Курс Основы информационных технологий

Раздел

Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики

(установочная лекция)

Профессор Синицын Анатолий Константинович

Кафедра ВМиП (а. 412 – 5к)

09/02/2023

Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М: Наука, 1978.
2. Болсун А.И., Гронский В.К., Бейда А.А. Методы математической физики. – Мн.: Выш. Шк., 1988.
3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: - Наука, 1980.
6. Синицын А.К. Современные информационные технологии. Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики. Конспект лекций для аспирантов и магистрантов Мн.: БГУИР, 2004.
7. Синицын А.К. ,Навроцкий А.А. Алгоритмы вычислительной математики. Учебно-методическое пособие. Мн.: БГУИР, 2007

Метод и его погрешность

- При построении вычислительного алгоритма обычно точное решение некоторой задачи
- $A(Y)=b$ $\qquad Y=F(x)$
- представляется в виде бесконечного предела последовательности арифметических и логических действий:
- $Y_h=M_h(x)$
- M_h – метод, h – параметр метода
- При ограничении лишь конечным числом вычислений вносится контролируемая параметром h метода погрешность
- $\varepsilon(h)=Y-Y_h$
- Получение зависимости погрешности решения $\varepsilon(h)$ от параметров вычислительного метода является одной из основных задач вычислительной математики

Порядок погрешности метода (продолжение)

- Обычно при уменьшении некоторого параметра *h* метода погрешность решения ε_h стремится к нулю, т. е.
- при $h \to 0$ $\varepsilon_h \to 0$
- В этом случае, если удается получить оценку вида

$$\varepsilon_h < Ch^p$$

- где *C* - const и не зависит от *h*, считается, что ***порядок погрешности*** равен *p* и обозначается коротко

$$\varepsilon_h \approx o(h^p)$$

Из математической физики

- Математической моделью поля является функция нескольких переменных, обычно

$$\varphi(x, y, z, t) \qquad \vec{u}(x, y, z, t)$$

- Операторы дифференцирования:

$$\psi = div\vec{u}, \quad \vec{v} = rot\vec{u},$$

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \qquad \psi = \nabla^2\varphi$$

Операторы дифференцирования

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla\varphi = grad\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{z}_0$$

$$\nabla^2\varphi = div(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{u}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V div\,\vec{u}\,dV$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Обыкновенные ДУ

- Система ОДУ первого порядка
- $$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_m); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du_m}{dx} = f_m(x, u_1, u_2, \ldots, u_m). \end{cases}$$

или коротко

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}).$$

- Система ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + p_1 u_1 = f(x, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g_m \dfrac{\partial u_m}{\partial x}\right) + q_m \dfrac{\partial u_m}{\partial x} + p_m u_m = f(x, u_1, \ldots, u_{m-1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x}). \end{cases}$$

