Тема 7. Проекционные методы решения краевых задач

- *Теоретические основы проекционных методов*
- *Пример решения одномерной краевой задачи Дирихле*
- *Двумерная краевая задача Дирихле*
- *Метод Канторовича сведения задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ*

Теоретические основы проекционных методов

- Основная задача классического вариационного исчисления:
- Найти такую $u=u(x)$ $a \le x \le b$ $u(a)=u^0$ $u(b)=u^1$

На которой достигается минимум функционала $J[u]=\int_a^b \Phi(x,u,u')dx;$ $\left(u'=\dfrac{du}{dx}\right)$

- Центральная теорема: минимум доставляет решение дифференциального уравнения Эйлера

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right)=0$$

Например

- ***u(x)*** – путь пройденный автомобилем за время $0 \le x \le T$
- $u'(x)$ - скорость
- Затраты пропорциональны квадрату скорости $(u')^2$
- При каком законе движения обеспечивается минимум затрат на пути *0≤ u(x) ≤ s ?*

$$\min \int_0^T \left(u'(x)\right)^2 dx \qquad \Phi = \left(u'(x)\right)^2$$

- Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ u(0) = 0;\ u(T) = s$$

- Оптимальный закон (линейный!)

$$u(x) = s\frac{x}{T}$$

Сведение решения ДУ к минимизации функционала

- Таким образом задача нахождения минимума функционала сводится к решению ДУ.
- Справедливо и обратное – решение ДУ можно свести к нахождению минимума функционала.
- Запишем краевую задачу для ДУ в общем виде:

$$Lu = f; \quad u\big|_{\Gamma} = \alpha(\quad)$$

- Область определения функции *u*: *R*(*u*)=Ω; *Г* – граница Ω.

Функционал, минимум которого достигается на решении ДУ, имеет вид

$$J[u] = (Lu, u) - 2(f, u)$$

$$(Lu, u) = \int_{\Omega} Lu(x) \cdot u(x) dx \qquad (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида является ***метод Ритца*** (W. Ritz), впервые им предложенный в 1908 г.

Метод Ритца

- Выбираем базис $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$

- Свойства линейной независимости и полноты

$$\varphi_m(x) \neq \sum_{k=1\, k\neq m}^{N} a_k \varphi_k(x); \qquad u(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x).$$

- Ищем решение в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x).$$

- Подставляем в функционал

$$J[u^N] = J\left[\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)\right] = F(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

- получаем задачу минимизации функции n переменных

$$\min_{a_1,\dots,a_N} F(a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Примеры базисных функций обладающих полнотой

- Полиномы

$$\left\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x)=1;\ \ \varphi_2(x)=x;\ \varphi_{k+1}(x)=\left[(2k+1)x\varphi_k(x)-k\varphi_{k-1}(x)\right],\\ k=2,3,\ldots,\ \textit{полиномы Лежандра}\ \ x<1\end{array}\right\}$$

- Тригонометрические функции

$$\left\{\varphi_k=\sin(k\pi x),\ k=1\ldots N;\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\right\}$$

$$\left\{\varphi_k=\cos(k\frac{\pi}{2}x),\ k=1\ldots N;\ \varphi(0)=1,\ \varphi(1)=0\right\}$$

$$\left\{\varphi_k=\sin(k\frac{\pi}{2}x),\ k=1\ldots N;\ \varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1\right\}$$

$$\left\{\varphi_k=\sin(k\pi x),\psi_k=\cos(k\pi x),\ k=1\ldots N\right\}$$

- От удачного выбора базиса зависит эффективность решения задачи

Минимизация квадратичного функционала с линейным оператором *L*

$$J[u]=(Lu,u)-2(f,u)$$

- После подстановки $u^N(x)$

$$F=\left(L\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x),\sum_{i=1}^{N}a_i\varphi_i(x)\right)-2\left(f,\sum a_i\varphi_i\right)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}a_ka_i\left(L\varphi_k,\varphi_i\right)-2\sum_{i=1}^{N}a_i\left(f,\varphi_i\right)$$

- Воспользуемся условием экстремума

$$\frac{\partial F(a_1,\ldots,a_N)}{\partial a_i}=2\sum_{k=1}^{N}a_k\left(L\varphi_k,\varphi_i\right)-2\left(f,\varphi_i\right)=0;\ i=1\ldots N$$

- Получаем СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\left(L\varphi_k,\varphi_i\right)=\left(f,\varphi_i\right);\quad i=1..N$$

