Тема 9. Метод конечных элементов

- *Связь метода сеток и метода конечных элементов*
- *Пример решения одномерной задачи*
- *Решение двухмерной задачи на треугольной сетке*

Связь метода сеток (МС) и метода конечных элементов (МКЭ)

- МКЭ в настоящее время является одним из наиболее востребованных и универсальных методов решения задач математической физики
- МКЭ представляет собой синтез метода сеток и проекционного метода Галеркина с выбором базиса из финитных функций, носители которых (конечные элементы) покрывают каждый узел сетки
- МКЭ – это тот же классический метод сеток, в котором конечно-разностная схема получается в результате применения проекционной процедуры к базису из финитных функций, привязанных к каждому узлу сетки.
- Такой способ получения конечно-разностной схемы позволил избавиться от основного недостатка классического метода сеток – привязки узлов сетки к координатным линиям, что позволило в случае многомерных задач гибко адаптировать сетку к произвольной форме границ и особенностям искомого решения

Пример решения одномерной задачи

- Задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)u=f\left(x\right); \qquad u(0)=\alpha; \quad u(b)=\beta.$$

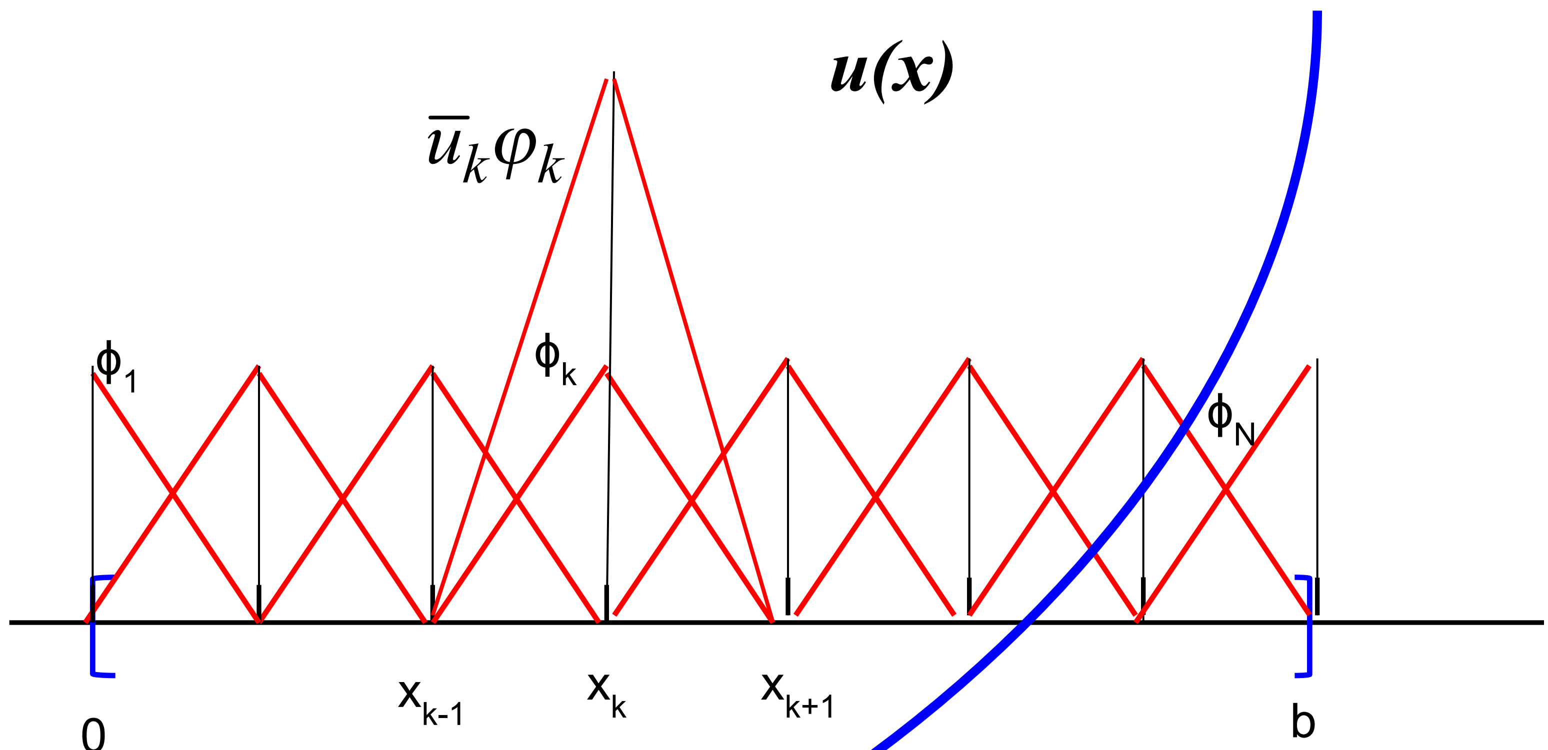
- Выбираем равномерную сетку

$$\omega_h=\left\{x_k=(k-1)h; \;\; h=b/n; \;\; k=1\ldots N=n+1\right\}$$

- Решение ищем в виде

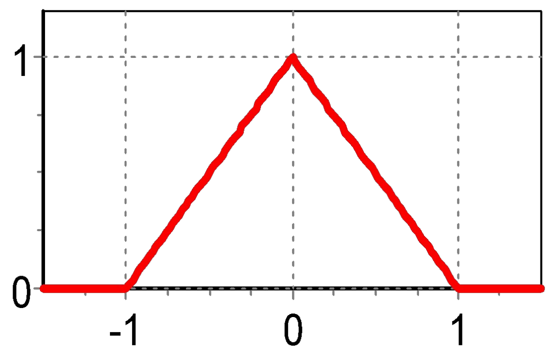
$$u^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\overline{u}_k\varphi_k(x) \qquad \overline{u}_1=\alpha, \;\; \overline{u}_N=\beta$$

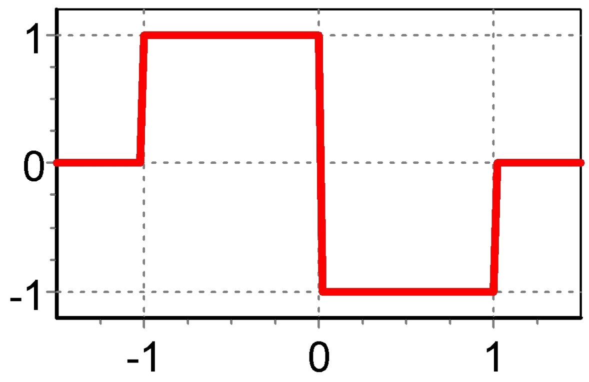
Базис из финитных функций- крышек



$$u^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\bar{u}_k\varphi_k(x),\quad \varphi_k=\varphi_1^1\left(\frac{x-x_k}{h}\right)$$

Стандартная финитная функция- крышка





$$\varphi_1^1(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ x+1, & -1\le x\le 0,\\ 1-x, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial x}=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1, & -1\le x\le 0,\\ -1, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Функции базиса

$$\varphi_k = \begin{cases} 0, & |x - x_k| > h, \\ (x - x_{k-1})/h, & x_{k-1} \le x \le x_k, \\ (x_{k+1} - x)/h, & x_k \le x \le x_{k+1}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x - x_k| > 1, \\ 1/h, & x_{k-1} \le x \le x_k, \\ -1/h, & x_k \le x \le x_{k+1}. \end{cases}$$