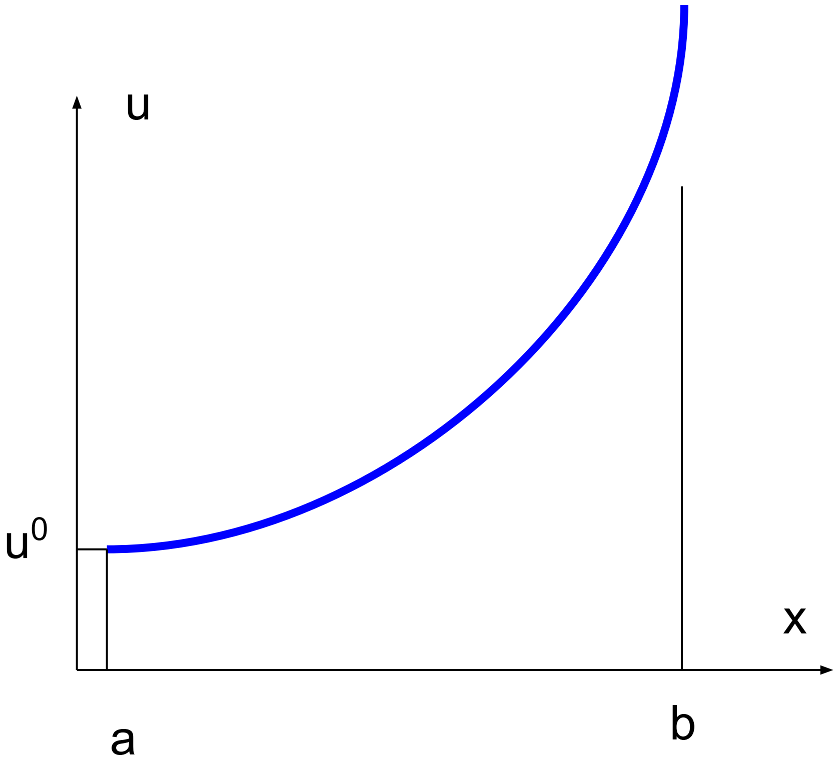
$$\vec{u} = \{u_1(x), \ldots, u_m(x)\} \qquad a \le x \le b$$

Задача Коши

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}).$$

$$u_1(a) = u_1^0; \;\; \ldots \;\; u_m(a) = u_m^0$$

$$\vec{u}(a) = \vec{u}^0$$



Краевая задача

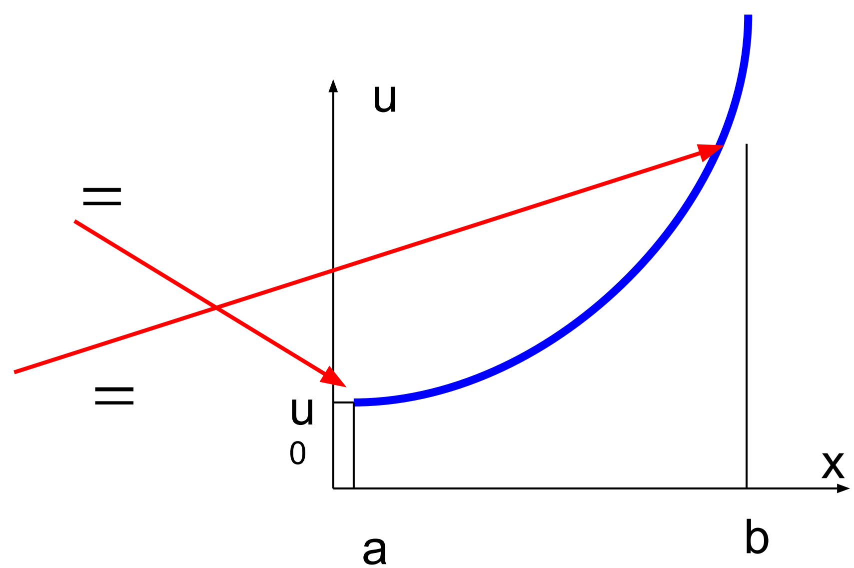
- Условия заданы на обоих концах отрезка [a,b].
- Эта задача обычно ставится для ДУ второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q\frac{\partial u}{\partial x}+pu=f(x,u)$$

- В общем случае

$$\alpha^a \frac{du(a)}{dx}+\beta^a u(a)=\gamma^a \quad \text{при } x=a;$$

$$\alpha^b \frac{du(b)}{dx}+\beta^b u(b)=\gamma^b \quad \text{при } x=b;$$



ДУ в частных производных (ДУЧП)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f$$

- параболические

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f$$

- гиперболические

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f$$

- эллиптические

Граничные условия

- Общее решение ДУЧП содержит произвольные дифференцируемые функции, например
- Решением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ является

$$u = f(t \pm z)$$

- Начальные условия

$$u\Big|_{t=0} = U^0(x, y, z) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = U^0_\partial(x, y, z)$$

