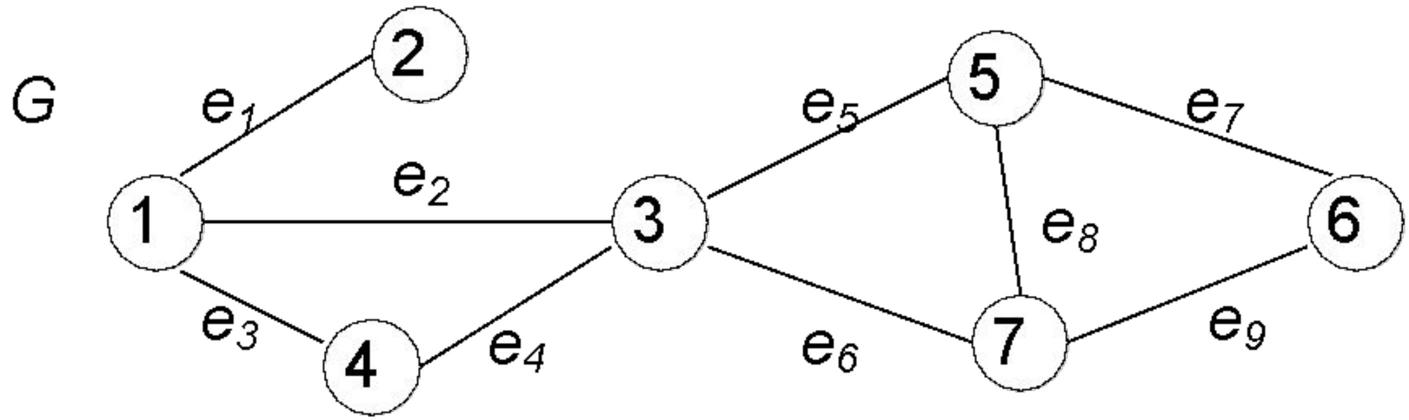
3.2. Элементы графов

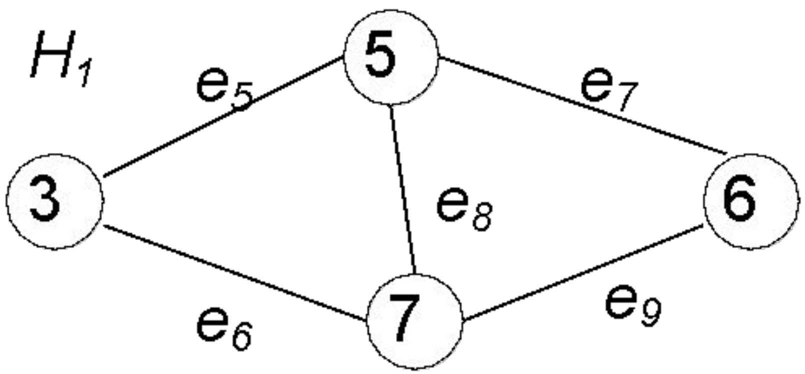
3.2.1. Подграфы

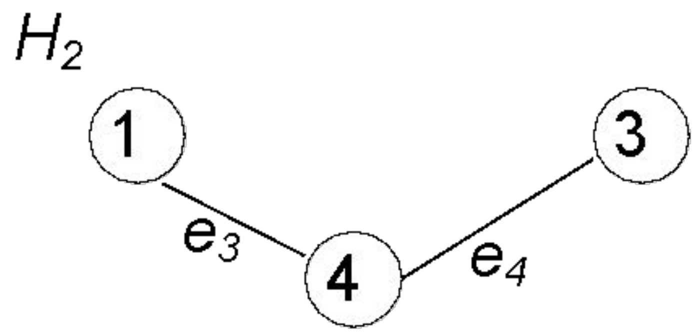
Граф H называется *подграфом* (или частью) графа G, если $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$.