проекционные уравнения

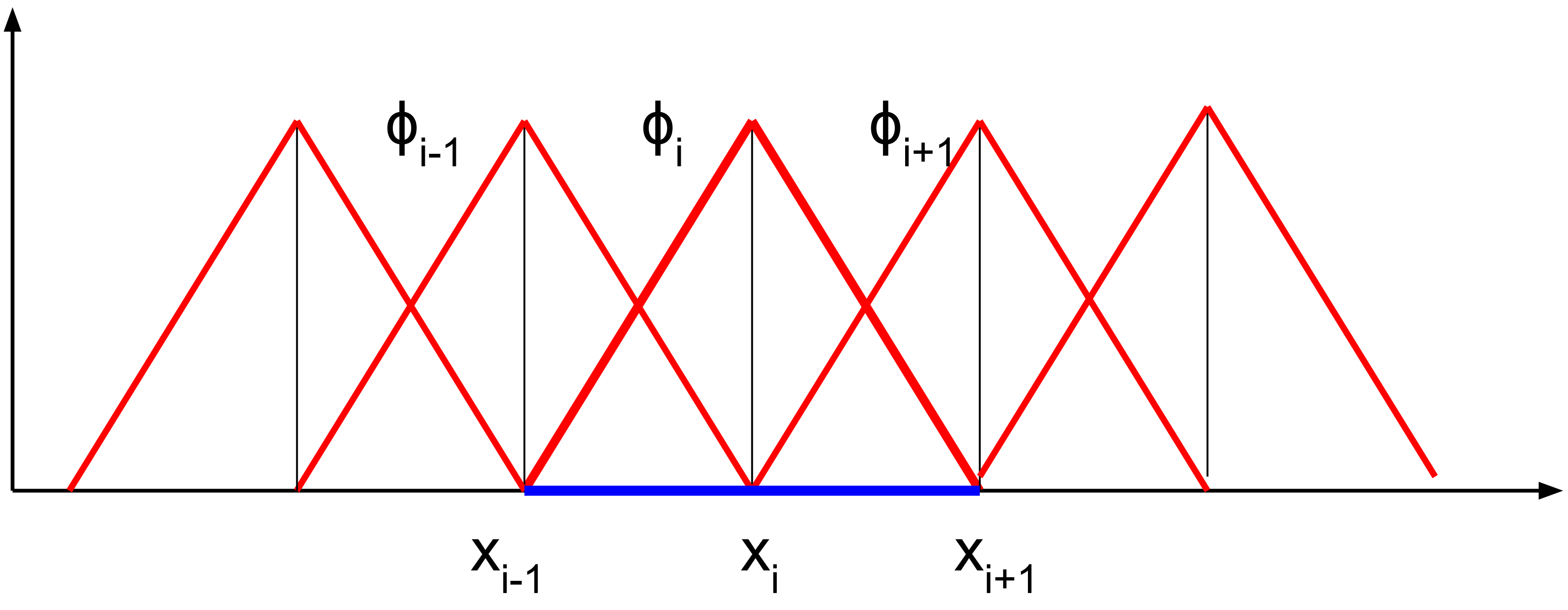
$$\int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u^N}{\partial x} \right) + q(x)\frac{\partial u^N}{\partial x} + p(x)u^N \right]\varphi_i(x)dx = \int_0^b f\left(x\right)\varphi_i(x)dx;$$

$$.i = 1..N$$

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_k \varphi_k(x)$$

Вычислим каждый интеграл по отдельности для i=2..N-1

Смежные базисные функции



$$u^N(x) = \overline{u}_1\varphi_1(x) + \ldots + \overline{u}_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \overline{u}_i\varphi_i(x) + \overline{u}_{i+1}\varphi_{i+1}(x) + \ldots + \overline{u}_N\varphi_N(x)$$