- Граничные условия

первого рода Дирихле

второго рода Неймана

третьего рода Ньютона

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi(\quad) \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \psi(\Gamma) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\Bigg|_{\Gamma} = \gamma(\quad)$$

Суть метода сеток

- Суть метода сеток в том, что решение ДУ получают в виде достаточно подробной таблицы значений искомого решения в узлах сетки, покрывающей область определения решения.
- Получаемая таблица должна обладать свойством аппроксимации, т.е. возможностью восстановления всех значений искомого точного решения с заданной погрешностью.
- Будем иллюстрировать реализацию метода сеток на решении простейшей одномерной краевой задачи Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f\left(x,u\right); \qquad u(0)=\alpha; \quad u(b)=\beta.$$

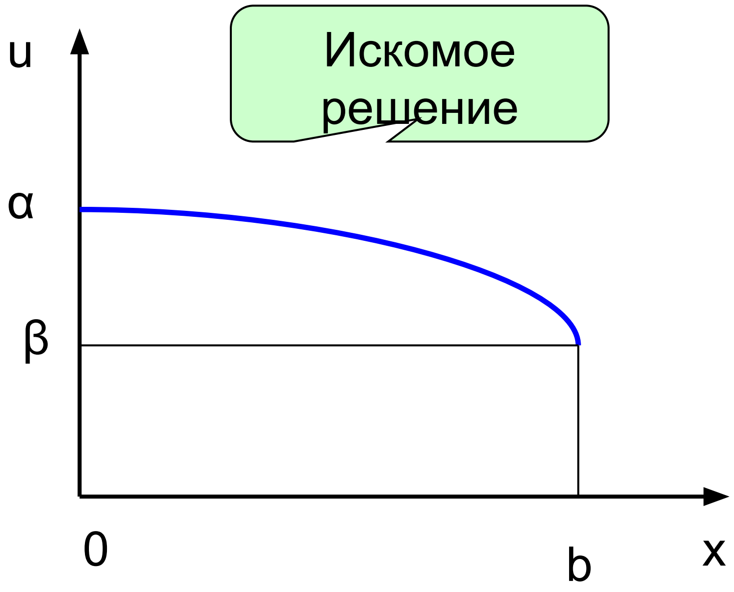
- В общем случае

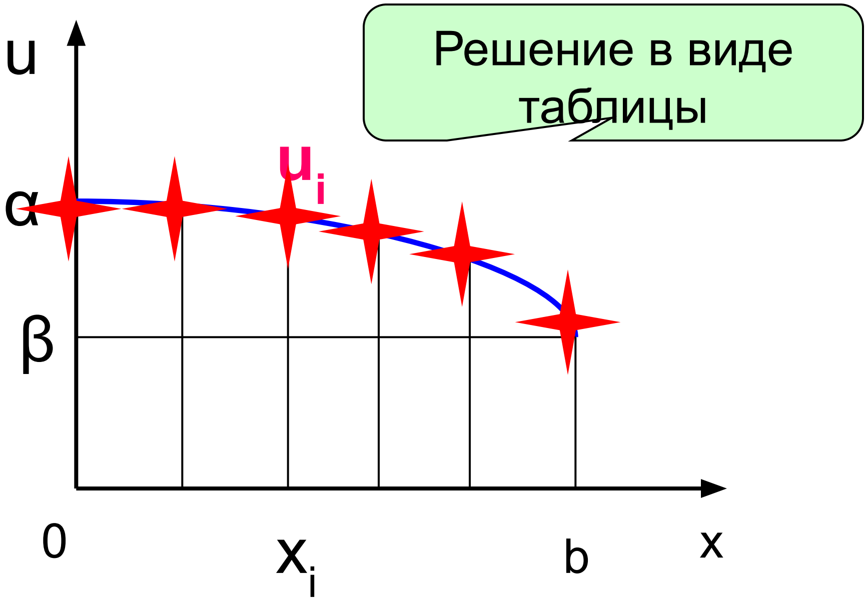
$$Lu=f; \qquad u\big|_{\Gamma}=\varphi(\quad),$$

