Алгоритм Флойда-Уоршалла

Находит кратчайшие расстояния между всеми парами вершин графа

Идея: Строится специальная матрица *D*, элементы которой – кратчайшие пути между всевозможными парами вершин графа *G*. При определении кратчайшего пути выбирается минимум из «прямого» расстояния между смежными вершинами v_i и v_j и суммарного расстояния при проходе через дополнительную вершину. Затем – более длинные пути и т.д.

Обозначим через $d_{ij}^{(m)}$ длину кратчайшего

пути из v_i в v_j с промежуточными вершинами во множестве $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Алгоритм использует три правила:

1) $d_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ - вес дуги, соединяющей вершины v_i и v_j (т.е. первоначально матрица D – это исходная матрица весов).

2)

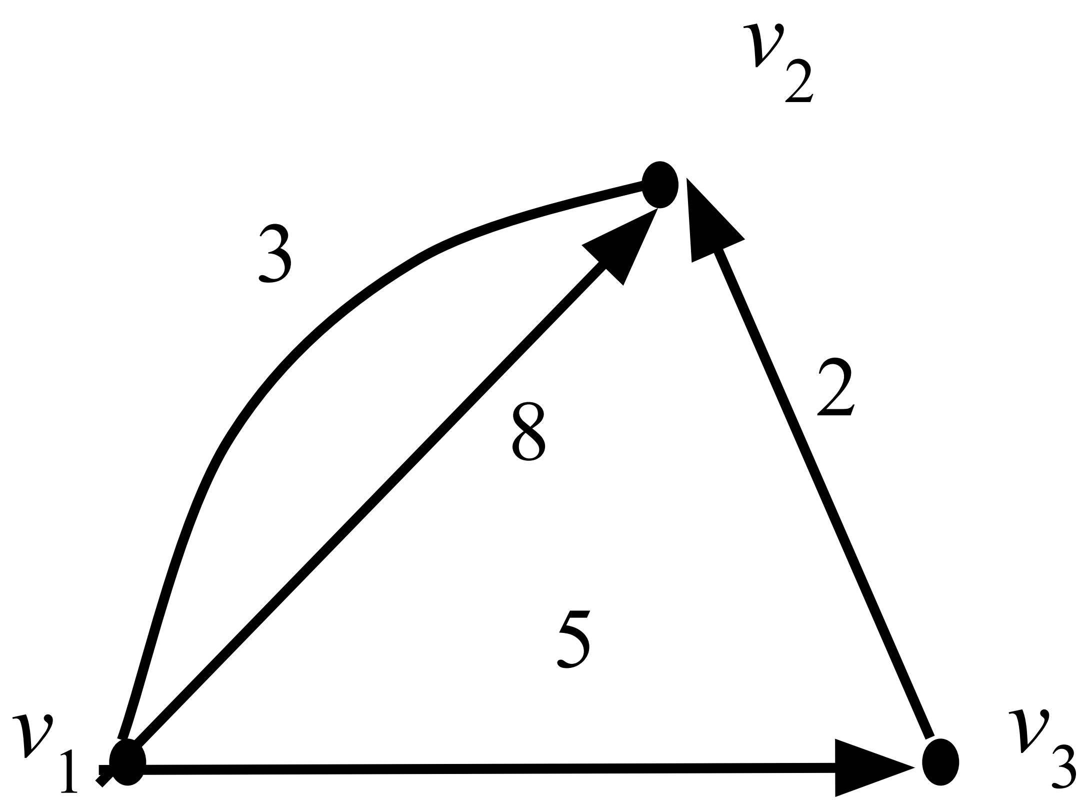
$$d_{ij}^{(m+1)} = \min\left(d_{ij}^{(m)}, d_{i,m+1}^{(m)} + d_{m+1,j}^{(m)}\right)$$

3) Длина кратчайшего пути из вершины v_i в вершину v_j:

$$d\left(v_i, v_j\right) = d_{ij}^{(n)}$$

Алгоритм строит матрицу за *n* шагов, т.е. строится матрица $D^{(1)}$, …, $D^{(n)}$ =D.

Пример. Найдем матрицу кратчайших расстояний для графа.



