Курс Основы информационных технологий

Раздел

Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики

Профессор Синицын Анатолий Константинович

Кафедра ВМиП (а. 412 – 5к)

Цель курса: Освоение методологии вычислительного эксперимента на базе моделей сплошной среды, используемых для поддержки принятия решений при проектировании технических систем

Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М: Наука, 1978.
2. Болсун А.И., Гронский В.К., Бейда А.А. Методы математической физики. – Мн.: Выш. Шк., 1988.
3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: - Наука, 1980.
6. Синицын А.К. Современные информационные технологии. Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики. Конспект лекций для аспирантов и магистрантов Мн.: БГУИР, 2004.
7. Синицын А.К. ,Навроцкий А.А. Алгоритмы вычислительной математики. Учебно-методическое пособие. Мн.: БГУИР, 2007

Введение: система – средство достижения цели человеком

В качестве средства достижения цели человек создает (или приспосабливает имеющуюся) некую

системy – т.е. набор связанных элементов, образующих целостный объект.

Например, машина, телевизор, система производства, система нагрева, экономическая, общественная, мировоззренческая,…

Первые системы – рука-палка, колесо-телега, катапульта,..

Чтобы создать нужную систему он должен:

- Предугадывать результаты действий системы.
- Придумывать, как она должна быть устроена.

Введение: Задачи анализа и синтеза

Для достижения своих целей, в частности при создании полезных систем, человеку приходится постоянно решать две задачи –

Экспертную и конструктивную.

Э.З. ставится следующим образом - «Что будет, если…». Как ведет себя система(объект) в тех или иных условиях?

Это задача анализа.

К.З. ставится следующим образом – «Как сделать, чтобы…». Как сконструировать систему (объект) с заданными свойствами?

Это задача синтеза.

Примеры технических систем

- Движение планет и космических объектов
- Динамика атмосферы и океана
- Техника генерации, усиления, передачи и приема электромагнитных волн
- Элементы компьютерной техники- элементы памяти, записи, преобразования сигналов
- Технологические установки выращивания кристаллов с заданными свойствами
- Установки сушки, термообработки и охлаждения материалов
- Устройства автоматического управления

- Все эти и многие другие системы объединяет то, что они описываются дифференциальными уравнениями.
- Поэтому, чтобы их спроектировать, необходимо решить ДУ и найти оптимальные условия работы.
- Большая доля современных пакетов программ и систем программирования для этого предназначена.

Тема 1 Математические модели и численные методы

- *Как исследуются физические явления и решаются задачи*
- *Как оценивается погрешность вычислений?*
- *Откуда возникают погрешности расчетов?*
- *Итерационные методы решения задач*

Как исследуются физические явления и решаются задачи

Имеется два способа решения инженерных и физических задач:

экспериментальный и теоретический.

- ***Экспериментальный метод,*** как правило, связан с большими материальными затратами, а иногда в принципе невозможен.
- ***Теоретический метод,*** или математическое моделирование, опирается на знание фундаментальных законов природы, используя которые строят математическую модель исследуемой системы.

Математическая модель - это описание исследуемого объекта (системы) с помощью математических символов и операций над ними

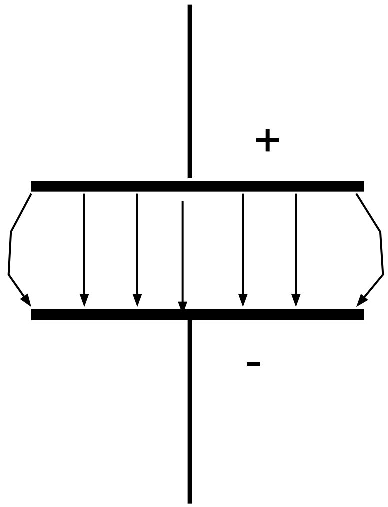
Требования к модели:

- Адекватность. - В модели реализуется отображение существенных свойств объекта при его изучении.
- Экономичность. Бритва Оккама- отбрасываются незначительные факторы.
- Принцип дополнительности. Использовать несколько моделей по возможности.

Математическая постановка задачи - предполагает описание математической модели и указание цели ее исследования.

- найти *max f(x)*;
- найти *x*, при котором *f(x)=0*, и др.