Системы проекционных уравнений

- Запишем $$\sum a_k (L\varphi_k,\varphi_i) = \left(L\sum a_k\varphi_k,\varphi_i\right) = (f,\varphi_i)$$
- Или $$\left(Lu^N,\varphi_i\right) = (f,\varphi_i)$$
- Проекция $$\left(Lu^N - f,\varphi_i\right) = 0$$
- Можно заметить, что эта система получается из исходной краевой задачи простой подстановкой u^N вместо u и последующим умножением скалярно (проектированием) на каждую функцию базиса
- В общем случае $$\left(L\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k, K\psi_i\right) = (f, K\psi_i); \quad i = 1\ldots N$$
- Два базиса $$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots,\varphi_N(x)\} \quad \{\psi_1(x), \psi_2(x),\ldots,\psi_N(x)\}$$
- Если проекции *F(x)* на все функции базиса равны 0 то *F(x)≡0*

Проекционные методы

- Впервые идею такого решения ДУ (не обращаясь к вариационной задаче) предложил в 1915 г.
- Б.Г. Галеркин
- В зависимости от выбора в функций ϕ и оператора K эти методы имеют свои названия
- ***метод Бубнова-Галеркина***: $K=I$, $\psi=\phi$ оператор L может не быть симметричным и положительно определенным
- ***метод Галеркина-Петрова***: $K=I$, $\psi\neq\phi$
- ***метод наименьших квадратов:*** $K=L$, $\psi=\phi$

Решение одномерной краевой задачи

- Найти решение $$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f;$$

$$q^0\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^0 u\Big|_{x=0}=\beta^0;\;\; q^1\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^1 u\Big|_{x=1}=\beta^1.$$

- Ищем решение в виде

$$u^N(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x)$$

- Проекционное уравнение $$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)\varphi_i\,dx=\int_0^1 f\varphi_i dx;\quad i=1\ldots N.$$

- преобразуем $$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1-\int_0^1 g\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx=\int_0^1 f\varphi_i dx$$

Решение одномерной краевой задачи (продолжение1)

- Подставляем u^N

$$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1 - \int_0^1 g\frac{\partial\left(\varphi_0 + \sum a_k\varphi_k\right)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx = \int_0^1 f\varphi_i dx$$

- Преобразуем и получаем
- системy основных проекционных уравнений

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\int_0^1 g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx\right) = \int_0^1\left(f\varphi_i + g\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)dx - g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1 ;\ i = 1..N$$

- В зависимости от постановки граничных условий выбираем соответствующую систему базисных функций

Задача Дирихле

$$u\big|_{x=0} = \beta^0; \;\; u\big|_{x=1} = \beta^1.$$

- Выбираем систему базисных функций вида:

$$\left\{\varphi_0 = \beta^0 + \left(\beta^1 - \beta^0\right)x, \;\; \varphi_k = \sin\left(k\pi x\right)\right\}$$

- В силу того, что

$$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1 = 0; \; i = 1..N$$

- Получаем проекционное уравнение вида

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\int_0^1 g\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}dx\right) = \int_0^1 \left(f\varphi_i + g\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)dx; \; i = 1..N$$

- Или для выбранных функций

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\int_0^1 g(x)ki\pi^2\cos(k\pi x)\cos(i\pi x)dx\right) = \int_0^1 \Big(f\sin(i\pi x) - g(\beta^1 - \beta^0)i\pi\cos(i\pi x)\Big)dx;$$

$$i = 1..N$$

Программная реализация задачи Дирихле

```
• function V2_1;
• Be0=1; be1=0; N=4; M=10;
• for i=1:N
• F1 = @(x)f(x).*sin(i*pi*x)-g(x).*(be1-be0).i*pi*cos(i*pi*x);
• d(i) = quad(F1,0,1);
• for k=1:N
• F2 = @(x)g(x).*cos(i*pi*x).*cos(k*pi*x)*i*k*pi^2;
• G(i,k)=quad(F2,0,1);
• end; end
• a=d/G;
• a
• for i=1:M+1    %выдача графика
•    xt(i)=(i-1)/M;
•    y(i)=be0+(be1-be0)*xt(i);
•  for k=1:N
•    y(i)=y(i)+a(k)*sin(k*pi*xt(i));
•  end;  end;
• plot(xt,y);
• return
```

Задача со свободным левым концом

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^0 u\right|_{x=0}=\beta^0;\quad u|_{x=1}=\beta^1.$$

