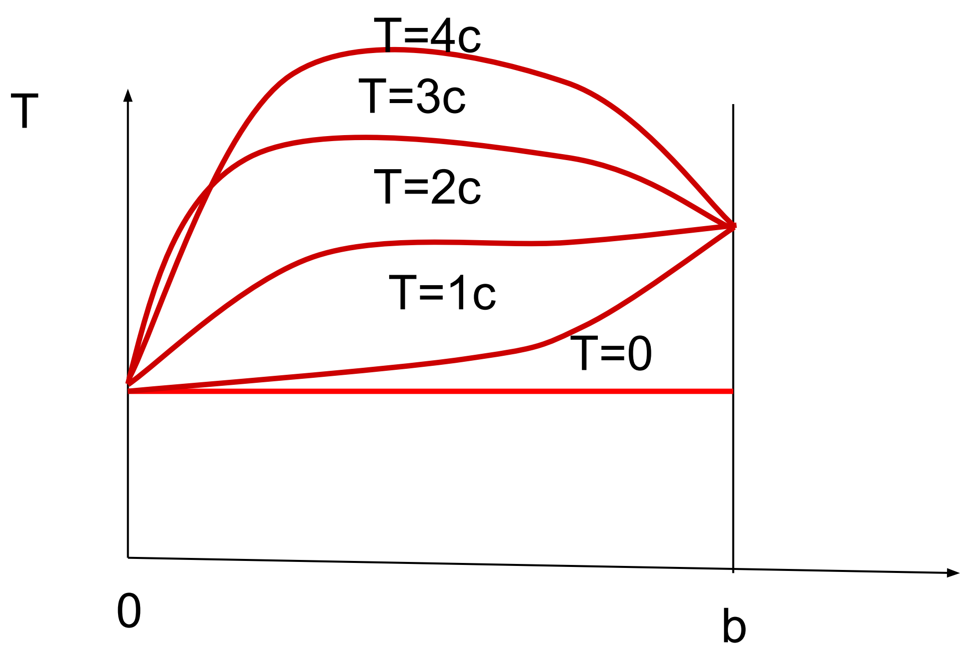
Тема 6. Метод сеток для решения ДУ в частных производных

- *Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности:*
  - ✔ *Явная и неявная схемы*
- *Задача Дирихле для двумерного уравнения Пуассона*
  - ✔ *Метод простой итерации с релаксацией*
  - ✔ *Метод Зейделя*
  - ✔ *Метод продольно-поперечной прогонки*

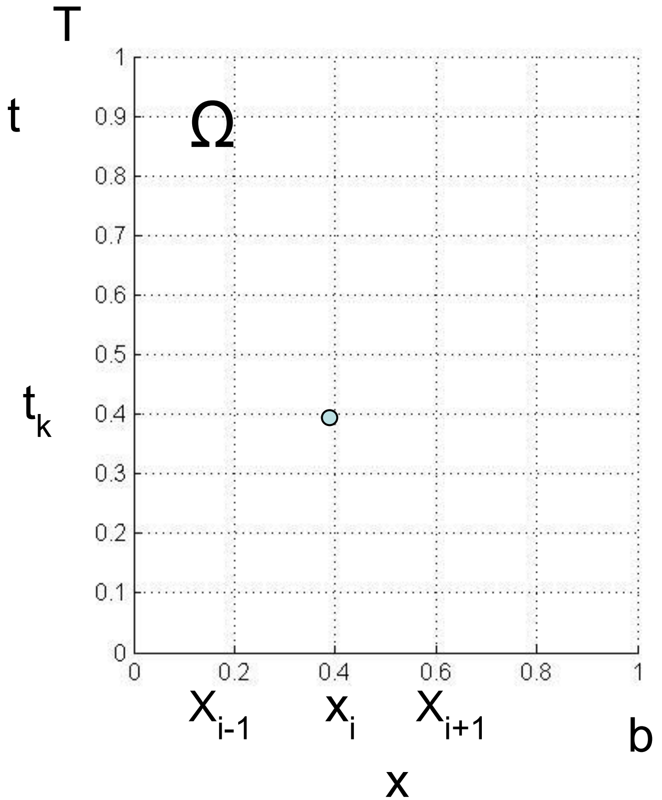
Задача о нагреве стержня, по которому пропускается ток



Как получить такое распределение не проводя эксперимент?

Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f; \qquad u(0,t) = \beta^0; \quad u(b,t) = \beta^1; \quad u(x,0) = u^0(x).$$



- Область интегрирования

$$\Omega = \{0 \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$$

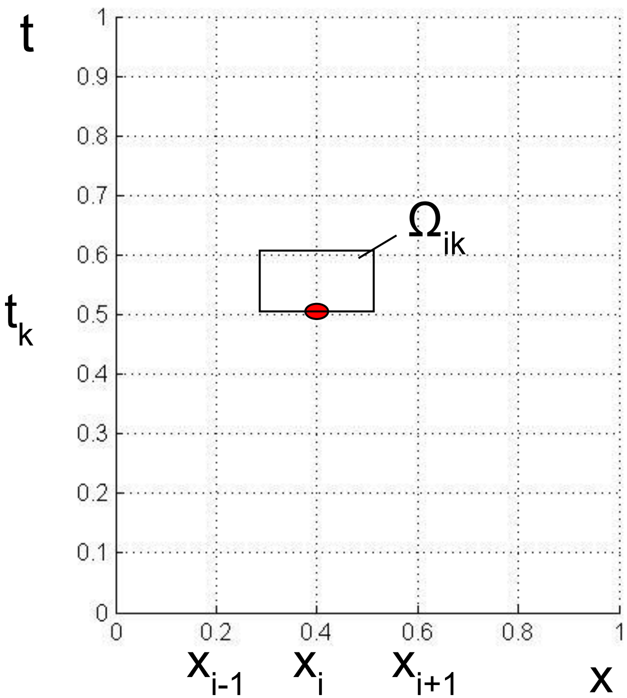
- Сетка

$$\omega_{h,\tau} = \{(i-1)h,\ k\tau,\ i = 1 \dots n1,\ k = 0 \dots K\}$$

- Таблица искомого решения

$$\overline{u}_h = \{\overline{u}_i^k \approx u(x_i t^k)\}$$

Получение конечноразностной схемы



$$\Omega_i^k = \left\{ x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2},\ k\tau \le t \le (k+1)\tau \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\overline{u}_i^{k+1} - \overline{u}_i^k}{\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k+1} - \left(g_{i-1/2} + g_{i+1/2} \right)\overline{u}_i^{k+1} + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k+1}}{h^2}$$

Явная схема

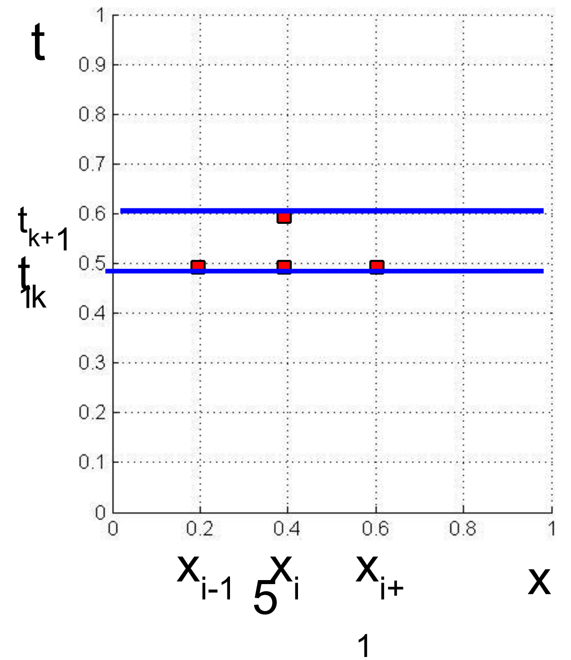
$$\frac{\overline{u}_i^{k+1}-\overline{u}_i^{k}}{\tau}=\frac{g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k}-\left(g_{i-1/2}+g_{i+1/2}\right)\overline{u}_i^{k}+g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k}}{h^2}+f_i$$

$$\overline{u}_i^{k+1}=\overline{u}_i^{k}+\tau\frac{g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k}-\left(g_{i-1/2}+g_{i+1/2}\right)\overline{u}_i^{k}+g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k}}{h^2}+\tau f_i$$