Пример: Модель конденсатора



Простейшая модель
Не учитывает
краевых эффектов

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Более сложная модель
С учетом краевых
искажений поля

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} + \Delta_1(\varepsilon, d, S)$$

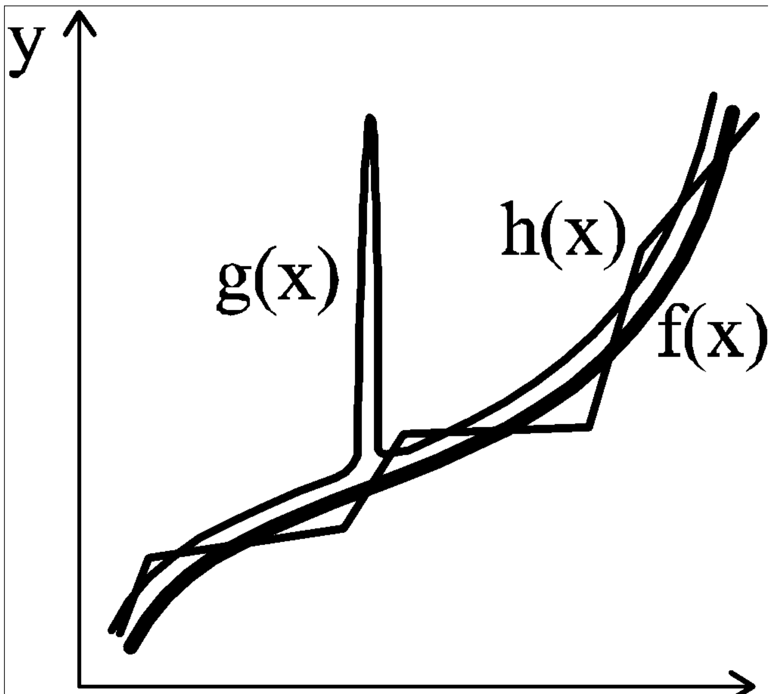
Методы (алгоритмы) решения математических задач

- ***Решить задачу*** - это значит указать алгоритм (т.е. строгую последовательность действий) для получения требуемого результата из исходных данных
- ***К точным методам*** относятся алгоритмы, позволяющие за конечное число действий получить в принципе (если нет ошибок округления) точное решение. Обычно оно получается в виде формулы или конечного вычислительного алгоритма.
- ***Приближенные*** - это методы, позволяющие за счет некоторых допущений свести решение исходной задачи к задаче, имеющей точное решение.
- ***Численные методы*** предполагают разработку ***вычислительного алгоритма***, т.е. конечной, строгой последовательности арифметических и логических действий, обеспечивающих получение решения с заданной контролируемой погрешностью.

Как оценивается погрешность вычислений?

- ***Погрешность*** обычно оценивают одним числом ε, характеризующим близость между точным и приближенным значениями некоторой величины. Близость мы привыкли оценивать расстоянием между объектами.

$$\varepsilon = |a - \tilde{a}|$$



А как оценить близость между двумя функциями *f(x)* и *g(x)* (векторами , матрицами A, B)?

Нормированное пространство

- Множество элементов в котором каждому элементу поставлено в соответствие число $\|X\|$ (норма X), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|X\| \geq 0$ - норма (положительное число).
2. $\|X\| = 0$ только при $X = \varnothing$ ($\varnothing$- нулевой элемент).
3. $\|\alpha X\| = |\alpha| * \|X\|$, α - число
4. $\|X_1 \pm X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\|$ - неравенство треугольника.

- В качестве элементов рассматриваются функции, векторы или матрицы.
- Введены обычные операции + - и умножение * на число α

- ***Расстояние между элементами***

$$\rho(X_1,\ X_2) = \|X_1 - X_2\|$$

Пространство непрерывных функций C[ab]

- Множество непрерывных функций {*f(x), g(x), h(x), …*}, определенных на интервале [*a, b*].
- Норма и расстояние в *C*[*a, b*] определяются по формулам:

