



# Тема 1. Множества

# 1.1 Основные понятия

**Множество** - совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством.

Множества обозначают большими латинскими буквами  $A, B, C, D, \dots X, Y, Z$ .

Объекты, объединенные общим свойством, называются **элементами множества** и обозначаются малыми латинскими буквами  $a, b, c, d, \dots x, y, z$ .

Запись  $a \in A$  означает, что элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ , запись  $a \notin A$  означает, что элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$ .

Множество, число элементов которого конечно, называется **конечным**, в противном случае – **бесконечным**. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью чисел натурального ряда, то оно называется **счетным**, в противном случае – **несчетным** так, множество четных чисел есть **счетное множество**, а множество действительных чисел – **несчетное множество**.

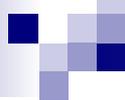
**Дискретные множества** – это конечные и счетные множества.

Количество элементов в конечном множестве  $A$ , называется мощностью множества и обозначается  $|A|$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом  $\emptyset$ .

**Универсальное множество** – это множество всех элементов, которые могут встретиться в исследовании. Обозначается  $\Omega$ .

Если каждый элемент множества  $A$  есть вместе с тем элемент множества  $B$ , то говорят, что множество  $A$  есть подмножество множества  $B$  и обозначается это как  $A \subseteq B$ . Если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , то множества  $A$  и  $B$  называются равносильными, что записывается в виде  $A=B$ . Любое множество  $A$  есть подмножество самого себя. Такое подмножество называют несобственным подмножеством. К числу несобственных подмножеств относят также пустое множество. Все прочие подмножества исходного множества  $A$  называются собственными подмножествами.



Задать множества можно различными способами:

- перечислением или списком своих элементов;
- порождающей процедурой, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов или других объектов ;
- характеристическим предикатом  $P(x)$ , т.е. описанием характеристического свойства, которым должны обладать его элементы :  
 $M = \{ x \mid P(x) \}$ .

## 1.2 Операции над множествами

Самого по себе понятия множества еще недостаточно – необходимо определить способы конструирования новых множеств из уже имеющихся, т.е. определить операции над множествами.

1. Объединением  $A \cup B$  двух множеств  $A$  и  $B$  является множество  $M$ , состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы к одному из множеств  $A$  и  $B$ , т.е.

$$M = A \cup B = \{m \mid m \in A \text{ или } m \in B\}$$

2. Пересечением  $A \cap B$  двух множеств  $A$  и  $B$  является множество  $M$ , состоящее из элементов, принадлежащих как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ , т.е.

$$M = A \cap B = \{m \mid m \in A \text{ и } m \in B\}$$

3. Разностью  $A \setminus B$  множеств  $A$  и  $B$  является множество  $M$ , состоящее из элементов, принадлежащих множеству  $A$  и не принадлежащих множеству  $B$ , т.е.

$$M = A \setminus B = \{m \mid m \in A \text{ и } m \notin B\}$$

4. Симметрической разностью  $A + B$  множеств  $A$  и  $B$  является множество  $M$ , содержащее все элементы из  $A$ , не принадлежащие  $B$ , а также все элементы из  $B$ , не принадлежащие  $A$ , т.е.

$$M = A + B = \{m \mid m \in A \text{ и } m \notin B\} \text{ или } = \{m \mid m \notin A \text{ и } m \in B\}$$

5. Дополнением  $\bar{M}$  (до  $\Omega$ ) множества  $M$  является множество, состоящее из элементов универсального множества  $\Omega$ , не принадлежащих  $M$ , т.е.

$$\bar{M} = \{m \mid m \in \Omega \text{ и } m \notin M\}$$

Операцию дополнения обозначают символом

.

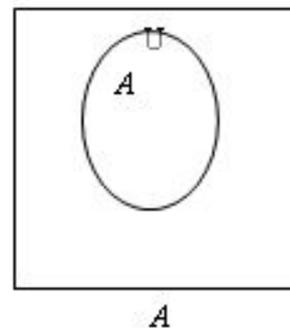
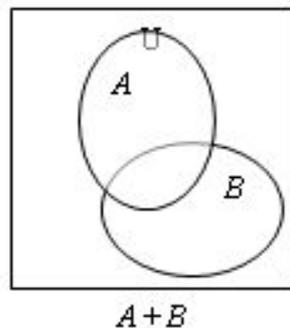
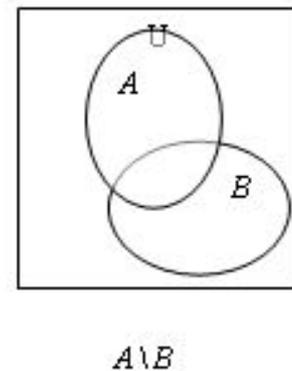
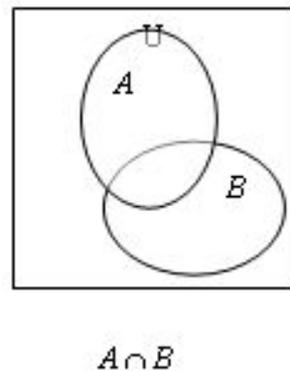
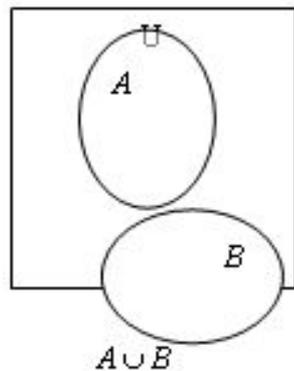
¬

На основе введенных операций строятся теоретико-множественные формулы.