Пример.



$$V_G = \{1,2,3,4,5,6,7\},\ E_G = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$





$$V_{H_1} = \{3,5,6,7\}$$

$$E_{H_1} = \{e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

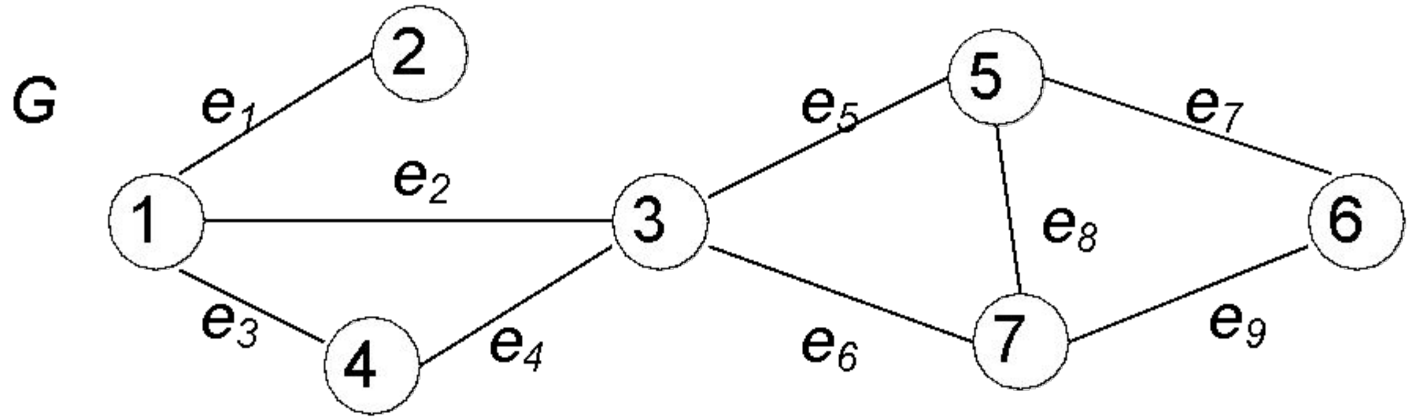
$$V_{H_2} = \{1,3,4\}$$

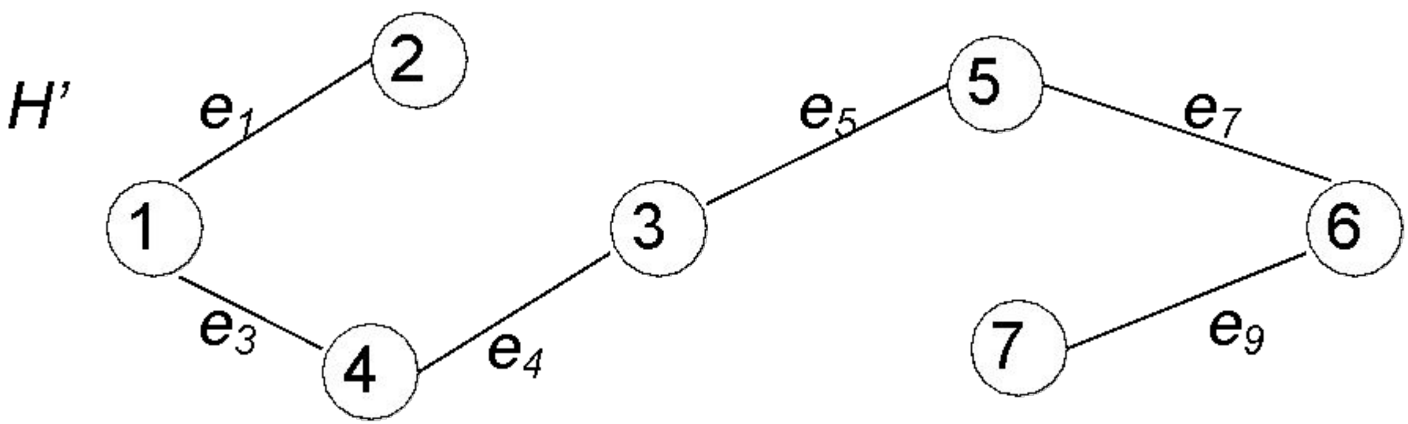
$$E_{H_2} = \{e_3, e_4\}$$

Подграф H называется *о́стовным подграфом*, если $V_H = V_G$; в нем нет циклов.