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\
D^{(0)} = & \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}
\end{array}
$$

Элементы матрицы $D^{(1)}$ находим по правилу:

$$d_{ij}^{(1)} = \min\left(d_{ij}^{(0)}, d_{i1}^{(0)} + d_{1j}^{(0)}\right)$$

$$d_{11}^{(1)} = \min\left(d_{11}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\right) = \min(0,0) = 0$$

$$d_{12}^{(1)} = \min\left(d_{12}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\right) = \min(8,8) = 8$$

$$d_{13}^{(1)} = \min\left(d_{13}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\right) = \min(5,5) = 5$$

$$d_{21}^{(1)} = \min\left(d_{21}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\right) = \min(3,3+0) = 3$$

$$d_{22}^{(1)} = \min\left(d_{22}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\right) = \min(0,3+8) = 0$$

$$d_{23}^{(1)} = \min\left(d_{23}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\right) = \min(\infty,3+5) = 8$$

$$d_{31}^{(1)} = \min\left(d_{31}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\right) = \min(\infty, \infty + 0) = \infty$$
$$d_{32}^{(1)} = \min\left(d_{32}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\right) = \min(2, \infty + 8) = 2$$
$$d_{33}^{(1)} = \min\left(d_{33}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\right) = \min(0, \infty + 5) = 0$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $D^{(2)}$ находим по правилу:

$$d_{ij}^{(2)} = \min\left(d_{ij}^{(1)}, d_{i2}^{(1)} + d_{2j}^{(1)}\right)$$

$$d_{11}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{11}^{(1)}, d_{12}^{(1)} + d_{21}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(0{,}8+3) = 0$$

$$d_{12}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{12}^{(1)}, d_{12}^{(1)} + d_{22}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(8{,}8+0) = 8$$

$$d_{13}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{13}^{(1)}, d_{12}^{(1)} + d_{23}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(5{,}8+8) = 5$$

$$d_{21}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{21}^{(1)}, d_{22}^{(1)} + d_{21}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(3{,}0+3) = 3$$

$$d_{22}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{22}^{(1)}, d_{22}^{(1)} + d_{22}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(0{,}0+0) = 0$$

$$d_{23}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{23}^{(1)}, d_{22}^{(1)} + d_{23}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(8{,}0+8) = 8$$

$$d_{31}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{31}^{(1)}, d_{32}^{(1)} + d_{21}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(\infty{,}2+3) = 5$$

$$d_{32}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{32}^{(1)}, d_{32}^{(1)} + d_{22}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(2{,}2+0) = 2$$

$$d_{33}^{(2)} = \mathbf{min}\left(d_{33}^{(1)}, d_{32}^{(1)} + d_{23}^{(1)}\right) = \mathbf{min}(0{,}2+8) = 0$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

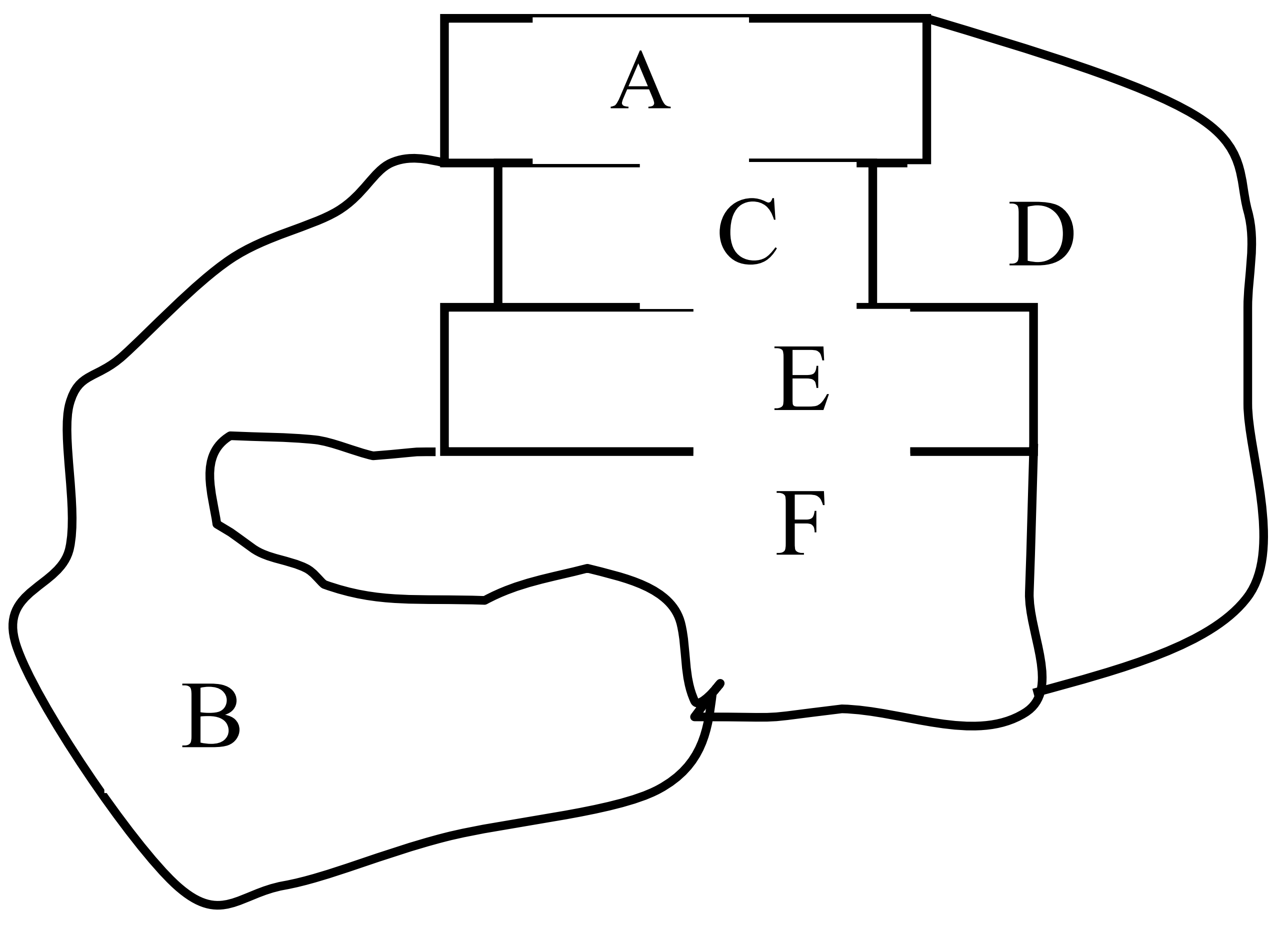
Элементы матрицы $D^{(3)}$ находим по правилу:

