8. Элементы комбинаторного анализа

Термин «***комбинаторика***» происходит от латинского слова «combina» – «сочетать», «соединять».

Комбинаторика- это раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными свойствами

Комбинато́рика (Комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисление элементов) и отношения на них (например, частичного порядка).

Комбинаторика связана с алгеброй, геометрией, теорией вероятностей, и имеет широкий спектр применения, например в информатике и статистической физике.

8.1. Основные правила комбинаторики

<u>Правило суммы</u>. Если элемент x может быть выбран m способами, а элемент y – другими n способами, то выбор «либо x либо y» может быть осуществлен $(m + n)$ способами.

<u>Правило произведения</u>. Пусть необходимо выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами, …, k-тое n_k способами, то все k действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

8.2 Перечислительная комбинаторика

Кортеж - конечная последовательность элементов.

Пусть A- конечное множество из n элементов, т.е. $|A| = n$.

<u>Размещения.</u> Кортежи длины k $(1 \le k \le n)$, состоящие из различных элементов множества A, называются размещениями из n элементов множества A по k, если кортежи отличаются один от другого как самими элементами, так и их порядком.

Обозначение A_n^k.

Схема выбора состоит в выборе k элементов из n -элементного множества без возвращения.

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ - факториал числа n

Пример

1) $0!=1$

$1!=1$

$2!=1\cdot 2=2$

$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=3!4=24$

$5!=4!5=24\cdot 5=120$ и т.д.

2) Дано множество $A=\{1,3,5\}$. Выписать все размещения из 3-х элементов по 2.

$$n=3, k=2$$

$$A_3^2=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=6$$

$$\{1,3\},\ \{1,5\},\{3,5\},\{3,1\},\{5,1\},\{5,3\}$$

<u>Перестановки.</u> Пусть A-множество, $|A|=n$. Кортежи длины n, состоящие из различных элементов множества A и отличающиеся друг от друга только порядком, называются перестановками.

Обозначение P_n

Формула $P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=n!$

Пример.

Выяснить, сколько 3-х значных чисел можно составить из цифр 7,8,9, если каждая входит в число один раз. $A=\{7,8,9\}, |A|=3=n$

$P_n = P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, а именно: 789;798;879;897;978;987.

Сочетания. Кортежи длины k $(1 \le k \le n)$, состоящие из различных элементов множества A, называются сочетаниями из n элементов по k, если они упорядочены, т.е. кортежи с одними и теми же элементами, расположенными в разном порядке, считаются равными $\Rightarrow$ учитываются один раз.

Обозначение C_n^k

Число сочетаний из n по k меньше числа размещений из n по k в P_{k} раз, т.е.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример.

Какие парные сочетания можно составить из цифр 0,4,6 и сколько:

$(0;4), (0;6), (4;6)$

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

Тождества

$$C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}, \text{ где } \ 0 \le r \le k \le n$$

Доказательство.

$$C_n^k \cdot C_k^r = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}$$

$$C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r-k+r)!(k-r)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}$$

5. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

8.3 Комбинации элементов с повторениями

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются кортежи длины k, составленные из множества A, где $|A| = n$. Обозначается $\overline{A_n^k}$

Формула $\overline{A_n^k} = n^k$

<u>Пример.</u> Сколько двухзначных чисел можно составить из элементов множества $A = \{3,4,5\}$, если число может состоять из 2-х цифр.

33,34,35,43,44,45,53,54,55.

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

$$\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$$

Перестановкой с повторениями состава $(n_1, ..., n_k)$ из элементов $(a_1, ..., a_k)$

называют любой кортеж длины $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, в которых элемент a_1 входит n_1 раз, a_2 - n_2 раза,….., a_k - n_k раз.

Обозначают $P(n_1, n_2, ..., n_k)$

Формула $P(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} = \dfrac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... n_k!}$

<u>Пример.</u>

Сколько слов можно получить, переставив буквы в слове «математика»?

Составим комплект $\widetilde{A}=\{à,à,à,å,è,ê,ì\ ,ì\ ,ò,ò\}$.Его функция экз-ти $\psi_{\widetilde{A}}=[311122]$. Значит, при перестановке букв получится:

$$P(3,1,1,1,2,2)=\frac{(3+1+1+1+2+2)}{3!1!1!1!2!2!}=\frac{10!}{3!1!1!1!2!2!}=151200 \text{ слов.}$$

Сочетания с повторениями. Пусть имеются предметы n видов и из них составляется набор, содержащий k элементов, т.е. различными исходами будут все возможные наборы длины k, отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называются сочетаниями с повторениями и их число равно:

$$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$$

Пример.

