Тема 2.
Уравнения математической физики

- *Поля физических величин*
- *Математическая модель поля*
- *Прямая полевая задача*
- *Обратная полевая задача*

Поля физических величин

- Любое физическое явление или процесс представляет собой распределение и изменение каких-либо физических величин (скалярных, векторных, тензорных) в некоторой области пространства и во времени.
- Распределение некоторой величины в пространстве и во времени получило название поле.
- Такие поля окружают нас -температурное поле, электромагнитное поле, поле скоростей, поле вероятности.
- Основной задачей теоретической физики, а так же многих технических приложений является исследование полей физических величин, (полевые задачи).
- Для их исследования разработано огромное программное обеспечение.

Математическая модель поля

- Математической моделью поля является функция нескольких переменных, обычно $F(x,y,z,t)$

$$T(x,y,z),\ \vec{E}(x,y,z,t),\ \vec{H}(x,y,z,t),\ \vec{V}(x,y,z,t),\ \Psi(x,y,z,t),\ \left\|\varepsilon_{ij}(x,y,z)\right\|$$

- Поля бывают
- скалярные
- векторные
- Тензорные (т.е.описывается несколькими векторами).
- стационарные
- Нестационарные

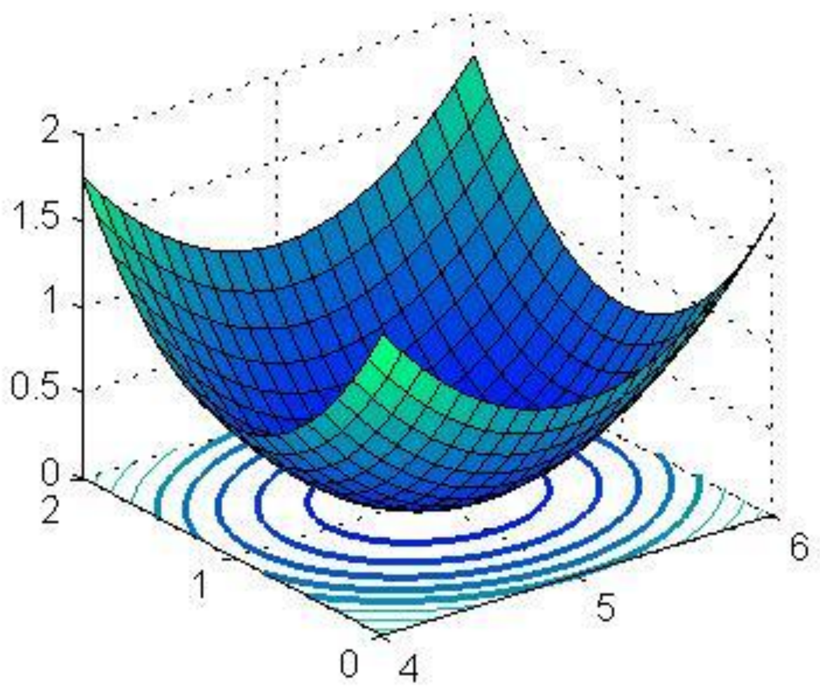
При исследовании полей выделяют две задачи – прямую и обратную