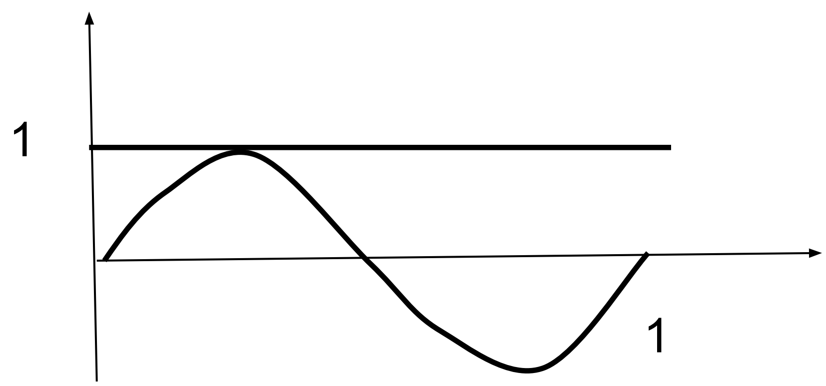
$$\|f\|_c = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|; \;\; \rho_C(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Например

$$[0,1]$$

$$f(x) = 1 \qquad \|f\|_C = 1$$

$$g(x) = \sin 2\pi x \qquad \|g\|_C = 1$$



Пространство Лебега $L_2[a, b]$ интегрируемых с квадратом функций

- Множество функций, для которых $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$
-
- В $L_2[a, b]$ имеются и разрывные функции, т.е. $C[a, b] \subseteq L_2[a, b]$.
- Норма и расстояние:

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \; ; \; \rho_{L_2}(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx} \, .$$

Например

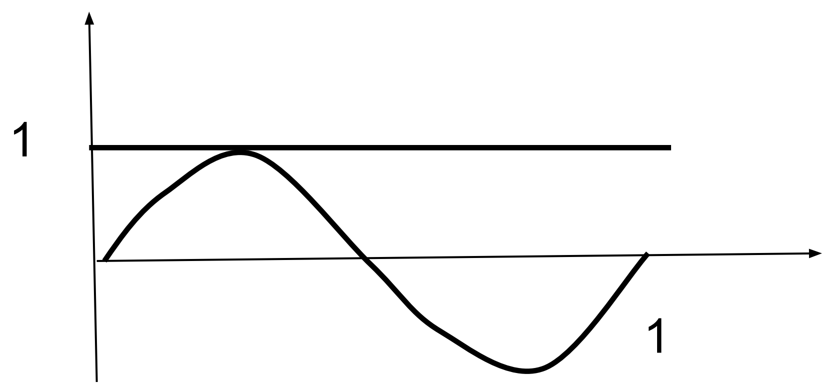
$$[0,1]$$

$$f(x) = 1$$

$$g(x) = \sin(2\pi x)$$

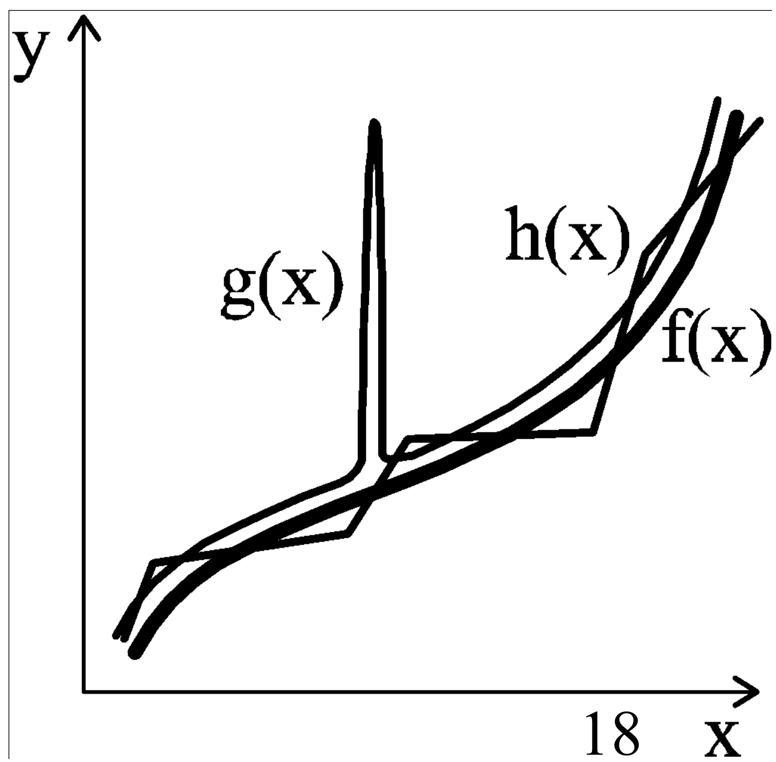
$$\|f\|_{L_2} = 1$$

$$\|g\|_{L_2} = \sqrt{0.5}$$



Заметим, что функции *f* и *g* на рис. будут "близкими" в пространстве *L2* и "далекими" в пространстве *C*, т.е. норма С более «сильная»:

$$\|f\|_{L_2} < \|f\|_C$$



Скалярное произведение в $L_2[a,b]$

$$(f,\ q) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx, \qquad (f, f) = \|f\|_{L_2}^2$$