*Определение.*

- а) Любой символ, обозначающий множество, есть формула;
- б) Если  $A$  и  $B$  - формулы, то  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $A + B$ ,  $A -$  также есть формулы.

Операции объединения, пересечения и дополнения называются **булевыми**. Бинарные операции объединения, пересечения, разности и унарная операция дополнения проиллюстрированы на диаграммах Венна.



$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \ x \in A_i \}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \ x \in A_i \}$$

# 1.3 Булева алгебра множеств

Абстрактная алгебраическая система, состоящая из множества подмножеств некоторого универсального множества с введенными выше операциями дополнения, пересечения и объединения, составляют **булеву алгебру множеств**. Основные законы этой алгебры, используя общепринятое правило, что если в формуле отсутствуют скобки, устанавливающие порядок выполнения операций, то сначала выполняется дополнение, потом пересечение и затем объединение. Для повышения наглядности формулы знак пересечения множеств, подобно знаку арифметического умножения, будем опускать.

*Коммутативность:*

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A B = B A.$$

*Ассоциативность:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A (B A) = (A B) C.$$

*Дистрибутивность:*

$$A (B \cup C) = A B \cup A C;$$

$$A \cup B C = (A \cup B) (A \cup C).$$

*Идемпотентность:*

$$A \cup A = A;$$

$$A A = A.$$

*Законы де Моргана:*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B};$$

$$\overline{A B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

*Законы операций с константами (пустым и универсальным множествами):*

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A U = A;$$

$$A \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup U = U;$$

$$A \cup \bar{A} = U;$$

$$A \bar{A} = \emptyset.$$

*Закон двойного дополнения:*

$$\overline{\bar{A}} = A.$$

Для каждой пары формул, представляющих тот или иной закон, справедливо следующее: одна из формул получается из другой взаимной заменой всех операций пересечения на операции объединения и всех символов  $\emptyset$  на символы  $U$ . Этот факт известен под названием ***принципа двойственности***.

Для операции пересечения пустое множество имеет свойство нуля, универсальное множество – свойство единицы. Для операции объединения универсальное множество имеет свойство нуля, а пустое множество – свойство единицы.

Формула, в которой присутствуют символы операций над множествами, есть способ задания множества. Две формулы **равносильны**, если они представляют одно и то же множество. Любую формулу булевой алгебры множеств можно вывести путем равносильных преобразований, используя формулы из приведенного списка. Данный список является достаточным, но для вывода любой формулы данной алгебры можно воспользоваться меньшим списком, т. е. некоторые формулы этого списка можно вывести из других.

Например, формулу

$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (дистрибутивность  
объединения относительно пересечения)  
можно получить следующим образом.

Ее правую часть, используя дистрибутивность  
пересечения, представим как

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap A \cup (A \cup B) \cap C.$$

Раскрыв скобки (по закону ассоциативности),  
получим  $(A \cup B) \cap A \cup (A \cup B) \cap C =$

$$= A \cap A \cup B \cap A \cup A \cap C \cup B \cap C.$$

Применим закон идемпотентности и введем константу  $\Omega$  ( $A A = A = A \Omega$ ), в результате чего после применения закона коммутативности пересечения правая часть примет вид

$A \Omega \cup A B \cup A C \cup B C$ . После вынесения за скобки  $A$  получим  $A (\Omega \cup B \cup C) \cup B C$ , что равно левой части исходного выражения согласно свойству константы  $\Omega$ .

Подобным образом выведем закон поглощения  $A \cup A B = A$ , которого нет в приведенном списке:

$$A \cup A B = A$$

$$\Omega \cup A B = A (\Omega \cup B) = A.$$

Используя принцип двойственности, получим:  $A (A \cup B) = A$ .

Формулу  $A \vee B \cup \square A \vee C = A \vee B \cup \square A \vee C \cup B \vee C$   
 выведем следующим образом:

$$A \vee B \cup \square A \vee C \cup B \vee C = A \vee B \cup \square A \vee C \cup B \vee C$$

$$(A \cup \square A) \vee B \vee C = A \vee B \vee (\square A \cup C) \cup B \vee C$$

$$(\square A \cup B) \vee C = A \vee B \cup \square A \vee C.$$

Используя только что выведенную формулу  
 и закон поглощения, докажем

$$A \cup \square A \vee B = A \cup B:$$

$$A \cup \square A \vee B = A$$

$$\square A \cup \square A \vee B = A \vee \square A \vee B \cup B =$$

$$= A \cup \square A \vee B \cup B = A \cup B.$$

## 1.4 Разбиения и покрытия

Рассмотрим такие понятия теории множеств как разбиение и покрытие.

Пусть  $\mathcal{E} = \{E_i \mid i \in I\}$  – некоторое подмножество множества  $M$ ,  $E_i \in M$ . Семейство называется покрытием множества  $M$ , если каждый элемент  $M$  принадлежит хотя бы одному из  $E_i$ :

$$M \subset \bigcup_{i \in I} E_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M \quad \exists i \in I \quad x \in E_i.$$

Семейство называется **дизъюнктивным**, если элементы этого семейства попарно не пересекаются, т.е. каждый элемент множества  $M$  принадлежит не более чем одному из множеств  $E_i$  :

$$\forall i, j \in I \quad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset.$$

Дизъюнктивное покрытие называется **разбиением множества**.

# Пример.

Пусть  $M = \{1, 2, 3\}$ .

Тогда  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$  является покрытием, но не разбиением;  
 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  является разбиением и покрытием, а семейство  $\{\{1\}, \{2\}\}$  является дизъюнктивным, но не является ни покрытием, ни разбиением...