Сколько наборов из 7 элементов можно составить из элементов множества $A=\{1,3,5,7\}$, $k=7, n=4$:

$$\overline{C_4^7}=C_{4+7-1}^7=C_{10}^7=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120\,.$$

8.4 Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n;$$

$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ - биномиальные коэффициенты.

Свойства коэффициентов:

Если $a = b = 1$, то $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots. + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Если $a = 1, b = -1$, то $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots. + (-1)^n C_n^n = 0$

Треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

и т.д.

9. Кодирование

9.1 Алфавитное кодирование. Таблица кодов.

Кодированием называют отображение произвольного множества А в множество конечных последовательностей в некотором алфавите *B*,

декодирование - обратное отображение.

Теория кодирования представляет собой один из разделов дискретной математики, в котором рассматривается процесс представления информации в определённой стандартной форме и обратный процесс восстановления информации по этому представлению.

Пример.

1) Представление десятичных чисел двоичным кодом
2) Уравнение $y = kx + b$ кодирует прямую.

Алфавитное кодирование – это представление информации в стандартной форме, при которой элементарным синтаксическим единицам языка сообщений последовательно сопоставляется кодовые комбинации символов из некоторого заданного алфавита.

Пример.

Азбука Морзе: буквам сопоставляются слова в алфавите из 3-х символов $\{\cdot, -, \wedge\}$, где $\wedge$ -пробел .

Пусть задан алфавит сообщений $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, состоящий из конечного числа букв. Конечная последовательность букв из $\alpha = a_{i_1}a_{i_2}....a_{i_k}$ называется *словом* в алфавите A, а число k - длиной слова α. Если $k=0$, то слово называется *пустым* и обозначается $\wedge$.

A^* - множество всех непустых слов конечной длины в алфавите A.

Если $\mathrm{S}\subset \mathrm{A}^*$, то слова из S называются сообщениями, а объект, порождающий слова из S-источником сообщений. Источником может быть человек, автомат и т.д.

Пусть, кроме алфавита А, задан ещё алфавит $\mathrm{B}=\{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,...,\mathrm{b}_\mathrm{m}\}$. Зададим отображение f, которое каждому слову $\alpha \in \mathrm{S}$ ставит в соответствие слово $\beta \in \mathrm{B}^*$, где B^* - множество всех непустых слов конечной длины в алфавите В.

Слово β будем называть *кодом сообщения* α, а процесс перехода от слова α к слову β - *кодированием*.

$\mathrm{f}:\mathrm{A}^* \to B^*$

Алфавитное кодирование определяется следующим образом. Во множестве B^* выбираются некоторым образом r слов $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$, называемые *элементарными кодами.*

По определению получаем, что $f(a_i) = \beta_i, i = 1,2,...r$. Тогда код любого слова $\alpha = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} .... \alpha_{i_k} \in A^*$ есть следующее слово:

$$\beta(\alpha) = f(\alpha_{i_1}) f(\alpha_{i_2}) .... f(\alpha_{i_k}) = \beta_{i_1} \beta_{i_2} .... \beta_{i_p}$$

Схема, определяющая отображение f на буквах алфавита A, называется *схемой кодирования*, обозначается $\sum$ и оформляется в виде таблицы:

a_1	a_2	$\dots$	a_{r-1}	a_r
β_1	β_2	$\dots$	β_{r-1}	β_r

Множество кодовых слов $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}$ будем обозначать $C(\sum)$

9.2. Достаточный признак взаимной однозначности алфавитного кодирования

Введем следующие понятия.

Если $\beta = \beta'\beta''$, то β' называется началом, или *префиксом*, слова β, а β'' — окончанием, или *постфиксом*, слова β.

Если $\beta' \neq \wedge$, то β' называется *собственным началом.*

Если $\beta'' \neq \wedge$, то β'' называется собственным окончанием слова β.

Схема алфавитного кодирования **обладает свойствами префикса**, если ни один элементарный код ***не является*** префиксом другого элементарного кода.