Погрешность и Условие устойчивости:

$$\psi_{\tau h}=o(\tau+h^2)$$

$$h=\frac{1}{N}\qquad \tau<\frac{h^2}{2}$$



Реализация явной схемы

- **u(i)=u0; x(i)=(i-1)*h; gi(i)=G(x(i)+h/2);   1≤i≤N+1**
- **th2= tau/h^2;**
- **t=0;**
- **Plot(x,u);**
- **for k=1:K**
- **for i=2:N**
- **u1(i)=u(i)+th2*(gi(i-1)*u(i-1)-(gi(i-1)+gi(i))*u(i)+**
- **gi(i)*u(i))+tau*f(i);**
- **end**
- **u1(1)=be0;**
- **u1(N1)=be1;**
- **Plot(x,u1);**
- **u=u1;**
- **t=t+tau;**
- **end;**
- …

Неявная схема

$$\frac{\overline{u}_i^{k+1} - \overline{u}_i^k}{\tau} = \frac{g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k+1} - (g_{i-1/2} + g_{i+1/2})\overline{u}_i^{k+1} + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i$$

$$g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k+1} - \left(g_{i-1/2} + g_{i+1/2} + \frac{h^2}{\tau}\right)\overline{u}_i^{k+1} + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k+1} = -\frac{h^2}{\tau}\overline{u}_i^k - h^2 f_i$$

$$a_i\overline{u}_{i-1} + b_i\overline{u}_i + c_i\overline{u}_{i+1} = d_i, \quad i = 2\ldots n.$$

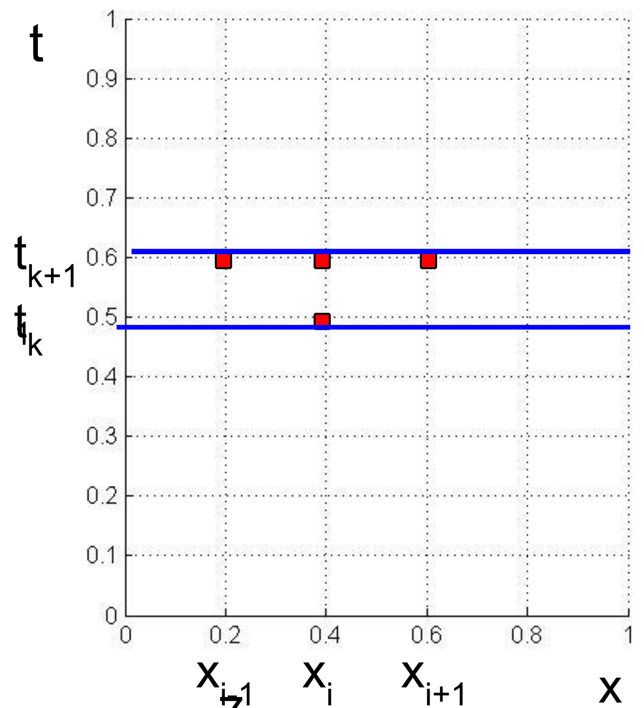
$$a_i = g_{i-1/2}; \qquad c_i = g_{i+1/2};$$

$$b_i = -a_i - c_i - h^2/\tau \quad .$$

$$d_i = -h^2/\tau u_i^k - h^2 f_i; \quad i = 2\ldots n.$$

$$\psi_{\tau h} = o(\tau + h^2)$$

абсолютно устойчива



Метод прогонки

Прямой ход:

$$\xi_1 = -c_1 / b_1; \quad \eta_1 = d_1 / b_1; \quad \langle b_1 = 1;\, c_1 = 0;\, d_1 = \beta^0 \rangle$$

$$for \;\; i = 2 \ldots n-1$$

$$\xi_i = -c_i / \left(b_i + a_i \xi_{i-1}\right); \quad \eta_i = \left(d_i - a_i \eta_{i-1}\right) / \left(b_i + a_i \eta_{i-1}\right);$$