- Г - граница многомерной области Ω, внутри которой необходимо получить решение. В рассматриваемом частном случае Ω представляет собой отрезок

$$\Omega=[0,b]$$

Результат решения по методу сеток





Получение конечноразностной схемы

- Решение $u(x)$ ищется в виде таблицы значений в узлах выбранной сетки

$$u_h = \{u_i = u(x_i)\}$$

- дифференциальное уравнение $Lu = f$, заменяется системой алгебраических уравнений, связывающих между собой значения искомой функции в соседних узлах.
- Такая система алгебраических уравнений называется конечно-разностной схемой
- Обозначим

$$L_h \overline{u}_h = \overline{f}_h, \qquad \overline{u}_h = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{n+1})$$

- Имеется много способов получения конечно-разностной схемы

Конечно-разностная схема

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f\left(x,u\right); \qquad u(0)=\alpha; \quad u(b)=\beta.$$

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2}\overline{u}_{i-1}-\left(\frac{g_{i-1/2}+g_{i+1/2}}{h^2}\right)\overline{u}_i+\frac{g_{i+1/2}}{h^2}\overline{u}_{i+1}=\overline{f}_i,\;\; i=2\ldots n.$$

$$a_i\overline{u}_{i-1}+b_i\overline{u}_i+c_i\overline{u}_{i+1}=\overline{f}_i,\;\; i=2\ldots n.$$

$$\overline{u}_1=\alpha,\;\; \overline{u}_{n+1}=\beta,$$

система конечно-разностных уравнений

- Стандартная система с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n1} & b_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \ldots \\ \overline{u}_n \\ \overline{u}_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \ldots \\ d_n \\ d_{n1} \end{bmatrix}$$

$$n1 = n + 1;\ b_1 = 1;\ c_1 = 0;\ d_1 = \alpha;\ a_{n1} = 0;\ b_{n1} = 1;\ d_{n1} = \beta;$$

$$a_i = g_{i-1/2};\ c_i = g_{i+1/2};\quad b_i = -a_i - c_i;\quad d_i = h^2 \overline{f}_i;\quad i = 2 \ldots n.$$

Погрешность аппроксимации

- При замене дифференциального уравнения системой алгебраических уравнений вносится так называемая ***погрешность аппроксимации конечно-разностной схемой дифференциального уравнения***
- подставим в конечно-разностную схему $L_h \bar{u}_h = \bar{f}_h$, вместо значения $\bar{u}_h$ точного решения u_h.
- Ввиду того, что $\bar{u}_h \neq u_h$, после такой подстановки получается невязка
- Погрешность аппроксимации $\psi_h = L_h u_h - f_h \neq 0$
- Основное требование: при $h \to 0 \quad \psi_h \to 0$
- Ассимптотическая оценка $\|\psi_h\| \leq C_\psi h^p$
- Порядок погрешности аппроксимации = p

Оценка погрешности решения
Понятие устойчивости

- Погрешность решения : $\varepsilon_h = u_h - \overline{u}_h$
- Для сходимости к точному решению $\varepsilon_h \to 0 \;\; при \;\; h \to 0$
- кроме $\psi_h \to 0$ необходима
- устойчивость к ошибкам округления $\left\|\overline{u}_h - \tilde{u}_h\right\| \le C_0 \left\|f_h - \tilde{f}_h\right\|$
- Основная теорема

$$L_h \overline{u}_h = f_h$$
$$L_h u_h = f_h + \psi_h = \tilde{f}_h$$
$$L_h(\overline{u}_h - u_h) = L_h \varepsilon_h = \psi_h$$

$$\left\|\varepsilon_h\right\| \le C_0 \left\|\psi_h\right\| \le C_0 C_\psi h^p$$