- ***Ортогональными*** называются две функции из L_2, если *(f, g)=0*.

Например

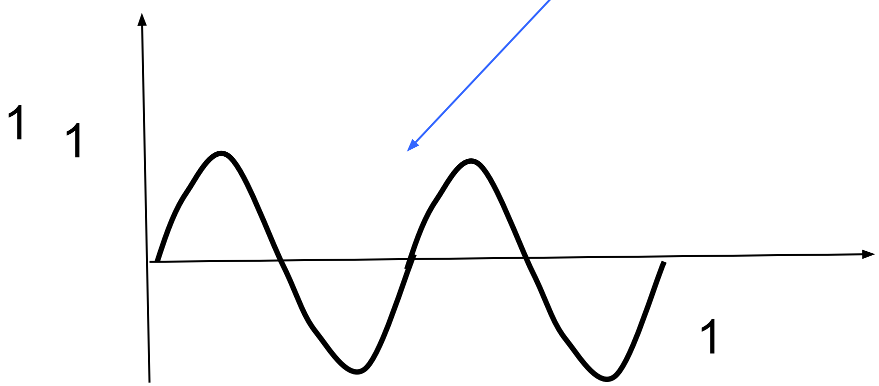
$$[0,1]$$

$$f(x) = \cos(2\pi x)$$

$$g(x) = \sin(2\pi x)$$

$$(f \cdot g) = \int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(2\pi x)dx =$$

