Тема 3. Постановка задач для дифференциальных уравнений

- *Определение дифференциальных уравнений*
- *Постановка задач для обыкновенных ДУ*
- *Постановка задач для ДУ в частных производных (ДУЧП)*
- *Как получают дифференциальные уравнения*
- *Подобие физических явлений, безразмерные переменные*

Определение дифференциальных уравнений

$$\Phi\left[x,y,z,t,u(x,y,z,t),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=f(x,y,z,t)$$

- Порядок ДУ =максимальный порядок входящих в это уравнение производных
- Порядок системы ДУ = сумме порядков входящих ДУ
- Эквивалентность системы и одного ДУ
- Два класса: обыкновенные ДУ (ОДУ), которые описывают процессы, зависящие от одной независимой переменной , и ДУ в частных производных (ДУЧП)

Обыкновенные ДУ

- Система ОДУ первого порядка
- $$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du_m}{dx} = f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m). \end{cases}$$

или коротко

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}).$$

- Система ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + p_1 u_1 = f(x, u_2, \dots, u_m, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g_m \dfrac{\partial u_m}{\partial x}\right) + q_m \dfrac{\partial u_m}{\partial x} + p_m u_m = f(x, u_1, \dots, u_{m-1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x}). \end{cases}$$

$$\vec{u} = \{u_1(x), \dots, u_m(x)\} \qquad a \le x \le b$$

Постановка задач для обыкновенных ДУ

- Известно, что система ОДУ имеет бесконечное семейство решений $\vec{u} = \vec{u}(x, \vec{C})$
- $\vec{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ набор произвольных параметров
- их количество равно порядку системы m.
- Это семейство решений описывает многообразие реализаций физического процесса, математической моделью которого являются системы ОДУ.
- Для выделения одной искомой реализации среди этого многообразия необходимо наложить дополнительные условия конкретизирующие искомое решение
- Количество этих условий равно порядку m системы ОДУ.
- В зависимости от способа постановки дополнительных условий можно выделить два основных типа задач для ОДУ

Задача Коши и **Краевая задача**

Задача Коши

- Все условия заданы в начале отрезка интегрирования [*a*,*b*] (при *x*=*a*).
- Эта задача чаще всего ставится для системы
- $$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{u}).$$
- в виде