Теорема 9.1. Если схема $\sum$ алфавитного кодирования обладает свойством префикса, то алфавитное кодирование взаимно однозначно.

Доказательство. Допустим, что некоторое слово $\beta \in B^*$ допускает два декодирования. Это значит, что β можно представить в двух видах:

$\beta_1 = \beta_{i_1}\beta_{i_2}....\beta_{i_k}; \beta_2 = \beta_{j_1}\beta_{j_2}....\beta_{j_l}$

Так как эти представления различны, то существует такое p, что $1 \le p \le \min(k,l)$ для которого $\beta_{i_p} \neq \beta_{j_p}$. Но тогда одно из слов β_1 и β_2 есть префикс другого. Это противоречит условию теоремы. Следовательно, наше утверждение о существовании двух декодирований неверно. Теорема доказана.

Заметим, что условие *префиксности* не является необходимым, т. е. другими словами, схема алфавитного кодирования может не обладать свойствами префиксности, но алфавитное кодирование, задаваемое этой схемой, будет взаимно однозначным.

Слово $b_{i_n}b_{i_{n-1}}\ldots b_{i_1}$ будем называть обратным к слову $\beta = b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_n}$ и обозначать β^{-1}.

Схему кодирования, полученную из схемы кодирования $\Sigma(\beta_1,\ldots,\beta_r)$ заменой каждого элементарного кода β_i на β_i^{-1}, будем называть обратной к схеме $\sum$ и обозначать $\sum^{-1}$.

Теорема 9.2. Если схема Σ или схема Σ^{-1} обладает свойством префикса, то тогда алфавитное кодирование, определяемое схемой Σ или Σ^{-1}, будет взаимно однозначным.

Доказательство. Очевидно, что алфавитные кодирования, задаваемые схемами $\sum$ и $\sum^{-1}$, одновременно или обладают, или не обладают свойством взаимной однозначности. Отсюда немедленно следует справедливость теоремы 2.

Условие теоремы *2* не является необходимым, так как существуют схемы кодирования $\sum$, со свойством взаимной однозначности, но такие, что ни $\sum$, ни $\sum^{-1}$ не обладают свойством префиксности.

Пример.

Выяснить, обладает ли код $C(\Sigma)$ свойством префикса

1. $C(\Sigma)=\{a,\ ba,\ bb,\ bbba\}$

2. $C(\Sigma)=\{ab,\ bb,\ ba,\ aab\}$

3. $C(\Sigma)=\{ac,\ c,\ bb,\ abc,\ bac,\ abb,\ abcb\}$

4. $C(\Sigma)=\{a,\ ba,\ cfb,\ acb\}$

5. $C(\Sigma)=\{a,\ ba,\ bba,\ \ldots,\ b^n a\}$

6. $C(\Sigma)=\{a,\ ba,\ \ldots,\ ba^n,\ \ldots\}$

9.3. Общий критерий взаимной однозначности

Представление элементарного кода β_1 схемы алфавитного кодирования $\sum$ в виде

$$\beta_i = \beta' \beta_{i_1} \ldots . \beta_{i_k} \beta''$$

где слово β' не может оканчиваться на элементарный код, а слово β'' начинаться с элементарного кода, будем называть *нетривиальным разложением* элементарного кода. При этом одно из слов β' или β'' может быть пустым $(\wedge)$.

Для определения однозначности или неоднозначности схемы алфавитного кодирования существует эффективный алгоритм, использующий понятие нетривиального разложения элементарных кодов.

Опишем этот алгоритм.

1. Для каждого элементарного кода выписываем все нетривиальные разложения.
2. Выписываем множество M_1, состоящее из слов β', которые входят в качестве начал в нетривиальные разложения элементарных кодов.
3. Выписываем множество M_2, состоящее из всех слов β'' , которые являются окончанием нетривиальных разложений элементарных кодов.

4. Составляем множество $M = M_1 \cap M_2 \cup \{\wedge\}$, т. е. множество слов, встречающихся как в качестве начала, так и в качестве окончания в нетривиальных разложениях элементарных кодов.
5. Выписываем все разложения элементарных кодов, связанных с множеством M, т. е. все разложения элементарных кодов вида:

$\beta_i = \beta'\beta_{i_1}....\beta_{i_k}\beta''$

Где $\beta', \beta'' \in M$, а k может быть равно 0.