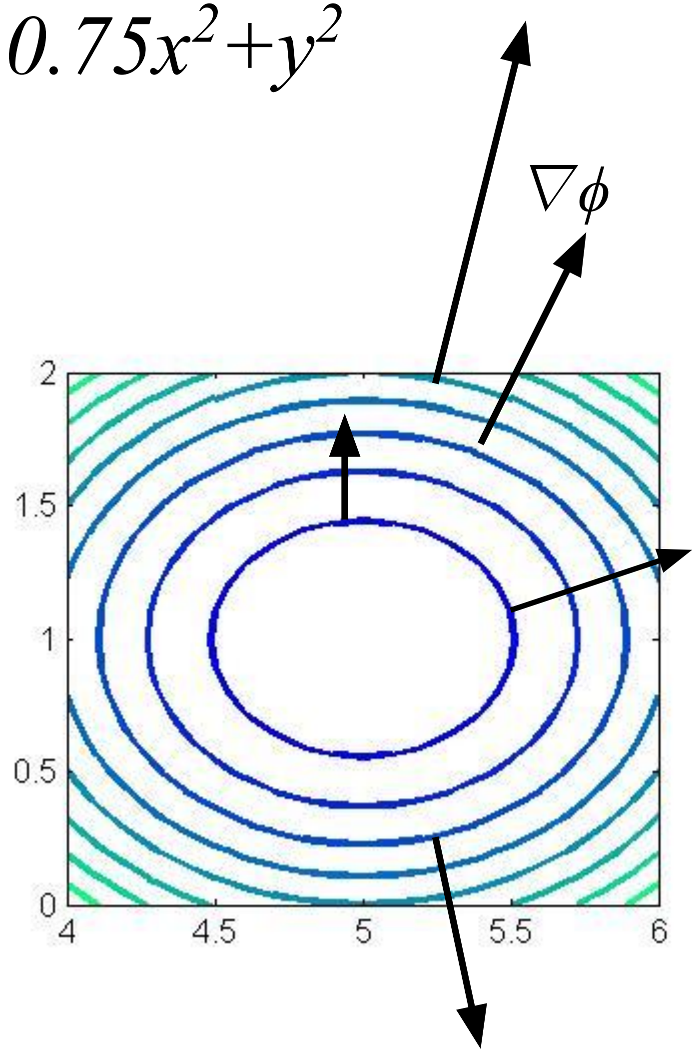
Прямая полевая задача

- Задано поле $F(x, y, z, t)$; требуется установить характер этого поля, например быстроту его изменения от точки к точке.
- ***Математическая теория поля*** занимается изучением дифференциальных и интегральных свойств различных полей.
- Здесь для векторной $\vec{u} = u_x \vec{x}_0 + u_y \vec{y}_0 + u_z \vec{z}_0$
- и скалярной $\varphi(x, y, z)$
- функций введены операторы дифференцирования:

$$\psi = div\vec{u}, \quad \vec{v} = rot\vec{u}, \quad \vec{v} = \nabla\varphi, \quad \psi = \nabla^2\varphi$$