Обратный ход:

$$\overline{u}_{n1} = \eta_{n1}; \quad \langle \eta_{n1} = \beta^1 \rangle$$

$$for \;\; i = n \ldots 1$$

$$\overline{u}_i = \xi_i \overline{u}_{i+1} + \eta_i .$$

Реализация метода прогонки

- u(i)=u0; x(i)=(i-1)*h; gi(i)=G(x(i)+h/2);   1≤i≤N+1
- for k=1:K
- c(1)=…; b(1)=…; d(1)-…;
- for i=2:N
- a(i)=
- b(i)=
- c(i)=
- d(i)= …
- end
- ks(1)=-c(1)/b(1); et(1)=d(1)/b(1);
- for i=2:N1
- z=b(i)+a(i)*ks(i-1);
- ks(i)=-c(i)/z; et(i)=(d(i)-a(i)*et(i-1))/z;
- end;
- u1(N1)=be1;
- For i=N:-1:1
- u1(i)=ks(i)*u1(i+1)+et(i);
- End;
- Plot(x,u1);
- u=u1;
- t=t+tau;
- end;

Неявная схема второго порядка Кранка-Николсона

$$\frac{\overline{u}_i^{k+1} - \overline{u}_i^k}{\tau} = 0.5 L_x \overline{u}_i^{k+1} + 0.5 L_x \overline{u}_i^k + \overline{f}_i =$$

$$= \frac{0.5}{h^2}\left[g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k+1} - \left(g_{i-1/2} + g_{i+1/2}\right)\overline{u}_i^{k+1} + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k+1} \right] +$$

$$+ \frac{0.5}{h^2}\left[g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^{k} - \left(g_{i-1/2} + g_{i+1/2}\right)\overline{u}_i^{k} + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^{k} \right] + \overline{f}_i$$

$\psi_{\tau h} = O(\tau^2 + h^2)$, *абсолютно устойчива*

Неявная схема второго порядка Кранка-Николсона

$$a_i\overline{u}_{i-1} + b_i\overline{u}_i + c_i\overline{u}_{i+1} = d_i, \quad i = 2\ldots n.$$

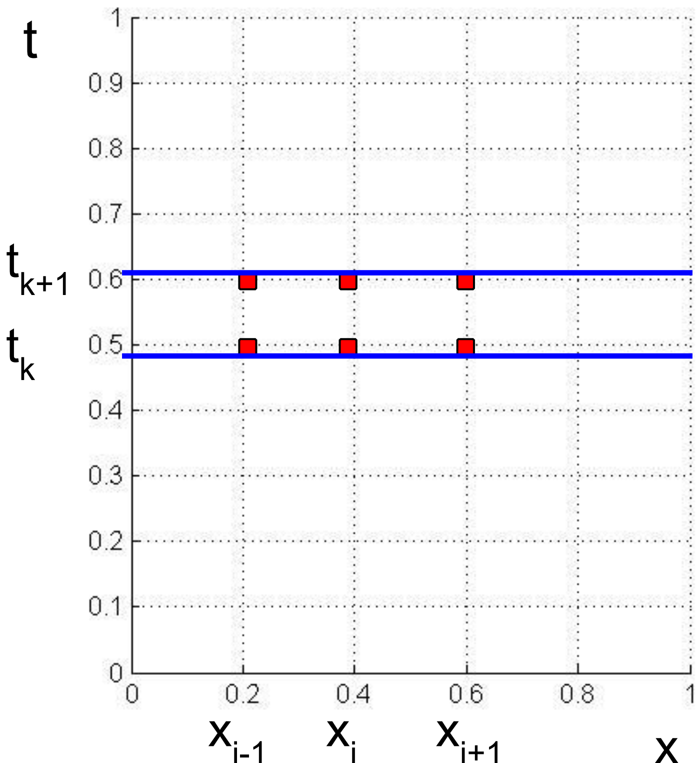
$$d_i = g_{i-1/2}\overline{u}_{i-1}^k - \left(g_{i-1/2} + g_{i+1/2}\right)\overline{u}_i^k + g_{i+1/2}\overline{u}_{i+1}^k$$