Проекционные методы решения краевых задач

$$Lu = f; \quad u\big|_{\Gamma} = \alpha(\quad)$$ - Краевая задача

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_N(x)\}$$ - базис из функций

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x).$$ - Представление решения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k (L\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i); \quad i = 1..N$$ - Проекционное уравнение

Решение одномерной краевой задачи методом Галеркина

- Найти решение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f; \qquad q^0\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^0 u\Big|_{x=0}=\beta^0; \;\; q^1\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^1 u\Big|_{x=1}=\beta^1.$$

- Ищем решение в виде

$$u^N(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x)$$

- Проекционное уравнение

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)\varphi_i\,dx=\int_0^1 f\varphi_i dx; \quad i=1\ldots N.$$

- преобразуем

$$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1-\int_0^1 g\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}dx=\int_0^1 f\varphi_i dx$$

Решение одномерной краевой задачи (продолжение1)

- Подставляем u^N

$$g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1 - \int_0^1 g\frac{\partial\left(\varphi_0 + \sum a_k\varphi_k\right)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx = \int_0^1 f\varphi_i dx$$

- Преобразуем и получаем
- системy основных проекционных уравнений

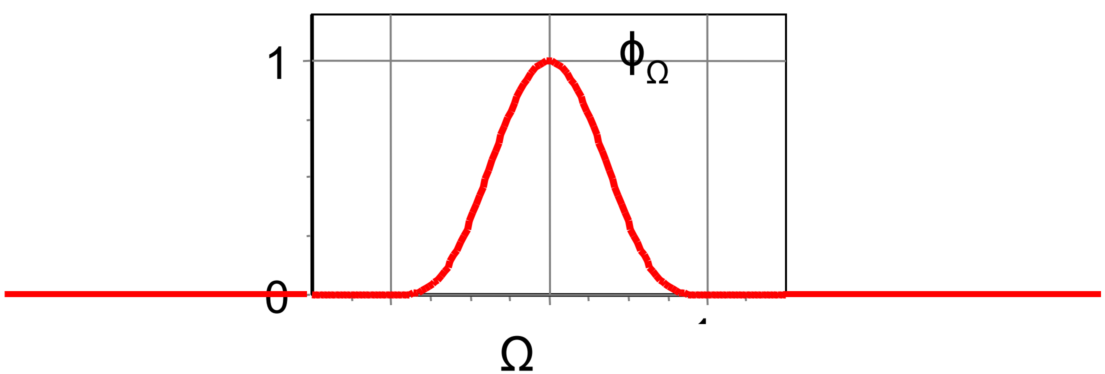
$$-\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\int_0^1 g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx\right) = \int_0^1\left(f\varphi_i + g\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)dx - g\frac{\partial u^N}{\partial x}\varphi_i\Big|_0^1;\ i = 1..N$$

- В зависимости от постановки граничных условий выбираем соответствующую систему базисных функций