$$u_1(a) = u_1^0; \;\; \dots \;\; u_m(a) = u_m^0$$

- Или коротко $\vec{u}(a) = \vec{u}^0$

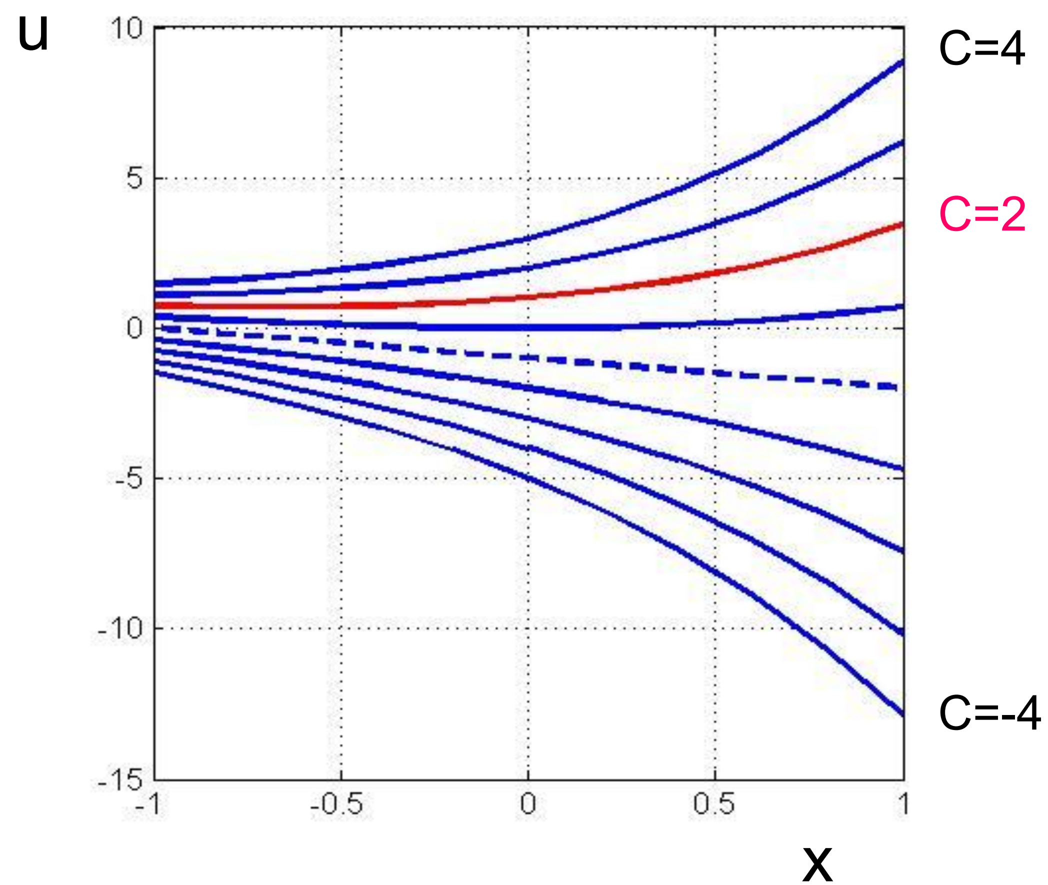
Пример точного решения

$$\frac{du}{dx} = u + x$$

$$u(0) = 1$$

$$u = Ce^{x} - x - 1$$

$$C = 2$$



Краевая задача

- Условия заданы на обоих концах отрезка [a,b].
- Эта задача обычно ставится для ДУ второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q\frac{\partial u}{\partial x} + pu = f(x,u)$$

- В общем случае

$$\alpha^a \frac{du(a)}{dx} + \beta^a u(a) = \gamma^a, \quad x = a$$

$$\alpha^b \frac{du(b)}{dx} + \beta^b u(b) = \gamma^b, \quad x = b$$

Пример точного решения ДУ

- Рассмотрим ДУ вида $$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x);\qquad 0\le x\le 1.$$
- Граничные условия $$q^0\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^0 u\Big|_{x=0}=\beta^0;\;\; q^1\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^1 u\Big|_{x=1}=\beta^1$$
- Проинтегрируем $$\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=\int_0^x f(x)dx$$
- Левая часть $$\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=g\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^x=g(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}-g(0)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0$$
- Обозначим $$\int_0^x f(x)dx=p(x)$$

Пример точного решения ДУ (продолжение1)

- Обозначим $$c_1 = g(0)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0$$
- Получаем уже диф.ур. первого порядка
- $$g(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x} = p(x) + c_1$$ или $$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{p(x) + c_1}{g(x)}$$
- Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{\partial u(x)}{\partial x}dx = u(x) - u(0) = \int_0^x \frac{p(x) + c_1}{g(x)}dx = \int_0^x \frac{p(x)}{g(x)}dx + c_1\int_0^x \frac{1}{g(x)}dx$$

- Обозначим $c_2 = u(0)$
- Получаем решение ДУ $$u(x) = c_2 + \int_0^x \frac{p(x)}{g(x)}dx + c_1\int_0^x \frac{1}{g(x)}dx$$

Пример точного решения ДУ (продолжение2)
Нахождение констант с1,с2, из граничных условий

- Из $q^0 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^0 u \Big|_{x=0} = \beta^0;$ используя $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0 = \frac{c_1}{g(0)}$

- Получим $q^0 (c_1 \frac{1}{g(0)}) + \alpha^0 c_2 = \beta^0;$

- Из $q^1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^1 u \Big|_{x=1} = \beta^1;$ используя $\frac{\partial u(1)}{\partial x} = \frac{p(1)+c_1}{g(1)}$

- Получим $q^1 (\frac{p(1)}{g(1)} + c_1 \frac{1}{g(1)}) + \alpha^1 (c_2 + \int_0^1 \frac{p(x)}{g(x)} dx + c_1 \int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx) = \beta^1;$

- Имеем систему двух ур-й относительно c_1 и c_2

Пример точного решения ДУ (продолжение3)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 1; \quad u\big|_{x=1} = 0; \quad g(x) = 1; \quad f(x) = 1. \qquad \alpha^0 = 0;\ q^0 = 1;\ \alpha^1 = 1;\ q^1 = 0$$

- Имеем сразу $\displaystyle c_1 = g(0)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 = 1;\qquad p(x) = \int_0^x f(x)dx = x$
- Из $$q^1\left(\frac{p(1)}{g(1)} + c_1\frac{1}{g(1)}\right) + \alpha^1\left(c_2 + \int_0^1 \frac{p(x)}{g(x)}dx + c_1\int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx\right) = \beta^1;$$
- Получаем $$0\left(\frac{1}{1} + 1\frac{1}{1}\right) + 1\left(c_2 + \int_0^1 \frac{x}{1}dx + 1\int_0^1 \frac{1}{1}dx\right) = 0; \to c_2 = -1.5$$
- Окончательно $$u(x) = c_2 + \int_0^x \frac{p(x)}{g(x)}dx + c_1\int_0^x \frac{1}{g(x)}dx = -1.5 + \frac{x^2}{2} + x$$