1) Правая часть

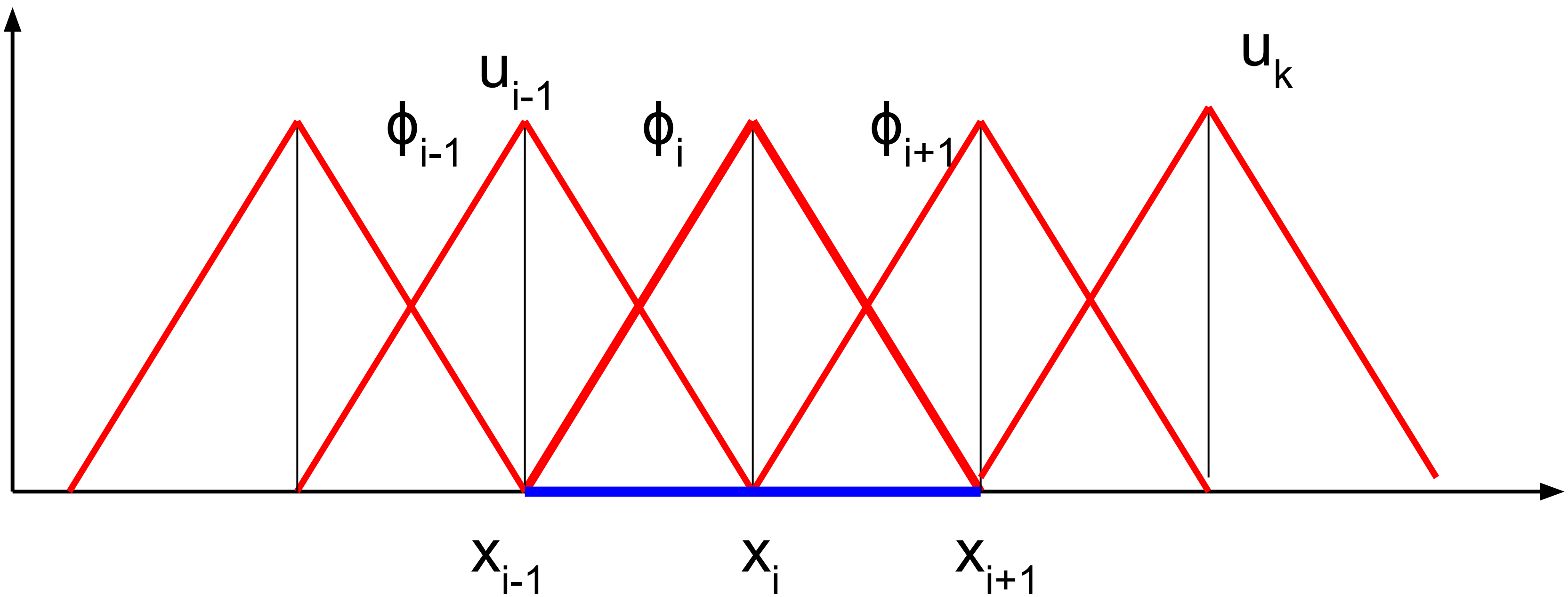
$$\int_0^b f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \hat{f}_i \approx h\frac{f(x_{i-1/2}) + f(x_{i+1/2})}{2} \approx hf(x_i)$$

2) Первый член дифференциального оператора

$$\int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)\right]\varphi_i(x)dx =$$

$$\int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\sum_{k=1}^{N}\overline{u}_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right)\right]\varphi_i(x)dx = -\sum_{k=1}^{N}\overline{u}_k\int_0^b g(x)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}dx$$

Смежные базисные функции



$$u^N(x) = \overline{u}_1\varphi_1(x) + \ldots + \overline{u}_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \overline{u}_i\varphi_i(x) + \overline{u}_{i+1}\varphi_{i+1}(x) + \ldots + \overline{u}_N\varphi_N(x)$$

Первый член (продолжение)

$$-\sum_{k=1}^{N}\overline{u}_k\int_0^b g(x)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx=$$

$$=-\overline{u}_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx-\overline{u}_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx-\overline{u}_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx=$$

$$=-\overline{u}_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)(-\frac{1}{h})\frac{1}{h}dx-\overline{u}_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)\frac{1}{h}\frac{1}{h}dx-\overline{u}_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\frac{1}{h}(-\frac{1}{h})dx=$$

$$=\overline{u}_{i-1}\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx-\overline{u}_i\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)dx+\overline{u}_{i+1}\frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx$$

Первый член (продолжение)

- Обозначим .

$$g_{i-1/2}=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g\,dx \approx g(x_{i-1/2});\quad g_{i+1/2}=\frac{1}{h}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g\,dx \approx g(x_{i+1/2})$$

- получим

$$\int\limits_0^b\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)\right]\varphi_i(x)dx=\frac{g_{i-1/2}}{h}\overline{u}_{i-1}-\left(\frac{g_{i-1/2}+g_{i+1/2}}{h}\right)\overline{u}_i+\frac{g_{i+1/2}}{h}\overline{u}_{i+1}$$

3) Второй член дифференциального оператора

$$\int_0^b \left[q(x) \frac{\partial u^N}{\partial x} \right] \varphi_i(x) dx = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_k \int_0^b q(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_i(x) dx =$$