$$= 0.5\int_0^1 \sin(4\pi x)dx = 0$$



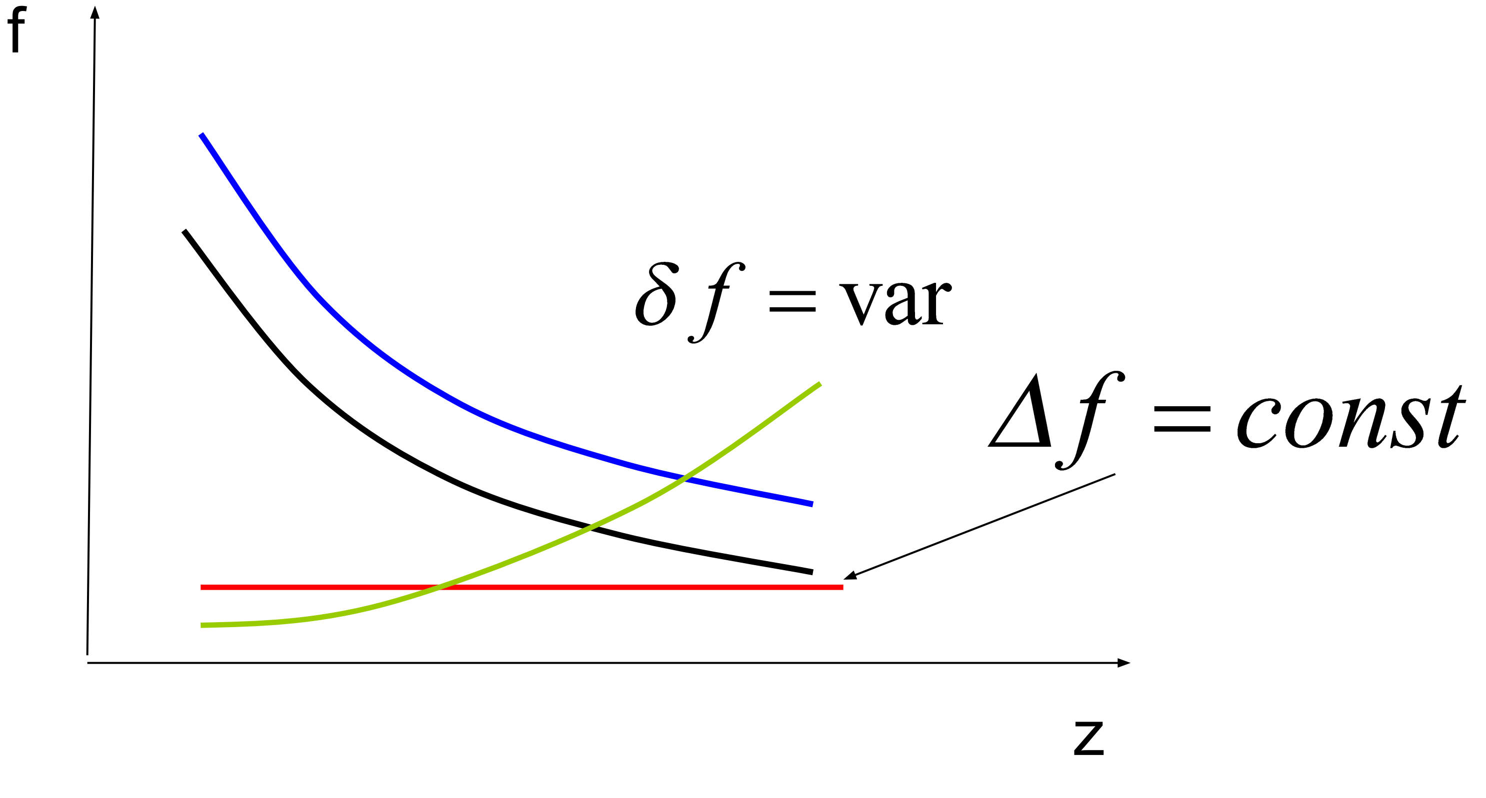
Пространство Соболева $W_2^s[a,b]$

- Множество функций, имеющих интегрируемые с квадратом производные до s порядка.
- Норма определяется как
$$\|f\|^2_{W_2^S} = \sum_{m=0}^{s} \int_a^b \left(\frac{d^m f}{dx^m} \right)^2 dx$$
- Расстояние
$$\rho^2_{W_2^S} = \sum_{m=0}^{s} \int_a^b \left(\frac{d^m (f-g)}{dx^m} \right)^2 dx$$
- В этом пространстве близость между функциями характеризует также близость их производных.
- Функции *f* и *h* на рис. 1.1 будут «близкими» по норме $\| \quad \|_{W_2^0}$ и «далекими» по норме $\| \quad \|_{W_2^1}$, причем $\| \quad \|_{W_2^0} = \| \quad \|_{L_2}$

Виды погрешностей

- ***Абсолютная погрешность*** ΔX между точным X и приближенным $\tilde{X}$ значениями некоторого элемента определяется через норму разности $\Delta X = \left\| X - \tilde{X} \right\|$
- ***Относительная погрешность*** δX определяется как отношение абсолютной погрешности к норме элемента $\delta X = \Delta X / \left\| \tilde{X} \right\|$

Пример



Откуда возникают погрешности расчетов?

- ***Есть четыре источника погрешности результата, о которых следует помнить при выполнении расчетов***

- ***1. Неточность математической модели***
- ***2. Погрешность исходных данных***
- ***3. Погрешность метода***
- ***4. Ошибки округлений***

Неточность математической модели

- Любая модель является определенной идеализацией рассматриваемого физического явления и описывает лишь основные факторы, существенные при решении конкретной технической задачи.
- Уточнение модели за счет введения описания дополнительных факторов обычно приводит к ее усложнению и, как следствие, к трудности использования, поэтому необходим определенный компромисс (Бритва Оккама).
- Выбор удачного компромисса - это творческий процесс, требующий большого опыта и инженерной интуиции.