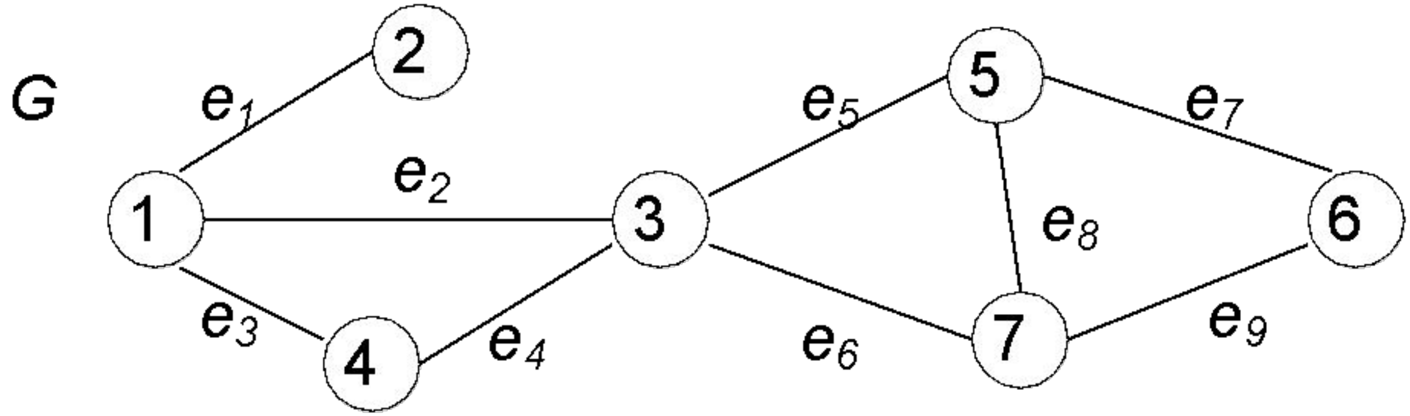
О́стов H покрывает вершины неориентированного графа G, если любая вершина графа G инцидентна хотя бы одному ребру из H.

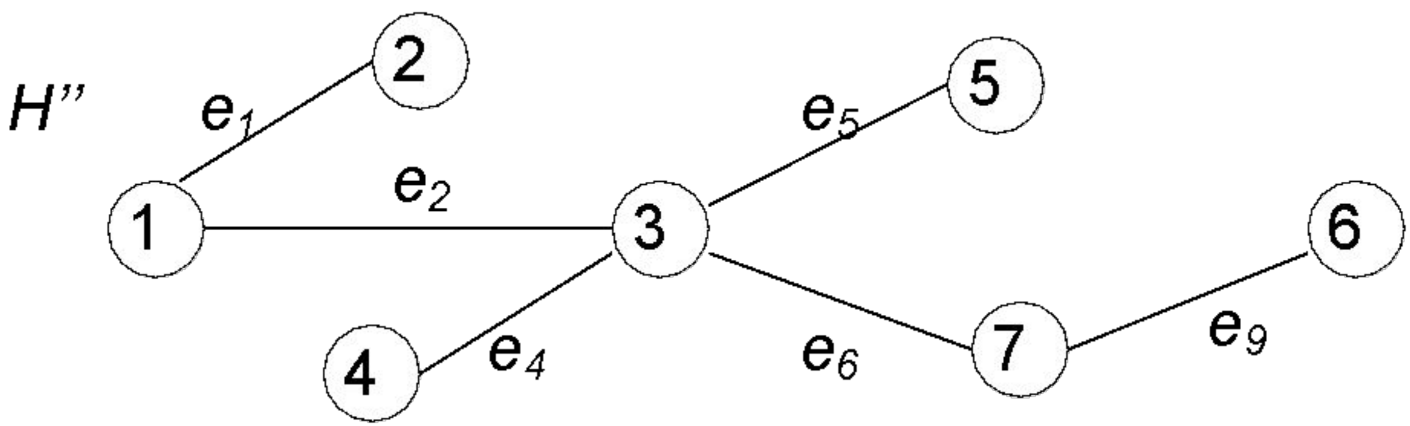
Пример.