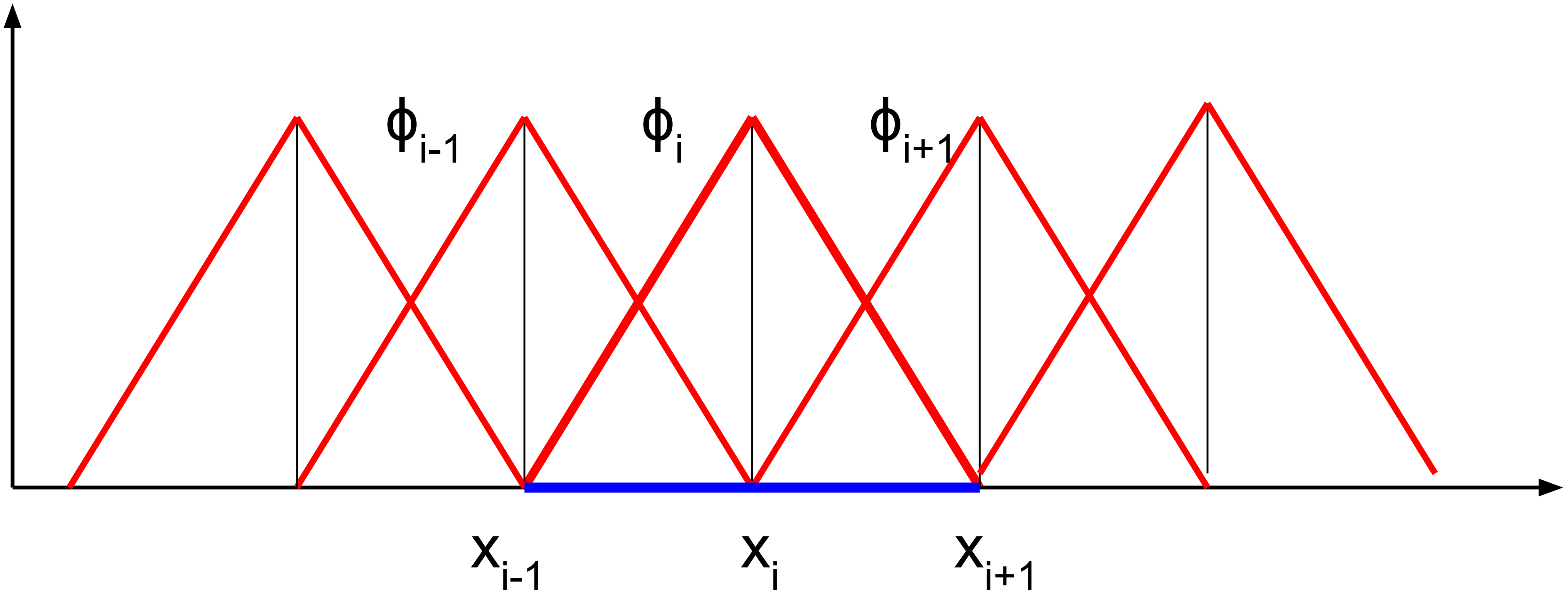
$$= \overline{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x} \varphi_i dx + \overline{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_i dx + \overline{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \varphi_i dx =$$

$$= \overline{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(-\frac{1}{h}) \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \overline{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_i dx + \overline{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{1}{h} \frac{x_{i+1} - x}{h}) dx$$

Вычислив приближенно интегралы, получим

$$\int_0^b \left[q(x) \frac{\partial u^N}{\partial x} \right] \varphi_i(x) dx \approx -\overline{u}_{i-1} \frac{q(x_{i-1/2})}{2} + \overline{u}_i \frac{q(x_{i-1/2}) - q(x_{i+1/2})}{2} + \overline{u}_{i+1} \frac{q(x_{i+1/2})}{2}$$

Смежные базисные функции



4)Третий член дифференциального оператора

$$\int_0^b \left[p(x)u^N \right] \varphi_i(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_k \int_0^b p(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx =$$

$$= \overline{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\varphi_{i-1}\varphi_i dx + \overline{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\varphi_i\varphi_i dx + \overline{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\varphi_{i+1}\varphi_i dx =$$

$$= \overline{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\frac{x_i - x}{h}\frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \overline{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\varphi_i^2 dx + \overline{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\frac{x - x_i}{h}\frac{x_{i+1} - x}{h})dx$$