Погрешность исходных данных

- Исходные данные обычно получаются из измерений либо - наоборот, по этим данным затем делается устройство. В каждом случае имеется так называемая неустранимая погрешность между исходными данными, участвующими в расчетах, и теми, которые реализуются. В результате этого получаемое решение также будет отличаться от реализуемого в устройстве.
- В зависимости от того, как ошибки исходных данных отражаются на результате, задачи разделяют на два класса: ***корректные*** и ***некорректные***.
- Задача называется ***корректной***, если малые ошибки исходных данных приводят к пропорционально малым ошибкам решения.
- Задача называется ***некорректной***, если малые ошибки исходных данных приводят к большим ошибкам в результатах,.
- Для решения некорректных, но правильных с физической точки зрения задач разрабатываются специальные методы

Погрешность метода

- При построении вычислительного алгоритма обычно точное решение представляется в виде бесконечного предела последовательности арифметических и логических действий.
- При ограничении лишь конечным числом вычислений вносится погрешность, контролируемая некоторыми параметрами метода.
- Получение зависимости погрешности решения от параметров вычислительного метода является одной из основных задач вычислительной математики
- Обычно при уменьшении некоторого параметра *h* метода погрешность решения ε_h стремится к нулю, т.е. $\varepsilon_h \to 0$ при . $h \to 0$ В этом случае, если выполняется оценка $\varepsilon_h < Ch^p$, где *C* - const и не зависит от *h*, считается, что ***порядок погрешности*** равен *p* и обозначается коротко $\varepsilon_h \approx o(h^p)$

Например, метод вычисления $y=e^{-x}$ при $x>0$

- Метод – несколько первых членов ряда

$$e^{-x} \cong M(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \ldots(-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

- Погрешность:

$$\varepsilon_n = \left\| M(x) - e^{-x} \right\|_c < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$при \quad h = \frac{1}{n} \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Ошибки округлений

- Все расчеты на ЭВМ производятся с конечным числом значащих цифр, определяемым объемом ячеек памяти. Поэтому при вычислении, например, 1/3 = 0,3333...3..., и если округление производится на седьмом знаке, то вносится ошибка $\varepsilon \approx 10\text{-}8$.
- Когда вычислений много, то такие ошибки могут накапливаться и, наоборот, компенсироваться (положительные и отрицательные).
- В зависимости от реакции на погрешность округлений вычислительные методы разделяются на ***устойчивые*** и ***неустойчивые***.
- Метод ***устойчив***, если в процессе вычислений ошибки округлений не накапливаются, в противном случае метод ***неустойчив***.
- При увеличении количества вычислений по неустойчивому методу ошибки быстро нарастают, что приводит к переполнению ЭВМ.
- Одной из задач вычислительной математики является установление условий устойчивости и разработка рекомендаций по созданию устойчивых методов.

Итерационные методы решения задач

- Задача: $A(x) = b$

- ***Итерационные методы*** основаны на построении сходящейся к точному решению *x** бесконечной рекуррентной последовательности $x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^k \underset{k\to\infty}{\to} x^*$ элементов той же природы, что и *x*.*
- Последовательность называется ***рекуррентной*** порядка m, если каждый следующий ее член выражается через m предыдущих по некоторому правилу $x^k = \varphi(x^{k-1},\ x^{k-2},\ \ldots\ x^{k-m})$
- Для реализации ***m-шагового метода*** требуется задать m первых членов, называемых ***начальным приближением***

$$\left\{x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^{m-1}\right\}$$

Процесс вычислений

- Задают начальное приближение и по формуле $x^m=\phi(x^{m-1})$ последовательно находят $x^m,\ x^{m+1},\dots\ x^k,\ \dots$
- Процесс получения следующего k-го члена через предыдущие называется k-й ***итерацией***.
- Итерации выполняются до тех пор, пока очередной член x^k не будет удовлетворять заданной точности, т.е. $\left\|x^k - x^*\right\| < \delta.$
- Ввиду того, что точное решение x^* заранее неизвестно, обычно сходимость метода определяют по близости двух последних членов, т.е. расчеты производят до тех пор, пока не выполнится условие $\left\|x^k - x^{k-1}\right\| < \varepsilon,$ или более точно $\left\|\dfrac{(x^k - x^{k-1})^2}{2x^{k-1} - x^k - x^{k-2}}\right\| < \varepsilon$
- Получаем $x^* \cong x^k$

Пример простого итерационного метода

- Приводим уравнение к виду

$$x = \varphi(x)$$

- Можно так

$$x = \omega_r[A(x) - b] + x = \varphi(x)$$

- Рекуррентная последовательность

$$x^k = \varphi(x^{k-1})$$

- Задаем начальное условие x^0 и находим $x^1, x^2, \dots x^k$
- Условие сходимости

$$\|d\varphi / dx\| = \|G\| < 1$$

Конец темы 1

Задавайте Ваши вопросы