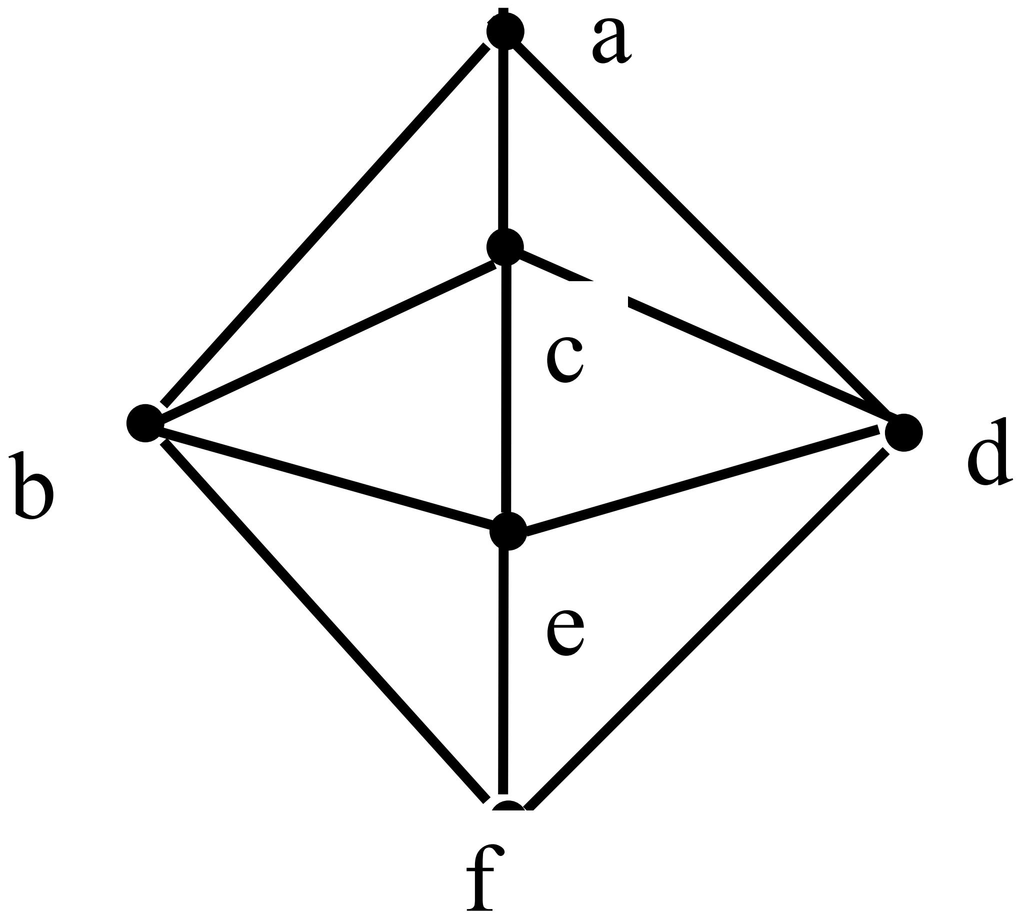
$$d_{ij}^{(3)} = \min\left(d_{ij}^{(2)}, d_{i3}^{(2)} + d_{3j}^{(2)}\right)$$