Пример.

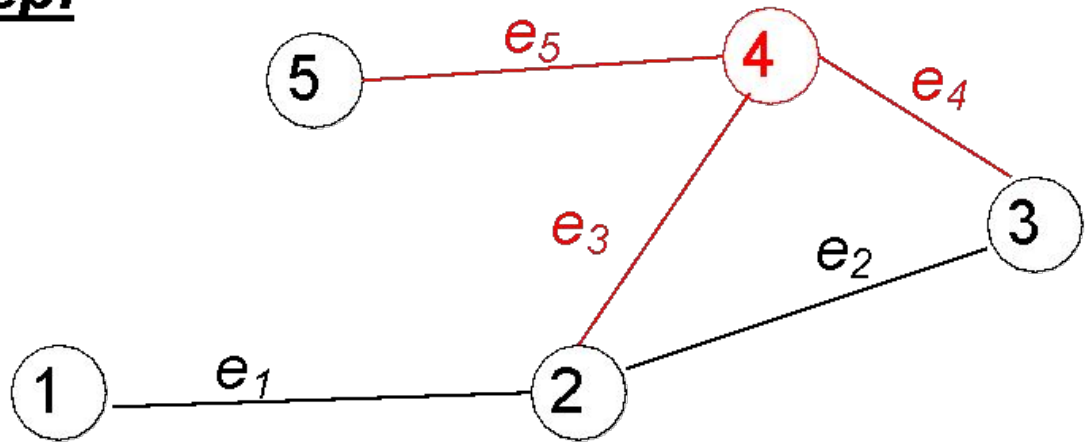




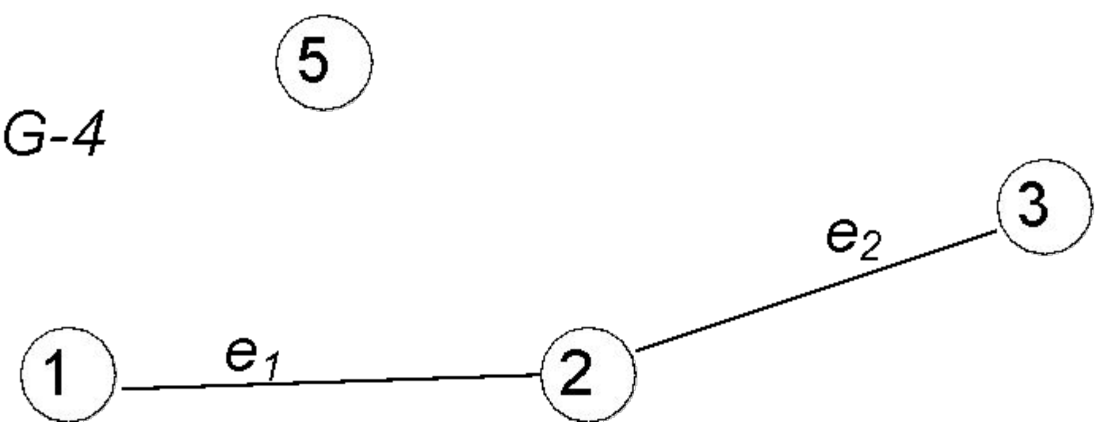
Пусть v – вершина графа G. Граф $G_V = G - v$ получается из графа G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер.

Пример.