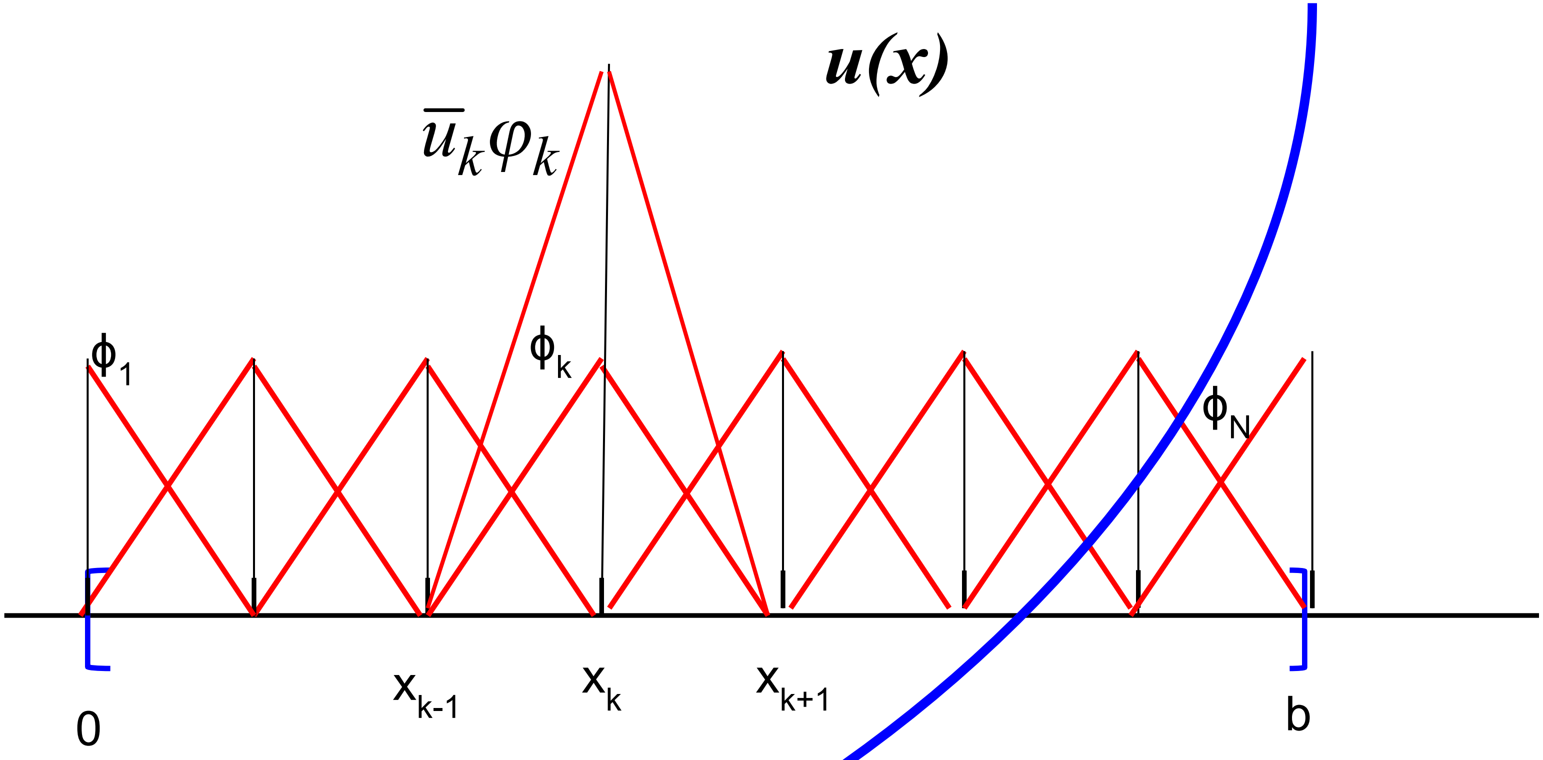
Базис из финитных функций

- ***Финитной*** называется функция $\varphi_{\Omega k}(x)$, определенная для всех
- $-\infty \le x \le \infty\ (\Omega)$, но отличная от нуля лишь на некоторой конечной области $\Omega_k \subset \Omega$, называемой ***конечным носителем***

$$\varphi_{\Omega k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega_k, \\ \varphi(x), & x \in \Omega_k. \end{cases}$$