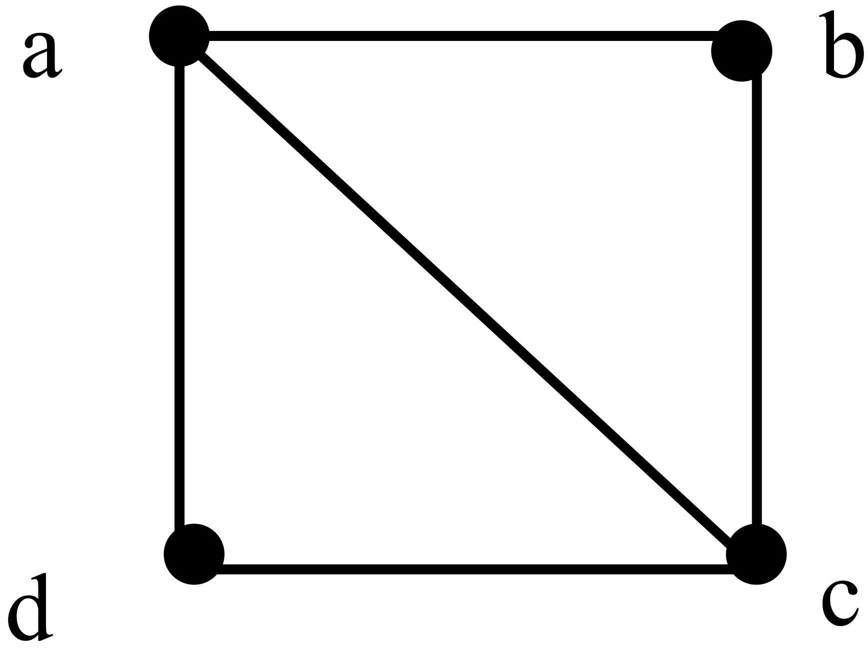
$$d_{11}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{11}^{(2)}, d_{13}^{(2)} + d_{31}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(0{,}5+5) = 0$$
$$d_{12}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{12}^{(2)}, d_{13}^{(2)} + d_{32}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(8{,}5+2) = 7$$
$$d_{13}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{13}^{(2)}, d_{13}^{(2)} + d_{33}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(5{,}5+0) = 5$$
$$d_{21}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{21}^{(2)}, d_{23}^{(2)} + d_{31}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(3{,}8+5) = 3$$
$$d_{22}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{22}^{(2)}, d_{23}^{(2)} + d_{32}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(0{,}8+2) = 0$$
$$d_{23}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{23}^{(2)}, d_{23}^{(2)} + d_{33}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(8{,}8+0) = 8$$
$$d_{31}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{31}^{(2)}, d_{33}^{(2)} + d_{31}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(5{,}0+5) = 5$$
$$d_{32}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{32}^{(2)}, d_{33}^{(2)} + d_{32}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(2{,}2+0) = 2$$
$$d_{33}^{(3)} = \mathbf{min}\left(d_{33}^{(2)}, d_{33}^{(2)} + d_{33}^{(2)}\right) = \mathbf{min}(0{,}0+0) = 0$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = D^{(3)}$$

3.6.7 Раскраска графов




a
b
c
d
e
f



4*3*2*2=48

Раскраской графа G называется окрашивание вершин графа G, такое, что никакие две смежные вершины не окрашены в один цвет.

Пусть $C_G(\lambda)$ обозначает количество способов раскраски графа G с использованием λ цветов, так, что никакие две соседние вершины не окрашены в разные цвета. Для фиксированного графа G это полиномиальная функция от λ.

Само λ при этом называется *хроматическим числом*.

Хроматическое число графа – это наименьшее положительное число *n*, такое что $C_G(n) \neq 0$.

Проблема четырёх красок эквивалентна утверждению, что $C_G(4) \neq 0$ для произвольного графа.