Постановка задач для ДУ в частных производных (ДУЧП)

- Большинство окружающих нас физических полей описывается ДУЧП второго порядка, или системами таких ДУЧП.
- Если процессы не слишком интенсивны, то можно ограничиться линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = t.$$

- Свойства решений существенно зависят от коэффициентов, стоящих при старших производных. С помощью соответствующей замены независимых переменных уравнение может быть приведено к одному из трех типов

Параболические

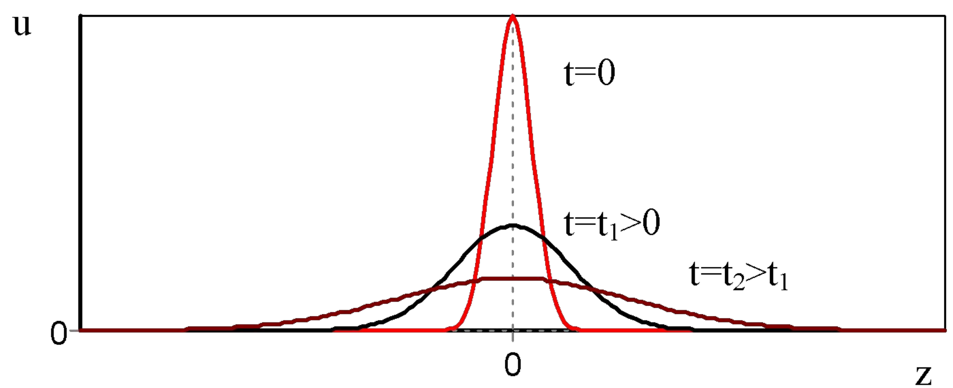
Гиперболические

Эллиптические

Параболические

- Канонический вид $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f$$
- Уравнение
- теплопроводности $$a\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f$$
- распространение возмущения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Гиперболические

- Канонический вид

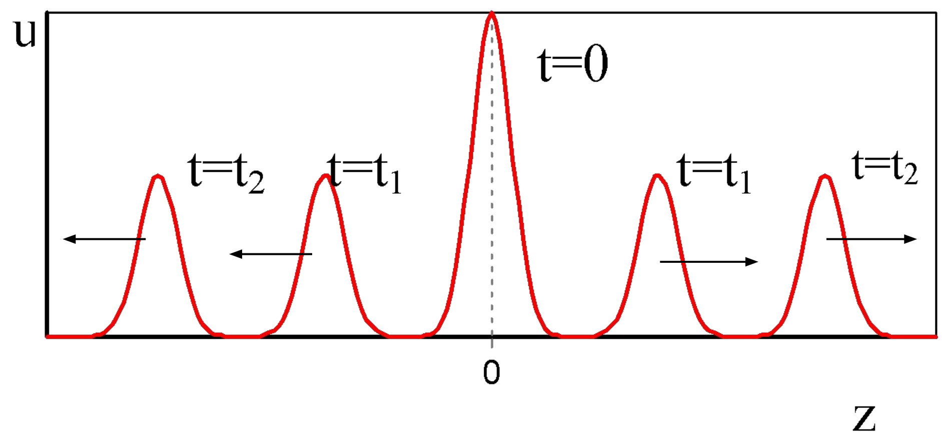
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f$$

- Волновое
- уравнение
- **Д'Аламбера**

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f$$

- Распространение одномерного возмущения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



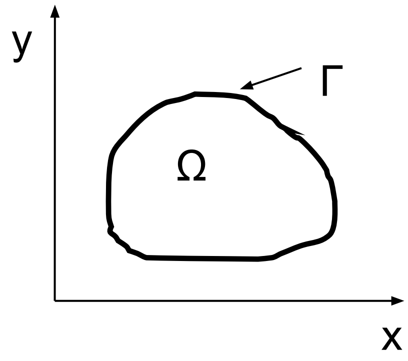
Точное решение $u = f(t \pm x)$

Эллиптические (стационарные процессы)

- Канонический вид $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f$$
- Уравнение
- Пуассона
- (Лапласса)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f$$

- При постановке задач для ДУ в частных производных обычно требуется найти распределение , удовлетворяющее ДУ в некоторой области пространства Ω с границей *Г*.