Вычислив приближенно интегралы, получим

$$\int_0^b \left[p(x)u^N \right] \varphi_i(x)dx = \overline{u}_{i-1}\frac{hp(x_{i-1/2})}{6} + \overline{u}_i \frac{h\left[q(x_{i-1/2}) - q(x_{i+1/2})\right]}{3} + \overline{u}_{i+1}\frac{hq(x_{i+1/2})}{6}$$

Сложив и приведя подобные члены, получаем конечно-разностную схему

$$a_i \overline{u}_{i-1} + b_i \overline{u}_i + c_i \overline{u}_{i+1} = d_i, \quad i = 2 \ldots n, \quad \overline{u}_1 = \alpha, \quad \overline{u}_N = \beta.$$

$$a_i = \frac{g_{i-1/2}}{h} - \frac{q_{i-1/2}}{2} + \frac{hp_{i-1/2}}{6}$$

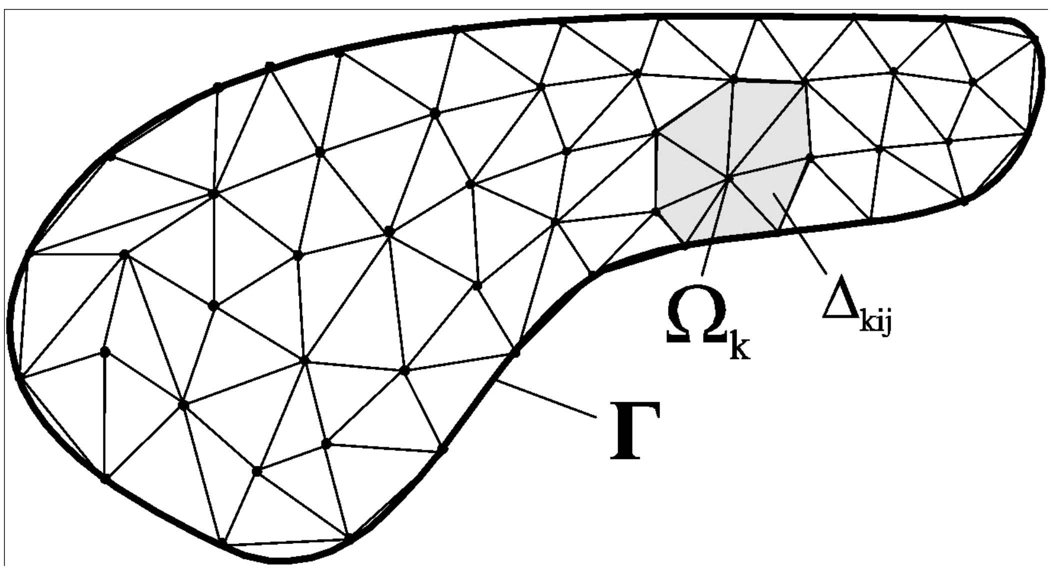
$$c_i = \frac{g_{i+1/2}}{h} + \frac{q_{i+1/2}}{2} + \frac{hp_{i+1/2}}{6}$$

$$b_i = -\frac{g_{i-1/2} + g_{i-1/2}}{h} + \frac{q_{i-1/2} - q_{i+1/2}}{2} + \frac{h(p_{i-1/2} + p_{i+1/2})}{3}$$

Решение двухмерной задачи на треугольной сетке

- Задача Дирихле

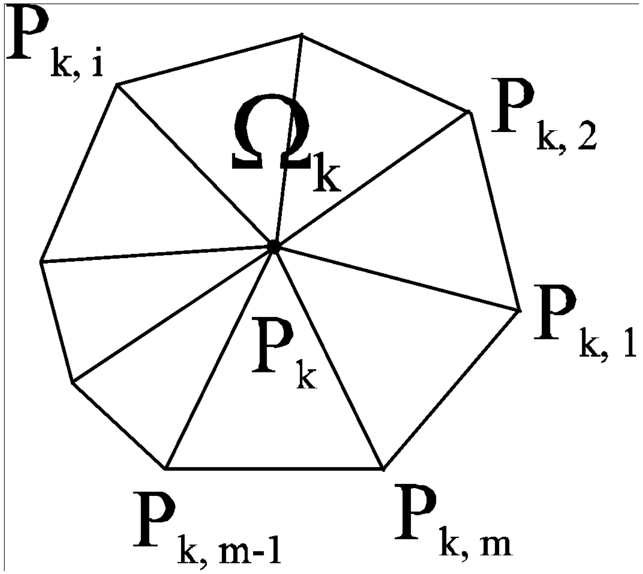
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f \qquad u\big|_{\Gamma}=U(\quad)$$