G



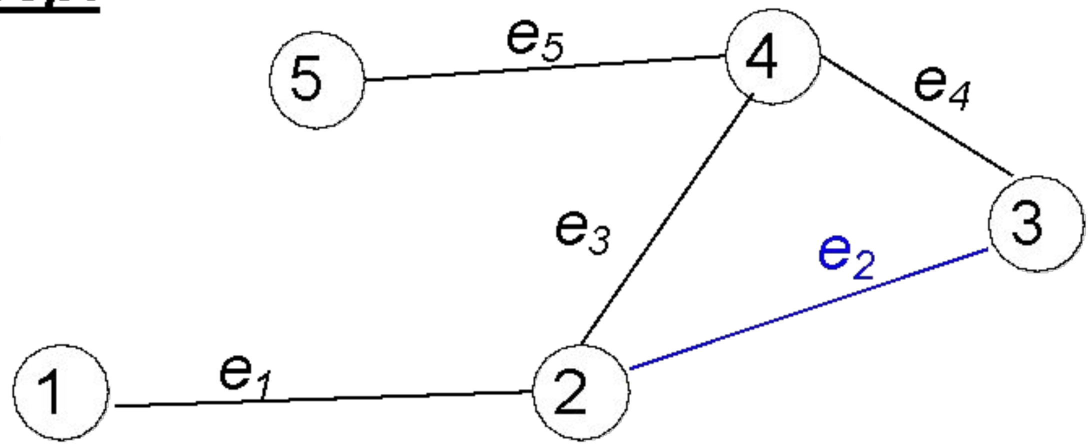
$G_4 = G - 4$



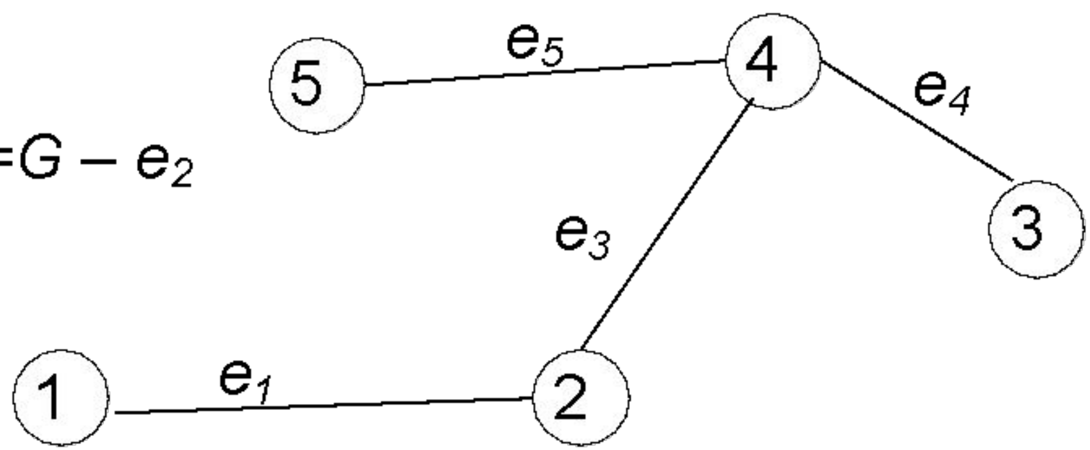
Пусть e – ребро графа G. Граф $G_e = G - e$ получается из графа G удалением ребра e, при этом концы ребра не удаляются.

Пример.