- Выбираем базис вида

$$\left\{\varphi_0=\beta^1 x,\ \ \varphi_k=\sin\left(0.5k\pi(1-x)\right)\right\}\quad \left\{\varphi_k(0)=\sin(0.5k\pi),\quad \varphi_k(1)=0\right\}$$

- Первый член проекционного уравнения используя гр. условие:

$$\left.g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\right|_0^1=-g(\beta^0-\alpha^0u^N)\varphi_i\Big|_0=-g(0)(\beta^0-\alpha^0\varphi_0(0))\varphi_i(0)+\sum_k a_k\alpha^0 g(0)\varphi_k(0)\varphi_i(0)$$

- Проекционное уравнение

$$\sum_{k=1}^n a_k\left(\alpha^0 g(0)\varphi_k(0)\varphi_i(0)-\int_0^1 g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx\right)=\int_0^1\left(f\varphi_i+g\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)dx+$$

$$+g(0)(\beta^0-\alpha^0\varphi_0(0))\varphi_i(0);\ i=1..N$$

Задача со свободным левым концом (продолжение)

- Проекционное ур-е

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\alpha^0 g(0)\varphi_k(0)\varphi_i(0) - \int_0^1 g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx \right) = \int_0^1 \left(f\varphi_i + g \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) dx +$$

$$+ g(0)(\beta^0 - \alpha^0 \varphi_0(0))\varphi_i(0);\ i = 1..N$$

- После подстановки функций базиса:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\begin{array}{l} \alpha^0 g(0)\sin(0.5\pi k)\sin(0.5\pi i) - \\ -\int_0^1 g(x) ki \frac{\pi^2}{4} \cos(0.5k\pi(1-x))\cos(0.5i\pi(1-x))dx \end{array} \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(f\sin(0.5i\pi(1-x)) - g\beta^1 0.5i\pi\cos(0.5i\pi(1-x)) \right) dx +$$

$$+ g(0)\beta^0 \sin(0.5i\pi); \qquad i = 1..N$$

Программная реализация задачи со свободным левым концом

```
• function V2_2(al0,be0,be1,N,M);
• for i=1:N
• F1 = @(x)f(x).*sin(0.5*i*pi*(1-x))-
•                        g(x).*be1.*0.5*i*pi*cos(0.5*i*pi*(1-x));
• d(i) = quad(F1,0,1)+g(0)*be0*sin(0.5*i*pi);
• for k=1:N
• F2 = @(x)g(x).*cos(0.5*i*pi*(1-x)).*cos(0.5*k*pi*(1-x))
• *i*k*pi^2*0.25;
• G(i,k)=al0*g(0)*sin(0.5*k*pi)*sin(0.5*i*pi)-quad(F2,0,1);
• end; end
• a=d/G;
• a
• for i=1:M+1
•    xt(i)=(i-1)/M;
•    y(i)=be1*xt(i);
•  for k=1:N
•    y(i)=y(i)+a(k)*sin(0.5*k*pi*(1-xt(i)));
•  end; end;
• plot(xt,y,'b');
• return
```

Задача со свободным правым концом

$$u\Big|_{x=0} = \beta^0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^1 u\Big|_{x=1} = \beta^1.$$

- Выбираем базис вида

$$\left\{\varphi_0 = \beta^0(1-x), \ \ \varphi_k = \sin\left(0.5k\pi x\right)\right\} \quad \left\{\varphi_k(0)=0, \quad \varphi_k(1)=\sin(0.5k\pi)\right\}$$

- Первый член проекционного ур-я

$$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1 = g(\beta^1 - \alpha^1 u^N)\varphi_i\Big|^1 = g(1)(\beta^1 - \alpha^1\varphi_0(1))\varphi_i(1) - \sum_k a_k \alpha^1 g(1)\varphi_k(1)\varphi_i$$

- Проекционное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(-\alpha^1 g(1)\varphi_k(1)\varphi_i(1) - \int_0^1 g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx\right) = \int_0^1\left(f\varphi_i + g\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)dx -$$

$$-g(1)(\beta^1 - \alpha^1\varphi_0(1))\varphi_i(1); \ i = 1..N$$

Задача со свободным правым концом (продолжение)

Проекционное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(-\alpha^1 g(1)\varphi_k(1)\varphi_i(1) - \int_0^1 g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx \right) = \int_0^1 \left(f\varphi_i + g\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) dx -$$

$$-g(1)(\beta^1 - \alpha^1\varphi_0(1))\varphi_i(1);\ i = 1..N$$

После подстановки функций базиса

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(-\alpha^1 g(1)\sin(0.5\pi k)\sin(0.5\pi i) - \int_0^1 g(x)ki\frac{\pi^2}{4}\cos(0.5k\pi x)\cos(0.5i\pi x)dx \right) =$$

$$\int_0^1 \Big(f\sin(0.5i\pi x) - g\beta^0 0.5i\pi\cos(0.5i\pi x) \Big) dx - g(1)\beta^1 \sin(0.5\pi i); \quad i = 1..N$$