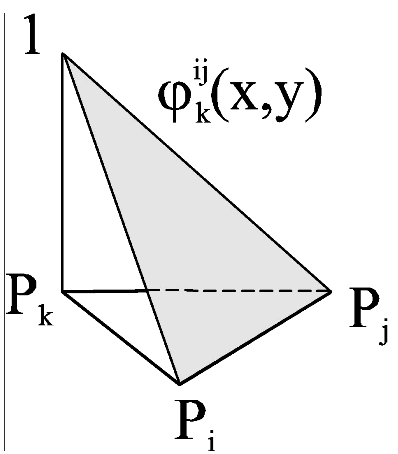
Базис из финитных функций- крышек



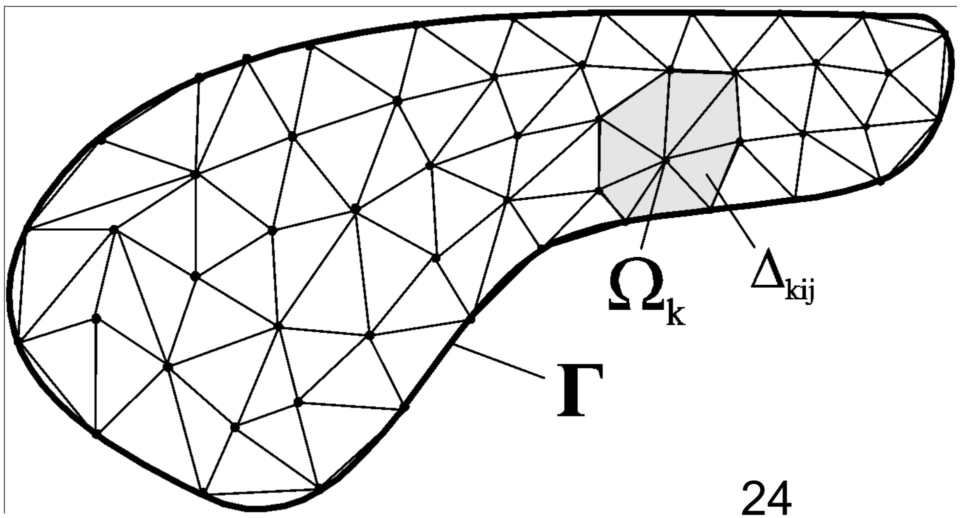
$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \bar{u}_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k = \varphi_1^1\left(\frac{x - x_k}{h}\right)$$

Финитная функция на треугольных конечных элементах

$$\varphi_k^{ij}(xy)$$

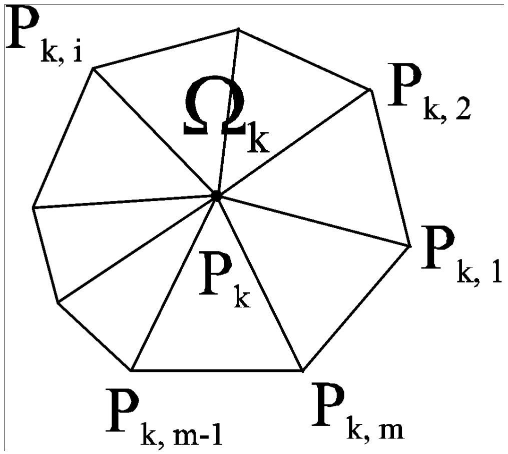


$$\varphi_k^{ij} = \frac{1 - \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} - \dfrac{y - y_j}{y_i - y_j}}{1 - \dfrac{x_k - x_i}{x_j - x_i} - \dfrac{y_k - y_j}{y_i - y_j}} = 1 + \alpha_k^{ij}(x - x_k) + \beta_k^{ij}(y - y_k).$$



Базисные финитные функции

$$u \approx u^N(x,y) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x,y)$$



$$\Omega_k = \Delta_{k,k_1,k_2} + \Delta_{k,k_2,k_3} + \ldots + \Delta_{k,k_{m-1},k_m}$$

$$\varphi_k(xy) = \begin{cases} \varphi_k^{k_1,k_2}(xy), & (xy) \in \Delta_{k,k_1,k_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_k^{k_{m-1},k_m}(xy), & (xy) \in \Delta_{k,k_{m-1},k_m}, \\ \varphi_k^{k_m,k_1}(xy), & (xy) \in \Delta_{k,k_m,k_1}, \\ 0, & xy \notin \Omega_k. \end{cases}$$