G



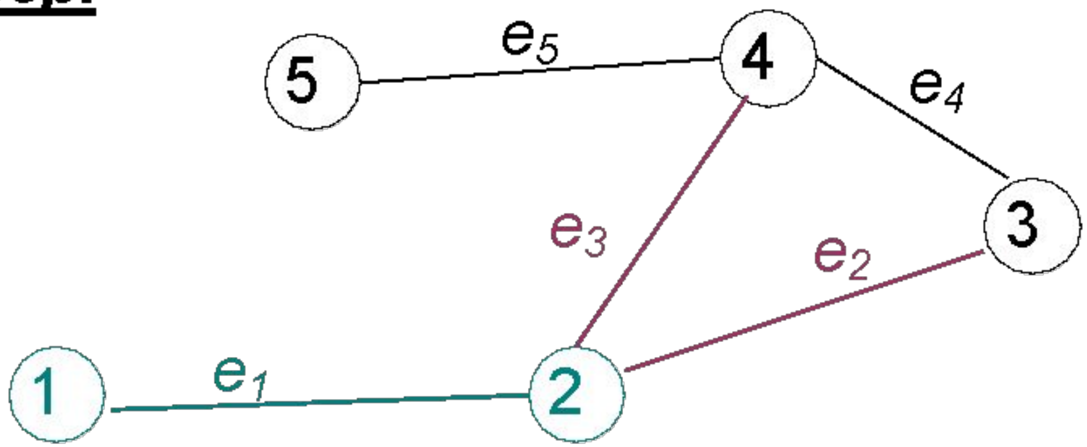
$G_{e2}=G - e_2$



Пусть X – множество каких-либо элементов (вершин и ребер) графа G. Подграф $G - X$ получается удалением из G всех вершин и ребер, входящих в X, а также всех ребер, хотя бы один конец которых принадлежит X.

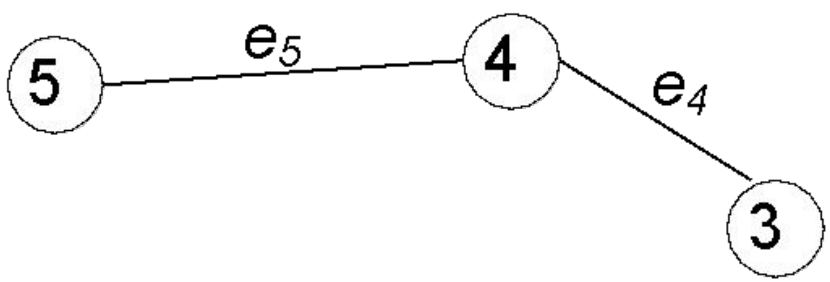
Пример.

G



$X = \{1, e_1, 2\}$

$G - X$



3.3.4. Связность в орграфах

Пусть $D(V, A)$ - орграф, v_1 и v_2 - его вершины. Тогда

1) две вершины v_1 и v_2 *сильно связаны* в орграфе D, если существует путь (ориентированная цепь) из v_1 в v_2 и из v_2 в v_1;

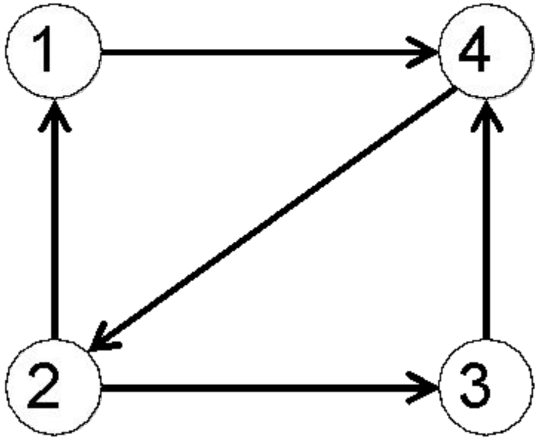
2) две вершины v_1 и v_2 *односторонне связаны* в орграфе D, если существует путь (ориентированная цепь) либо из v_1 в v_2, либо из v_2 в v_1;

3) две вершины v_1 и v_2 слабо связаны в орграфе D, если они связаны в неориентированном графе G, полученном из орграфа D путем отмены ориентации ребер.