6. По разложениям, полученным в пункте 5, строится ориентированный граф G_Σ следующим образом. Вершины графа отождествляют с элементами множества M. Пара вершин β' и β'' соединяются ориентированными ребрами в том и только в том случае, если существует разложение $\beta'\beta_{i_1}....\beta_{i_k}\beta''$. При этом ребру (β', β'') приписывается слово $\beta_{i_1}....\beta_{i_k}$ соответствующее этому разложению.

7. По полученному графу G_Σ легко проверить, обладает или нет исходная схема кодирования свойством взаимной однозначности.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (А. А. Маркова). Алфавитное кодирование со схемой $\sum$ не обладает свойством взаимной однозначности тогда и только тогда, когда граф G_Σ содержит ориентированный цикл (контур), проходящий через вершину $\wedge$. Т. е. алфавитное кодирование является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда в графе G_Σ отсутствуют контуры и петли, проходящие через вершины $\wedge$.

Замечание. Напомним, что если схема алфавитного кодирования $\sum$ не обладает свойством взаимной однозначности, то это означает, что существуют слова из B^*, допускающие два кодирования. Одно из таких слов β легко находится по графу G_Σ .

Для записи слова β нужно посмотреть ориентированный цикл, проходящий через вершину $\wedge$, начиная с $\wedge$, и выписать последовательно все слова, приписанные ребрам и вершинам, входящим в этот цикл.

10. Элементы теории чисел

10.1. Основные понятия и определения

Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Целыми называются числа Z={…, –2, –1, 0, 1, 2, …}.

Для любых $a, b \in Z$ сумма $(a+b)$, разность $(a-b)$ и произведение $(a \cdot b)$ являются целыми числами. Но частное $\frac{a}{b}$, если $b \neq 0$, может быть как целым, так и не целым.

Если $\frac{a}{b}$ есть целое число, то обозначают $a = b \cdot q$, где q – целое число, а b называют делителем числа a и записывают $b \mid a$. В общем случае записывают $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$, где r называют остатком от деления.

Всякое целое, делящее одновременно целые *a*, *b*, …, называется их <u>общим делителем</u>. Наибольший из общих делителей называется <u>наибольшим общим делителем</u> (<u>НОД</u>).

Целое <u>число *a* есть кратное числа *b*</u>, если $a = b \cdot q$ для некоторого целого числа q. Ненулевое целое число b делит целое число a ($b \mid a$), если a есть кратное b. Целое <u>число *b*</u>, которое делит целое число *a*, называется <u>делителем числа *a*</u>.

Пример

1) число 9 делит число 27, т.е. $9 \mid 27$ $(27 = 9 \cdot 3)$, но число 5 не делит число 16, т.к. не существует целого q, то $16 = 5 \cdot q$.

Положительное целое число d называется общим делителем чисел a и b, если $d \mid a$ и $d \mid b$.

Положительное целое число d называется наибольшим общим делителем целых чисел a и b, если

1) $d \mid a$ и $d \mid b$, и

2) из $c \mid a$ и $c \mid b$ следует $c \mid d$

Обозначение НОД (a, b)

10.2. Свойства НОД

В общем случае $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$, где $r -$ остаток от деления.

1. Если $a = b \cdot q$, то $(a, b) = b$.

2. Если $a = b \cdot q + r$, то общие делители чисел a и b те же, что и общие делители чисел b и r.

3. Алгоритм Евклида для определения НОД.

Пусть a и b – положительные числа и $a > b$ составим ряд равенств:

$a = b \cdot q_0 + r_0$	$0 < r_0 < b$	$r_1 = r_2 q_3 + r_3$	$0 \le r_3 < r_2$
$b = r_0 \cdot q_1 + r_1$	$0 < r_1 < r_0$	$r_2 = r_3 q_4 + r_4$	$0 \le r_4 < r_3$
		$\dots$	
$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$0 < r_2 < r_1$	$r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}$	$0 \le r_{k+2} < r_{k+1}$
		$\dots$	

Существует $r_k = 0$. Пусть S – первое целое число такое, что $r_S = 0$. Тогда $r_{S-1} = НОД(a, b)$, если $S > 0$, и $b = НОД(a, b)$, если $S = 0$.