$$-2h^2/\tau u_i^k - 2h^2 f_i;$$

$$a_i = g_{i-1/2};$$

$$c_i = g_{i+1/2};$$

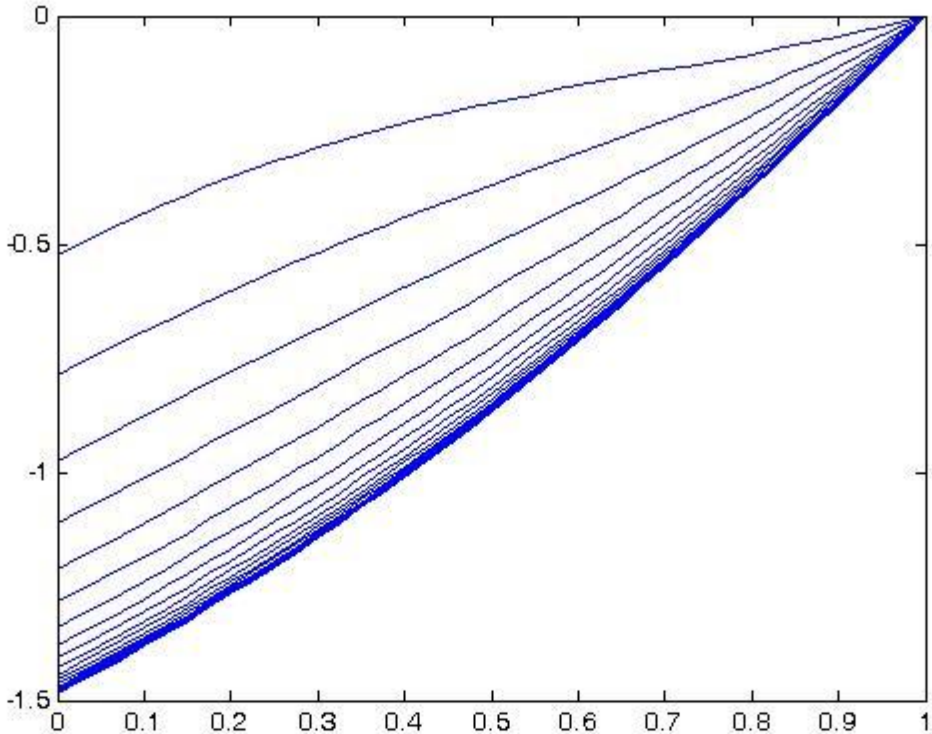
$$b_i = -a_i - c_i - 2h^2/\tau \quad .$$



Пример решения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 1; \quad u\big|_{x=1} = 0; \quad u\big|_{t=0} = 0$$



Задача Дирихле для двумерного уравнения Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x,y,u)$$

$$\Omega=\{0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$$

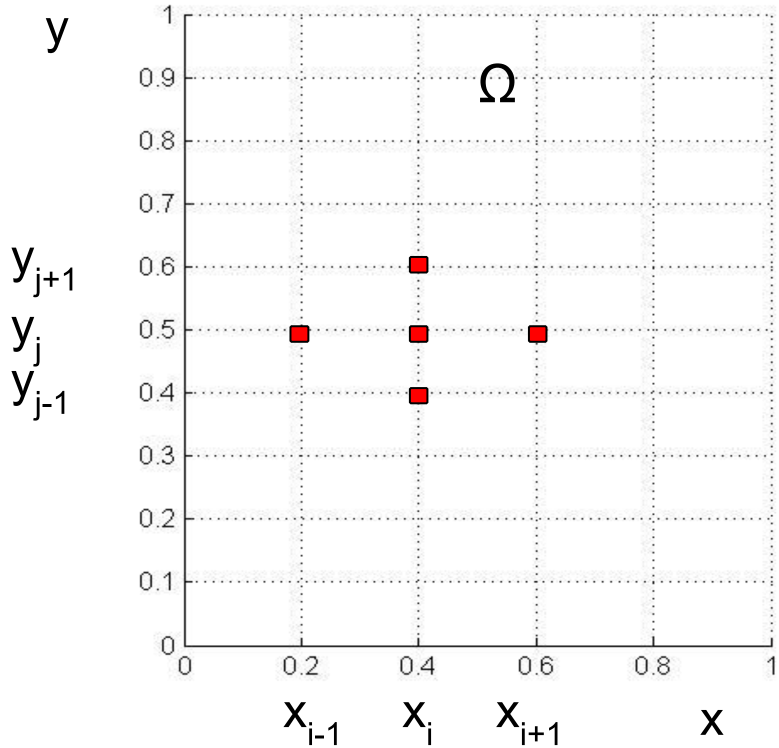
$$\Gamma:\quad u(0,y)=\alpha^0(y);\quad u(a,y)=\alpha^1(y);$$