Решение ищем в виде разложения по финитным функциям, привязанным к узлам треугольной сетки

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} \bar{u}_k \varphi_k(x, y)$$

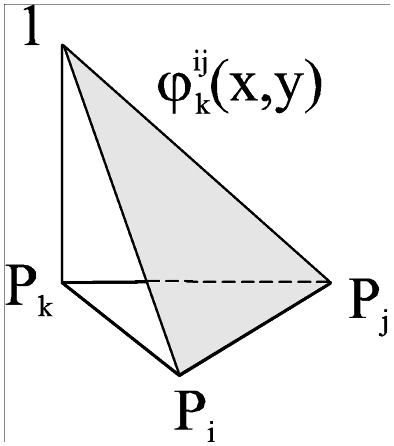
$$\varphi_k(xy) = \begin{cases} \varphi_k^{k_1,k_2}(xy), \ \ (xy) \in \Delta_{k,k_1,k_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k^{k_{m-1},k_m}(xy), \ \ (xy) \in \Delta_{k,k_{m-1},k_m}, \\ \varphi_k^{k_m,k_1}(xy), \ \ (xy) \in \Delta_{k,k_m,k_1}, \\ 0, \ \ xy \notin \Omega_k. \end{cases}$$



$$\varphi_k^{ij} = 1 + \alpha_k^{ij}(x - x_k) + \beta_k^{ij}(y - y_k).$$

Финитная функция на треугольных конечных элементах

- определим кусочно-линейную функцию $\varphi_k^{ij}(xy)$, которая в точке P_k равна единице, а в точках P_i, P_j равна нулю