Пример. 1. Найти НОД (203, 91)

1) делим 203 на 91 и получаем

$$203 = 91 \cdot 2 + 21$$

$$a = b \cdot q_0 + r_0$$

2) делим $b = 91$ на $r_0 = 21$:

$$91 = 21 \cdot 4 + 7$$

$$b = r_0 \cdot q_1 + r_1$$

3) делим $r_0 = 21$ на $r_1 = 7$

$$21 = 7 \cdot 3 + 0$$

$$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$S = 2$. $НОД(a,b) = r_{2-1} = r_1 = 7$.

2. Найти НОД (9, 3).

1) $9 = 3 \cdot 3 + 0$

$a = b \cdot q_0 + r_0$

$S = 0 \Rightarrow НОД(9,3) = 3$.

Если $НОД(a,b)=1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

Тогда если a и b взаимно простые числа, то существуют целые числа u и v такие, что $a \cdot u + b \cdot v = 1$.

Положительное целое число m называется *общим кратным* чисел a и b, если $a \mid m$ и $b \mid m$.

Положительное целое число m называется *наименьшим общим кратным* чисел a и b, если

1) $a \mid m$ и $b \mid m$, и

2) если $a \mid n$ и $b \mid n$, то $m \mid n$.

Обозначается НОК (a, b).

Теорема. Если a и b – положительные числа, то $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = a \cdot b$.

<u>Пример.</u>

$$НОК(203,91) = \frac{a \cdot b}{НОД(a,b)} = \frac{203 \cdot 91}{7} = 2639.$$

10.3. Простые числа

Каждое целое число *a* делится на само себя и на 1. Каждое целое делит 0, но 0 не делит никакое целое число. Для некоторых задач необходимо знать, имеет ли некоторое конкретное целое число делители, отличные от него и 1.

Целое число, больше 1, называется простым, если оно не имеет положительных делителей, кроме 1 и самого себя. Положительное целое, больше 1, называется составным, если оно не является простым.

Целое число 1 не является ни простым, ни составным. Число 2 – единственное четное простое число.

2, 3, 5, 7 – простые числа

4, 6, 8, 9, 10 – составные числа

10.4. Основная теорема арифметики

Теорема. Любое положительное целое число, больше, чем 1, либо является простым, либо может быть записано в виде произведения простых чисел, причем это произведение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Пример.

$n = 39616304 = 2\cdot 13\cdot 7\cdot 2\cdot 23\cdot 13\cdot 2\cdot 13\cdot 2\cdot 7 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 13\cdot 13\cdot 13\cdot 23$

$= 2^4\cdot 7^2\cdot 13^3\cdot 23^1.$

Следствие. Каждое положительное целое число, больше 1, может быть записано единственным образом с точностью до порядка в виде $q_1^{k(1)}q_2^{k(2)}...q_n^{k(n)}$, где $k(1), k(2),..., k(n)$ – положительные целые числа.

Теорема. Пусть $a = p_1^{a(1)}\cdot ...\cdot p_k^{a(k)}$, $b = p_1^{b(1)}\cdot ...\cdot p_k^{b(k)}$, где p_i – простые числа, которые делят либо a, либо b, некоторые a_i и b_i могут быть равны 0. Пусть $m(i) = \min(a(i), b(i))$, $M(i) = \max(a(i), b(i))$, $1 \le i \le k$. Тогда $НОД(a,b) = p_1^{m(1)}...p_k^{m(k)}$, $НОК = p_1^{M(1)}...p_k^{M(k)}$.

<u>Пример.</u>

$$a = p_1^{a(1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{a(k)}, \qquad b = p_1^{b(1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{b(k)}$$

$$a = 195000 =$$

$$b = 10435750 =$$

$$НОД(a,b) = p_1^{m(1)} \ldots p_k^{m(k)},\ НОК = p_1^{M(1)} \ldots p_k^{M(k)}$$

$$НОД =$$

$$НОК =$$

$$НОД = 2^{\min(3,1)} \cdot 3^{\min(1,0)} \cdot 5^{\min(4,3)} \cdot 13^{\min(1,3)} \cdot 19^{\min(0,1)} = 3250.$$
$$НОК = 2^{\max(3,1)} \cdot 3^{\max(1,0)} \cdot 5^{\max(4,3)} \cdot 13^{\max(1,3)} \cdot 19^{\max(0,1)} = 626145000.$$