Линии уровня и градиент скалярной функции $\phi(x,y)=0.75x^2+y^2$



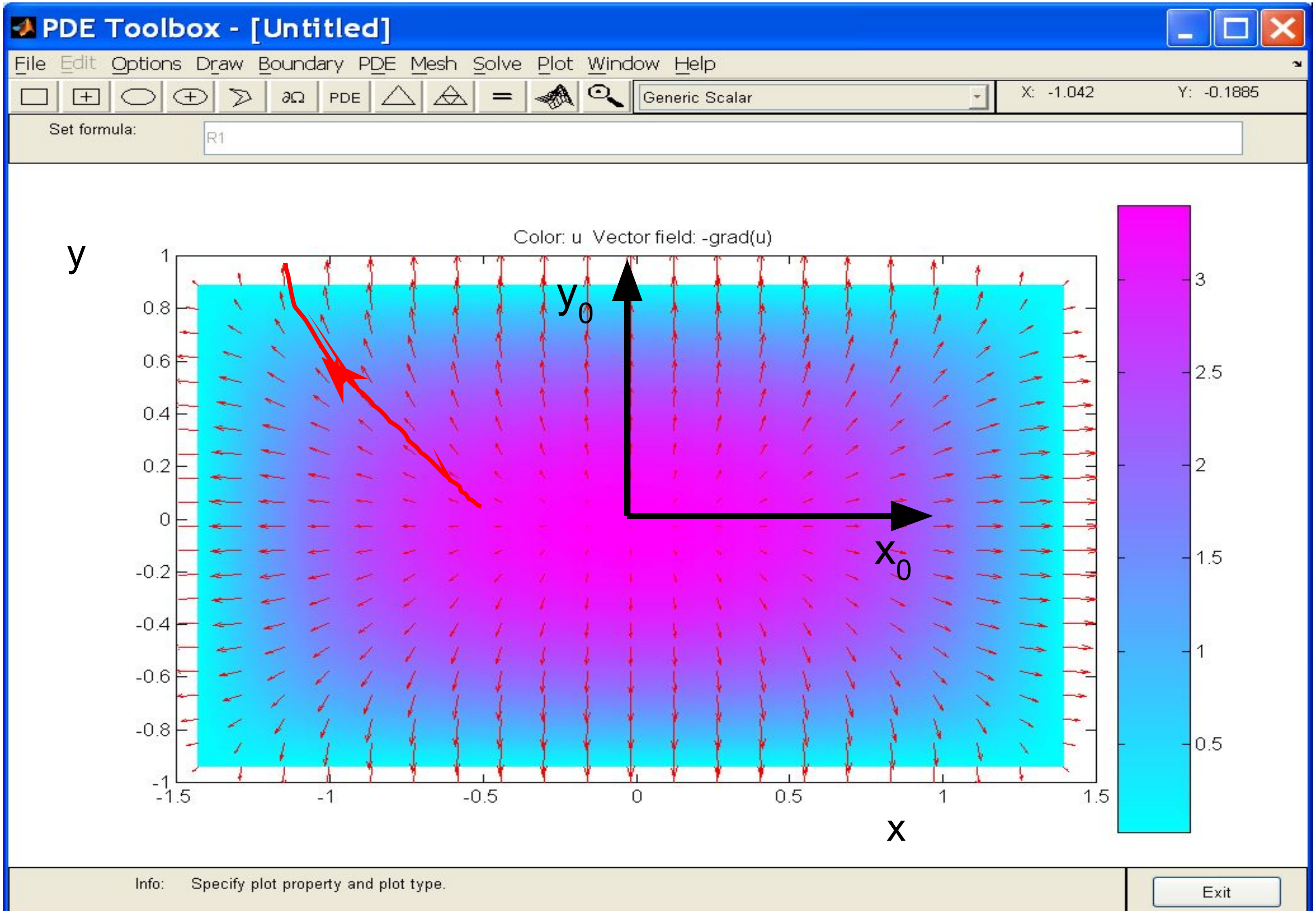


Градиент скалярной функции

$$\nabla\varphi = grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0$$

- Характеризует направление наибольшего возрастания функции в каждой точке поля.

Векторное поле $\vec{u} = u_x(x, y)\vec{x}_0 + u_y(x, y)\vec{y}_0$



Дивергенция векторного поля

$$div\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- Характеризует распределение в пространстве источников векторного поля
- Например, источниками электрического поля $\vec{E}(x, y)$ являются заряды, положительные или отрицательные.
- В этом случае $div\vec{E} = \rho(x, y)$ дает распределение зарядов.

Ротор векторного поля

$$rot\,\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{z}_0$$

- Характеризует завихрения векторного поля.
- Например известно, что при течении тока вокруг него образуется вихревое магнитное поле. Так вот, если мы знаем распределение магнитного поля $\vec{B}(x, y)$
- тогда ротор от него $rot\vec{B} = \vec{\sigma}(x, y)$ дает распределение токов.

Лапласиан от скалярного поля

$$\nabla^2\varphi = div(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

- Характеризует распределение источников скалярного поля
- Например имеется распределение температуры вдоль плоской пластины $T(x,y)$.
- Градиент температуры указывает направление максимального распространения тепла в данной точке $\vec{q} = \lambda \cdot \nabla T(x, y)$
- Тогда $div(\lambda\nabla T) = \lambda\nabla^2 T = q_v(x, y)$
- дает распределение мощности источников тепла $q_v(x, y)$
- Зная распределение источников можно получить распределение температуры из уравнения:

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = q_v(x, y)$$

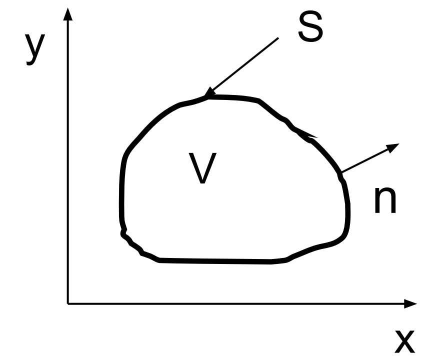
Классификация полей

- ***Соленоидальные*** (или вихревые) $div\vec{u} = 0$
- (все силовые линии замкнуты)
- такое поле может быть представлено в виде $\vec{u} = rot\vec{v},$
- здесь $\vec{v}$ – векторный потенциал.
- ***Потенциальные*** (или безвихревые) $rot\vec{u} = 0,$
- такое поле может быть представлено в виде $\vec{u} = \nabla\varphi,$
- здесь φ – скалярный потенциал.