$$u(x,0)=\beta^0(x);\quad u(x,b)=\beta^1(x).$$

Выбор сетки

$$\omega_{h_x h_y} = \left\{ (i-1)h_x,\ (j-1)h_y,\ i = 1 \ldots n1,\ j = 1 \ldots m1 \right\}$$

$$\overline{u}_h = \left\{ \overline{u}_{ij} \approx u(x_i,\ y_i) \right\}$$



Конечно-разностная схема

$$\frac{g_{i-1/2,j}\overline{u}_{i-1,j} - \left(g_{i-1/2,j} + g_{i+1/2,j}\right)\overline{u}_{i,j} + g_{i+1/2,j}\overline{u}_{i+1,j}}{h_x^2} +$$

$$+\frac{g_{i,j-1/2}\overline{u}_{i,j-1} - \left(g_{i,j-1/2} + g_{i,j+1/2}\right)\overline{u}_{i,j} + g_{i,j+1/2}\overline{u}_{i,j+1}}{h_y^2} =$$

$$= L_{hx}\overline{u}_{i,j} + L_{hy}\overline{u}_{i,j} = \overline{f}_{i,j}; \qquad i = 2\ldots\ n1,\ \ j = 2\ldots\ m1.$$

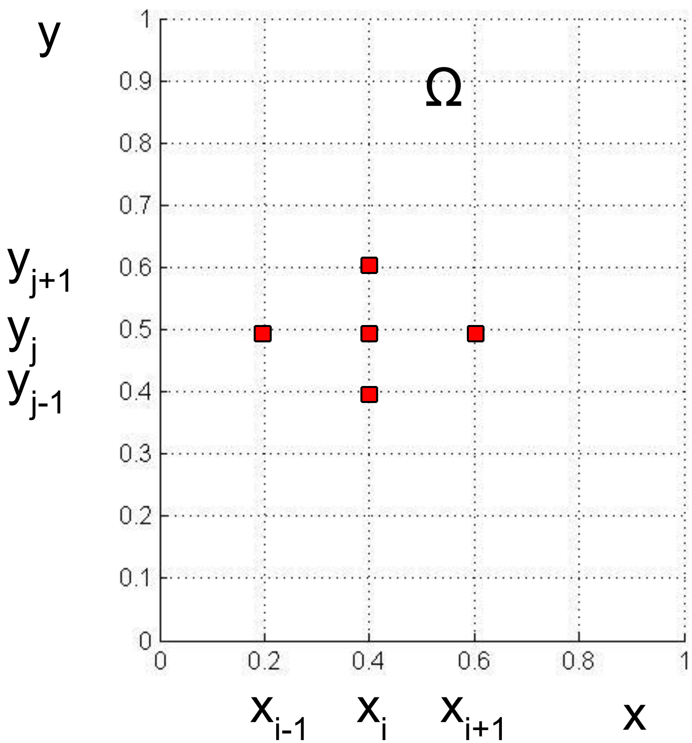
Граничные значения: $\overline{u}_{1,j} = \alpha_j^0;\ \ \overline{u}_{n1,j} = \alpha_j^1;\ \ j = 2\ldots\ m,$

$$\overline{u}_{i,1} = \beta_i^0;\quad \overline{u}_{i,m1} = \beta_i^1;\ \ i = 2..n$$