Граничные условия

- Общее решение ДУЧП содержит произвольные дифференцируемые функции, например
- Решением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ является

$$u = f(t \pm z)$$

- Начальные условия

$$u\Big|_{t=0} = U^0(x, y, z) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = U^0_\partial(x, y, z)$$

- Граничные условия

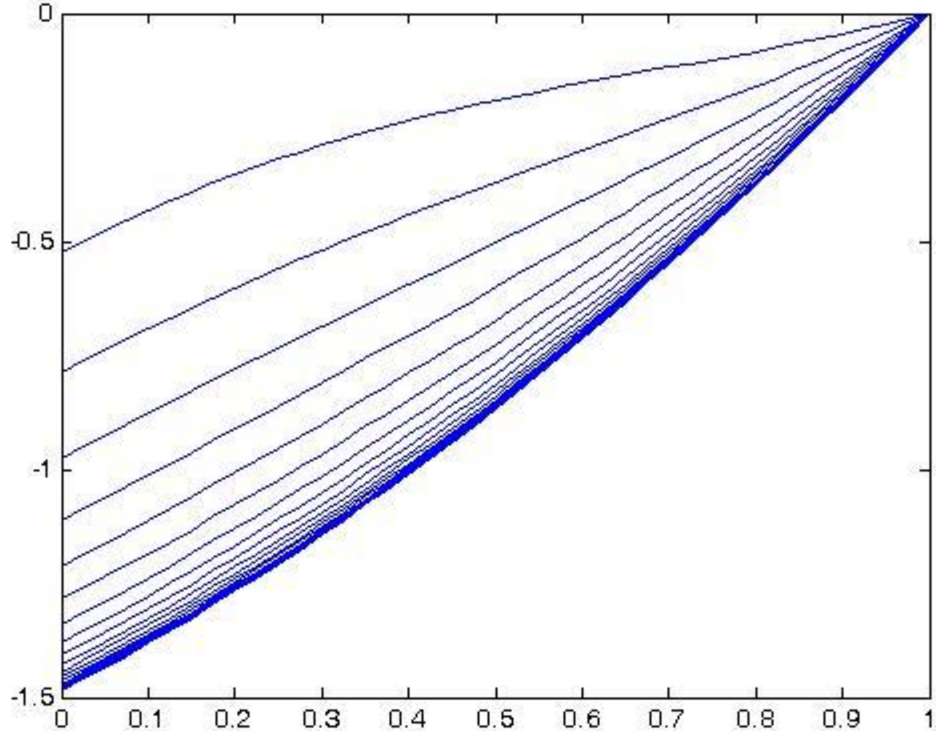
первого рода — Дирихле; второго рода — Неймана; третьего рода — Ньютона

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi(\quad) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(\Gamma) \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\right|_{\Gamma} = \gamma(\quad)$$

Пример решения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 1$$

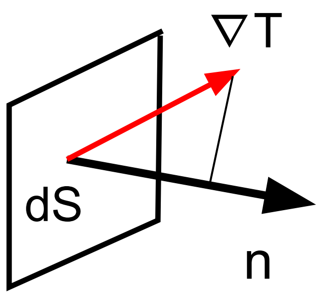
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 1; \quad u\big|_{x=1} = 0; \quad u\big|_{t=0} = 0$$



Как получают дифференциальные уравнения

- ДУ являются следствием фундаментальных законов природы и применения интегральных теорем
- Например, Французский математик и физик Жан Батист Жозеф Фурье в 1822 г. установил закон теплопроводности (закон Фурье): ***количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени, пропорционально проекции градиента температуры на нормаль к поверхности***. Математически этот закон выражается следующим соотношением