Интегральные теоремы

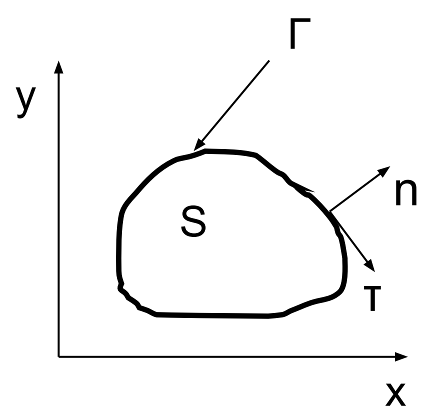
- ***Теорема***
- ***Остроградского – Гаусса*:**

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{u}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V div\,\vec{u}\,dV$$



- ***Теорема Стокса*:**

$$\oint_\Gamma \vec{u}\,\vec{\tau}\,d\tau = \iint_S rot\,\vec{u}\,\vec{n}\,dS$$



Интегральные теоремы

Теорема Грина:

$$\iiint_V \left(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right)dV = \oiint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\partial S$$

Формула интегрирования по частям

$$\int_\Omega \varphi\nabla\psi\, d\Omega = -\int_\Omega \psi\nabla\varphi\, d\Omega + \int_\Gamma \varphi\psi\vec{n}\, d\Gamma$$

Если Ω=V то Г =S;   если Ω=S то Г=линия

Обратная полевая задача

- Известны условия, в которых находится физический объект требуется найти распределение в пространстве некоторой физической величины, т.е. конкретного вида математического поля.
- Чаще всего задача нахождения поля, удовлетворяющего требуемым условиям, приводит к решению краевой задачи для дифференциального (или интегрального) уравнения.

уравнения математической физики

- Методы составления и, главное, решения уравнений такого рода изучаются в разделе математической физики – **теория дифференциальных уравнений в частных производных и теория интегральных уравнений**. Эти уравнения исторически получили название «уравнения математической физики».
- Совокупность теории поля и теории дифференциальных уравнений в частных производных образует так называемую ***классическую математическую физику***.
- Основной метод решения - проекционно-сеточный метод, который получил название **метод конечных элементов**

Краевые задачи

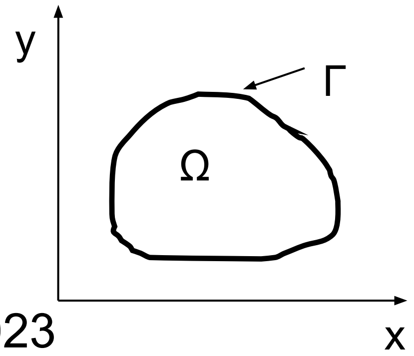
- Задано дифференциальное уравнение

$$\Phi\left[x,y,z,t,u(x,y,z,t),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=f(x,y,z,t)$$

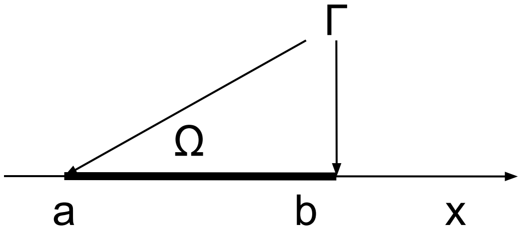
- Найти неизвестную ф-ю $u(x,y,z,t)$

$(x,y,z) \in \Omega \;; \qquad u|_{\Gamma}=\phi$

Двумерная задача



Одномерная задача



Конец темы