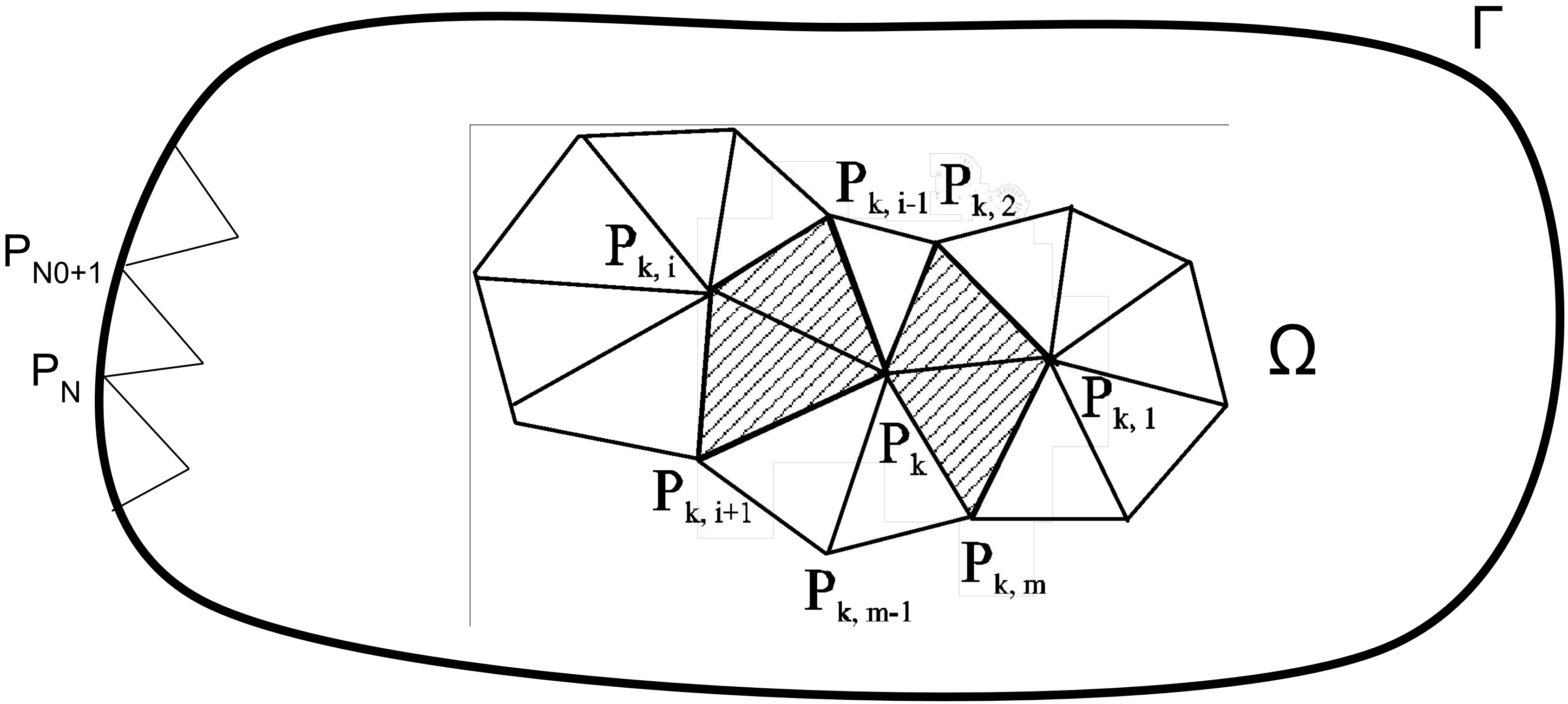


$$\varphi_k^{ij} = \frac{1 - \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} - \dfrac{y - y_j}{y_i - y_j}}{1 - \dfrac{x_k - x_i}{x_j - x_i} - \dfrac{y_k - y_j}{y_i - y_j}} = 1 + \alpha_k^{ij}(x - x_k) + \beta_k^{ij}(y - y_k).$$

$$\alpha_k^{ij} = \frac{\partial \varphi_k^{ij}}{\partial x}; \quad \beta_k^{ij} = \frac{\partial \varphi_k^{ij}}{\partial y}$$

Конечно-разностная схема двумерной задачи

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{u}_j \left[\iint\limits_{\Omega_k} g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] = f_k \quad k = 1 \ldots N_0 .$$



Конечно-разностная схема

$$\bar{u}_k g_k + \bar{u}_{k_1} g_{k_1} + \ldots + \bar{u}_{k_m} g_{k_m} = \hat{f}_k$$

Внутренние узлы: $k = 1, 2 \ldots N_0;$

Граничные значения: $\bar{u}_{N_0+1} \ldots \bar{u}_N = U_{N_0+1} \ldots U_N$

$$g_k = -\sum_{i=1}^{m_k} g_{k_i}$$

$$g_{k_i} = \left(\alpha_k^{k_{i-1}k_i} \alpha_{k_i}^{k_{i-1}k} + \beta_k^{k_{i-1}k_i} \beta_{k_i}^{k_{i-1}k} \right) \iint\limits_{\Delta_{kk_{i-1}k_i}} g dS + \left(\alpha_k^{k_i k_{i+1}} \alpha_{k_i}^{k_{i+1}k} + \beta_k^{k_i k_{i+1}} \beta_{k_i}^{k_{i+1}k} \right) \iint\limits_{\Delta_{kk_i k_{i+1}}} g dS$$

Решение методом итераций

Разрешаем относительно узлового элемента:

$$\overline{u}_k = \frac{1}{g_k}\left(\vec{f}_k - \overline{u}_{k_1} g_{k_1} - \ldots - \overline{u}_{k_m} g_{k_m}\right)$$

Организуем итерационный процесс с релаксацией:

$$\overline{u}_k^{s+1} = (1-\omega_r)\overline{u}_k^{s} + \omega_r \frac{1}{g_k}\left(\vec{f}_k - \sum_{i=1}^{m_k} \overline{u}_{k_i}^{s} g_{k_i}\right)$$

Конец