Метод простой итерации с релаксацией

$$\tilde{u}_{ij}^{k+1} = a_{ij}\bar{u}_{i-1,j}^{k} + b_{ij}\bar{u}_{i+1,j}^{k} + c_{ij}\bar{u}_{i,j-1}^{k} + d_{ij}\bar{u}_{i,j+1}^{k} + e_{ij},$$

$$\bar{u}_{ij}^{k+1} = \omega_r \tilde{u}_{ij}^{k+1} + (1-\omega_r)\bar{u}_{ij}^{k}.$$



$$i = 2..n-1$$

$$j = 2..m-1$$

Параметр релаксации

$$0 < \omega_r < 2$$

Реализация метода простой итерации с релаксацией

```
For k=1:Kit
for i=2:N
for j=2:M
a=…    b=…    c=…    d=…    e=…
up= a*u(i-1,j)+b*u(i+1,j)+c*u(i,j-1)+d*u(i,j+1)+e;
u1(i,j)=wr*up+(1-wr)*u(i.j);
end;end;    //ij
for i=2:N
u1(i,1)=be0; u1(i,M1)=be1;
for j=2:M
u1(1,j)=al0; u1(N1,j)=al1;
u=u1;
End;    //k

surf (x,y,u1);
```

Метод Зейделя

```
For k=1:Kit
d=0;
for i=2:N
for j=2:M
a=…   b=…   c=…   d=…   e=…
up= a*u(i-1,j)+b*u(i+1,j)+c*u(i,j-1)+d*u(i,j+1)+e;
If abs(u(i,j)-up)>d then d= abs(u(i,j)-up);
u(i,j)=wr*up+(1-wr)*u(i.j);
end;end;   //ij
for i=2:N
u(i,1)=be0; u(i,M1)=be1;
for j=2:M
u(1,j)=al0; u(N1,j)=al1;
If d<eps then continue;
End;   //k

surf (x,y,u);
```

Метод продольно-поперечной прогонки

$$L_{hx}\overline{u}_{ij}^{k+1/2} + L_{hy}\overline{u}_{ij}^{k} = \overline{f}_{ij} + \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1/2} - \overline{u}_{ij}^{k}}{\omega_r},$$

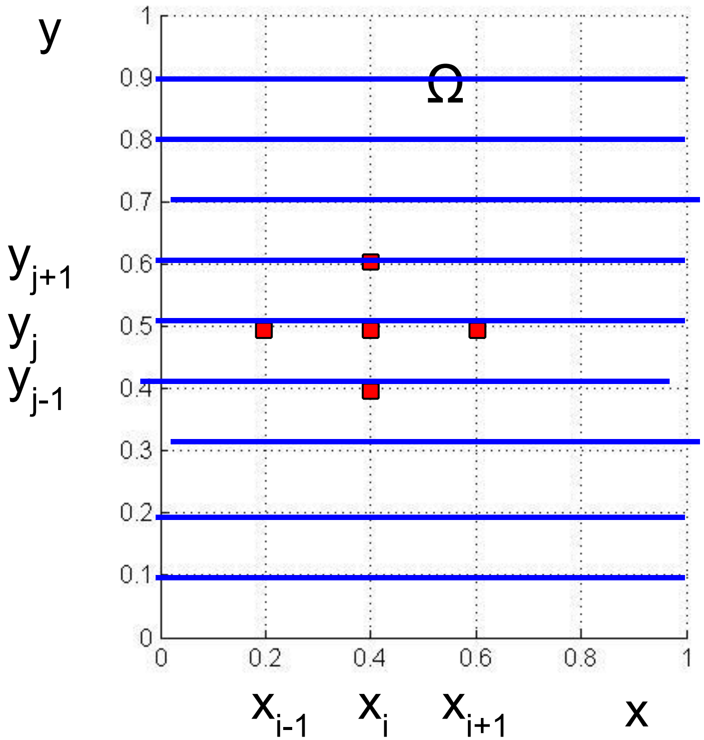
$$L_{hx}\overline{u}_{ij}^{k+1/2} + L_{hy}\overline{u}_{ij}^{k+1} = \overline{f}_{ij} + \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1} - \overline{u}_{ij}^{k+1/2}}{\omega_r},$$