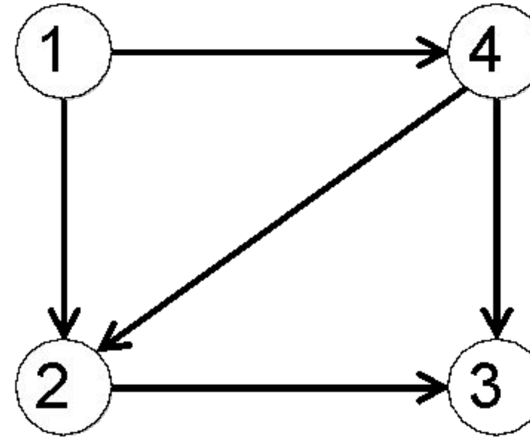
Сильная связанность влечет одностороннюю связанность, которая влечет слабую связанность. Обратное неверно.

Пример.

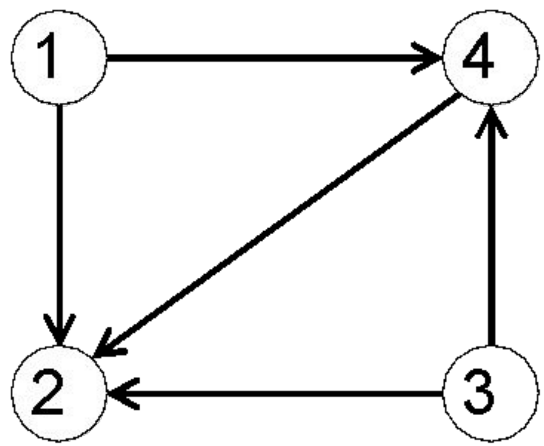
D_1



D_2



D_3



Компонента сильной связности (КСС) орграфа D - это его максимально сильно связный подграф.

Каждая вершина графа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считается, что она сама образует КСС.

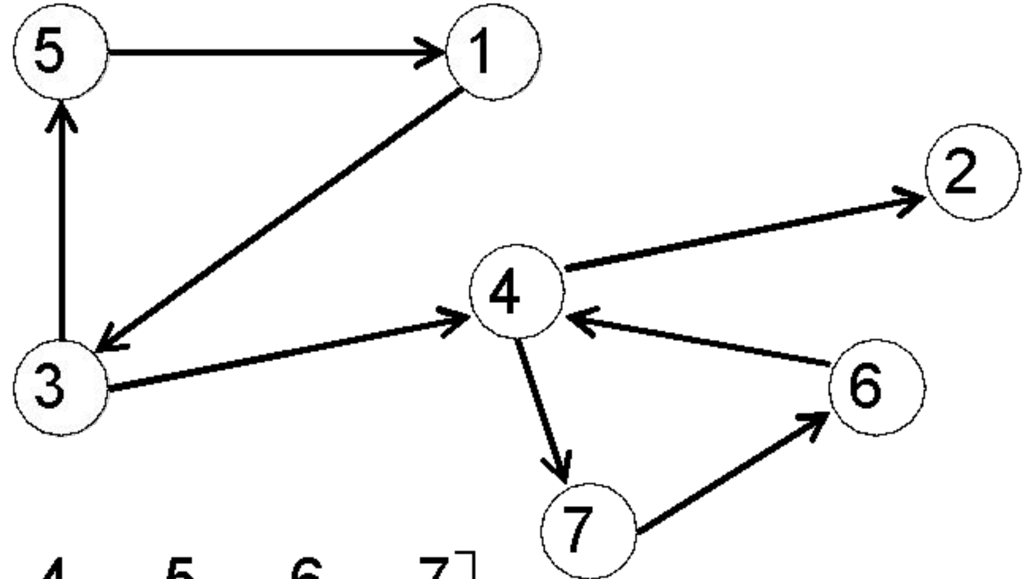
S – матрица компонент сильной связности (n-го порядка)

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i \to j \quad и \quad j \to i, \\ 0, & иначе \end{cases}$$

главная диагональ матрицы содержит 1.

Пример.

D



$$S_1 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S_3 = \begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Компоненты сильной связности:

{1, 3, 5}

{4, 6, 7}

{2}