$$q = -\lambda \nabla T \vec{n}$$

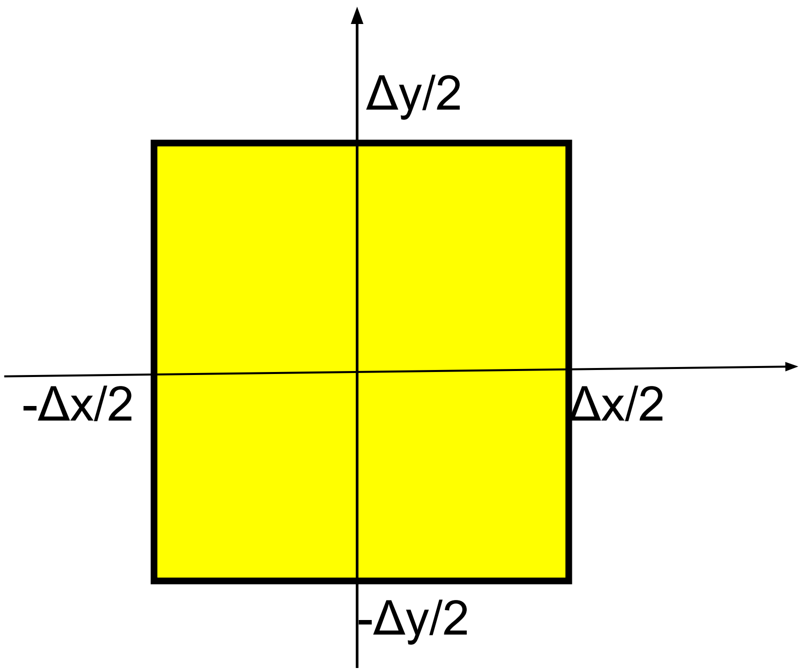


$q\left[{}^{Вт}/_{м^2}\right]$ $\lambda\left[{}^{Вт}/_{м \cdot град}\right]$ $T[град]$

Пример получения стационарного двумерного уравнения теплопроводности используя закон Фурье

Выберем элементарный объем $\Delta V = \Delta x\ \Delta y$

в центре которого находится точка x,y .



Допустим, что в таком кубике в единицу времени выделяется количество теплоты, равное

$$Q_V = q_V(x, y)\Delta x \Delta y$$

Составим уравнение баланса для элементарного объема

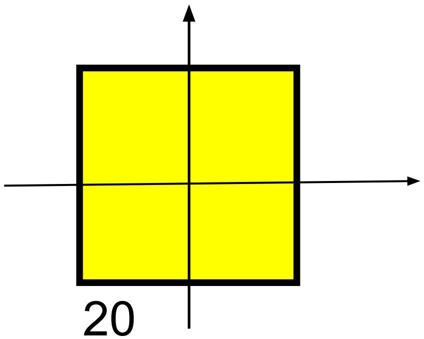
$$q_V \Delta x \Delta y = \left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right]\Delta y + \left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y-\frac{\Delta y}{2}}\right]\Delta x$$

Разделим на ΔxΔy:

$$q_V = \frac{\left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right]}{\Delta x} + \frac{\left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y-\frac{\Delta y}{2}}\right]}{\Delta y}$$

Перейдем к пределу Δ→0

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -q_V(x, y)$$



Можно получить тоже уравнение используя интегральные теоремы

Количество тепла проходящее в единицу времени через поверхность S охватывающую объем V

$$Q_S = \oint_S \left(-\lambda \nabla T\right) \vec{n} dS$$

Количество тепла, выделяемое в единицу времени в объеме V

$$Q_V = \iiint_V q_v(x, y, z) dV$$

Составляем баланс энергии и используем теорему Гаусса-Остроградского:

$$Q_S = \oint_S \left(-\lambda \nabla T\right) \vec{n} dS = \iiint_V div\left(-\lambda \nabla T\right) dV = \iiint_V q_v(x, y, z) dV = Q_V$$

Получаем общее уравнение теплопроводности

$$div\left(\lambda \nabla T\right) = -q_v(x, y, z)$$

Подобие физических явлений. Безразмерные переменные

- Теория Подобия возникла из потребностей моделирования
- Оказывается, одного геометрического подобия недостаточно.
- Важно знать, как результаты одного варианта расчета можно использовать для получения данных об исследуемой конструкции в широком диапазоне параметров и обратно, как выбрать модель для расчета, имеющую наименьшее, но достаточное количество параметров.
- *Подобными называются физические явления, протекающие в подобных системах, если у них во всех сходных точках в сходственные моменты времени отношения одноименных, т.е. имеющих одинаковый физический смысл величин, есть постоянные числа. Эти постоянные числа называются константами подобия*

Безразмерные переменные

Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)=-q'_v \qquad \Omega'=\{0\le x'<a',0\le y'\le b'\}$$

В подобной системе:
$$\frac{x'}{x}=c_x;\quad \frac{y'}{y}=c_y;\quad \frac{T'}{u}=c_T;\quad \frac{\lambda'}{g}=c_\lambda;\quad \frac{q'_v}{f}=c_q,$$

Подставляем:
$$\frac{c_\lambda c_T}{c_x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{c_\lambda c_T}{c_y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-c_q f$$

Выбираем коэффициенты подобия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{c_x^2}{c_y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{c_q c_x^2}{c_\lambda c_T}f \qquad c_x=c_y=a',\ \ b=b'/a' \qquad c_q=-\frac{c_\lambda c_T}{c_x^2}$$

Получаем
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f \qquad \Omega=\{0\le x\le 1,\quad 0\le y\le b\}$$

Конец