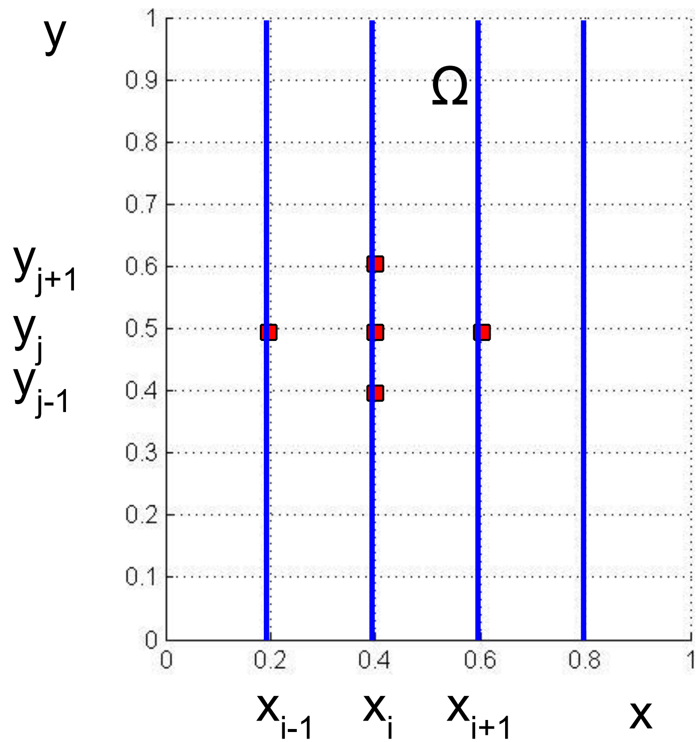
Преобразуем

$$L_{hx}\overline{u}_{ij}^{k+1/2} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1/2}}{\omega_r} = -L_{hy}\overline{u}_{ij}^{k} + \overline{f}_{ij} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k}}{\omega_r},$$

$$L_{hy}\overline{u}_{ij}^{k+1} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1}}{\omega_r} = -L_{hx}\overline{u}_{ij}^{k+1/2} + \overline{f}_{ij} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1/2}}{\omega_r},$$

Метод продольно-поперечной прогонки (продолжение)





Метод продольно-поперечной прогонки (продолжение)

Для $j = 2...m$ решаем систему

$$a_{ij}^{k}\overline{u}_{i-1,j}^{k+1/2} + b_{ij}^{k}\overline{u}_{i,j}^{k+1/2} + c_{ij}^{k}\overline{u}_{i+1,j}^{k+1/2} = d_{ij}^{k};$$

$$a_{ij}^{k} = g_{i-1/2,j};\;\; c_{ij}^{k} = g_{i+1/2,j};\;\; b_{ij}^{k} = -a_{ij}^{k} - c_{ij}^{k} - \frac{h^2}{\omega_r};\;\; d_{ij}^{k} = h^2\left(f_{ij} - L_{hy}u_{ij}^{k} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k}}{\omega_r}\right).$$

Для $i = 2...n$ решаем систему

$$a_{ij}^{k+1}\overline{u}_{i,j-1}^{k+1} + b_{ij}^{k+1}\overline{u}_{i,j}^{k+1} + c_{ij}^{k+1}\overline{u}_{i,j+1}^{k+1} = d_{ij}^{k+1},$$

$$a_{ij}^{k+1} = g_{i,j-1/2};\;\; c_{ij}^{k+1} = g_{i,j+1/2};\;\; b_{ij}^{k+1} = -a_{ij}^{k+1} - c_{ij}^{k+1} - \frac{h^2}{\omega_r};\;\; d_{ij}^{k+1} = h^2\left(f_{ij} - L_{hx}u_{ij}^{k+1/2} - \frac{\overline{u}_{ij}^{k+1/2}}{\omega_r}\right).$$

Программная реализация

```
for k=1:Kit
ks(1)=…;  et(1)=…;
for j=2:M1  for i=2:N1
a=…b=…c=…d=…;
z=b+a*ks(i-1);
ks(i)=-c/z; et(i)=(d-a*et(i-1))/z;
end;
u(N1,j)=et(N1);
For i=N:-1:1
u(i,j)=ks(i)*u1(i+1,j)+et(i);
End; end; end; (ij)
ks(1)=…;  et(1)=…;
for i=2:N1  for j=2:M1
a=…b=…c=…d=…;
z=b+a*ks(j-1);
ks(j)=-c/z; et(j)=(d-a*et(j-1))/z;
end;
u(I,M1)=et(M1);
For j=M:-1:1
u(i,j)=ks(j)*u1(i,j+1)+et(j+1);
End; end; end; (ij)
Plot(x,u1);
u=u1;
t=t+tau;
end;
```

Конец темы 6

- Ваши вопросы