Программная реализация задачи со свободным правым концом

```
• function V2_3(al1,be0,be1,N,M);
• for i=1:N
• F1 = @(x)f(x).*sin(0.5*i*pi*x)-
•                           g(x).*be0.*0.5*i*pi*cos(0.5*i*pi*x);
• d(i) = quad(F1,0,1)-g(1).*be1*sin(0.5*i*pi);
• for k=1:N
• F2 = @(x)g(x).*cos(0.5*i*pi*x).*cos(0.5*k*pi*x)*i*k*pi^2*0.25;
• G(i,k)=-al1*g(1).*sin(0.5*k*pi)*sin(0.5*i*pi)-quad(F2,0,1);
• end; end
• a=d/G;
• a
• for i=1:M+1
•    xt(i) =(i-1)/M;
•     y(i)=be0*(1- xt(i) );
•  for k=1:N
•    y(i)=y(i)+a(k)*sin(0.5*k*pi*xt(i));
•  end; end;
• plot(xt,y,'b');
• return
```

Двумерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x,y);\qquad u\big|_{\Gamma}=\alpha(\quad);\qquad ,\quad\in\Omega$$

- Выбираем базис

$$\{\varphi_0(x,y),\varphi_1(x,y),\ldots,\varphi_N(x,y)\}$$

- Решение ищем в виде $u^N=\sum_{k=0}^{N}a_k\varphi_k(x,y)$

- Проекционное уравнение

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)\right]\varphi_i\,d\Omega=\int_{\Omega}f\varphi_i\,d\Omega$$

Двумерная краевая задача Дирихле (продолжение)

- Воспользуемся методом интегрирования по частям для двумерного случая

$$\iint_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega = -\iint_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}d\Omega + \int_{\Gamma} uvn_x d \quad ,$$

$$\iint_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}dS = -\iint_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}d\Omega + \int_{\Gamma} uvn_y d \quad .$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y);\ n_x^2 + n_y^2 = 1$$

- Получаем проекционное уравнение без вторых производных

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left[\iint_{\Omega} g\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) d\Omega \right] = \int_{\Gamma} g\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}n_x + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}n_y \right)\varphi_i d \quad + \ {}_i .$$

Сведение трехмерной задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича

- Задана краевая задача в цилиндрической области вида

$$Lu(xyz) = f; \quad u\Big|_{z=0} = \alpha(xy); \qquad u\Big|_{z=L} = \beta(xy); \quad u\Big| \;\; = 0,$$

- Г - граница области поперечного сечения Ω_Γ $\qquad x, y \in \Omega_\Gamma$

- Решение ищем в виде разложения по базису

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\varphi_k(x,y) \qquad\qquad \{\varphi_1(x,y),\ldots,\varphi_N(x,y)\}$$

- Стандартное проекционное уравнение после интегрирования представляет систему ОДУ относительно a_k

$$\iint\limits_{\Omega_\Gamma}\left[\left(L\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\varphi_k(x,y)\right)\varphi_i(x,y)\right]dxdy = \iint\limits_{\Omega_\Gamma} f(x,y,z)\varphi_i(x,y)dxdy$$

- Метод Канторовича (продолжение)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(g_1 \dfrac{\partial a_1}{\partial z}\right) + q_1 \dfrac{\partial a_1}{\partial z} + p_1 a_1 = f(z, a_2, \dots, a_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(g_m \dfrac{\partial a_m}{\partial z}\right) + q_m \dfrac{\partial a_m}{\partial z} + p_m a_m = f(z, a_1, \dots, a_{m-1}). \end{cases}$$

$$a_k(0) = \alpha_k; \quad a_k(L) = \beta_k$$

$$\sum_k \alpha_k \iint_{\Omega_\Gamma} \varphi_k \varphi_i \, dxdy = \iint_{\Omega_\Gamma} \alpha \varphi_i \, dxdy; \quad \sum_k \beta_k \iint_{\Omega_\Gamma} \varphi_k \varphi_i \, dxdy = \iint_{\Omega_\Gamma} \beta \varphi_i \, dxdy.$$

Конец темы 7