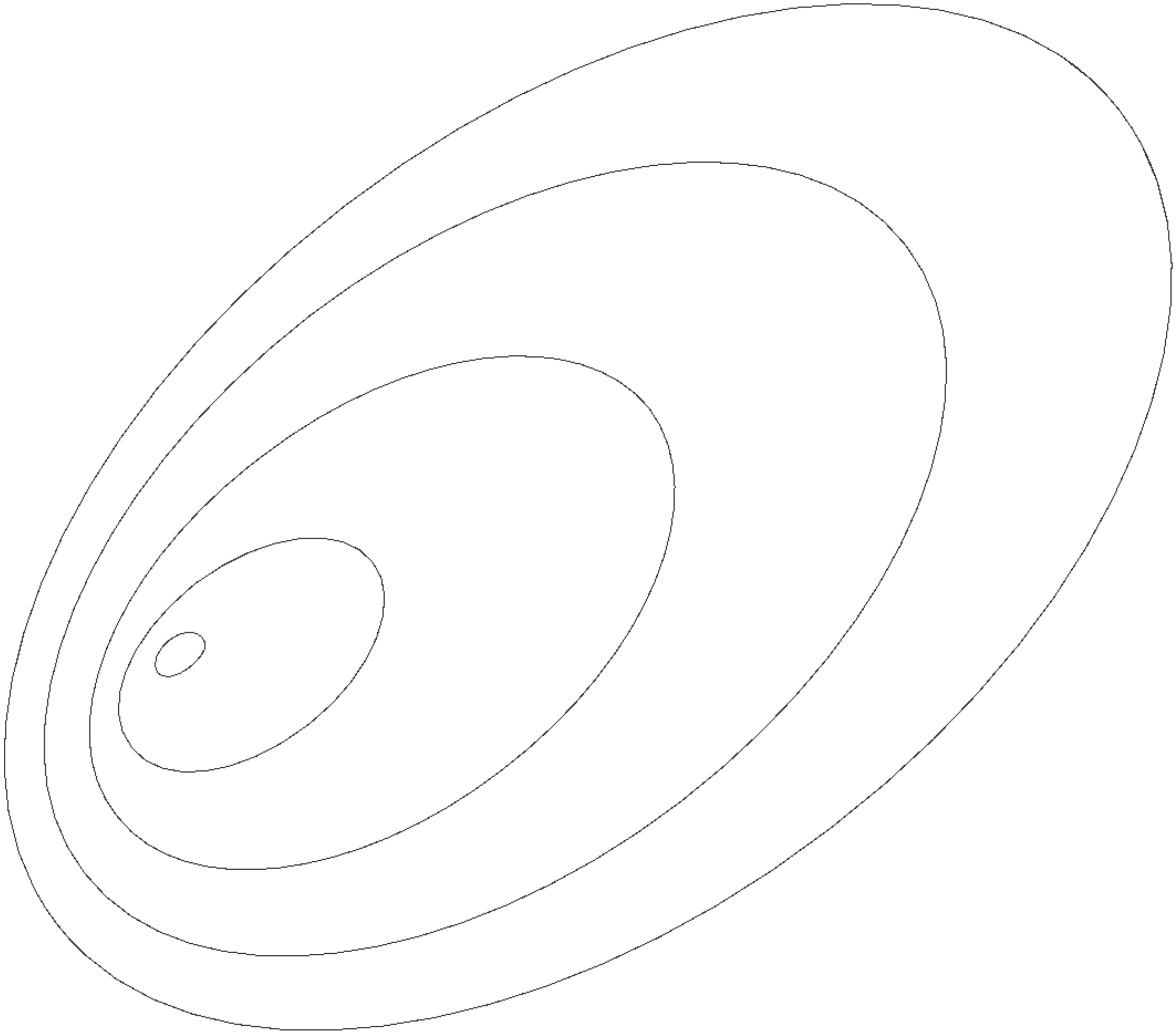
МЕТОДЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\vec{g} = \nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Градиент характеризует направление наибольшего возрастания функции, а **Модуль градиента** -- скорость этого возрастания

$$-\vec{g}$$



МЕТОД СПУСКА ПО ГРАДИЕНТУ.

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Направление одномерного спуска совпадает с вектором градиента

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} - h_{k-1} \cdot \nabla f(\vec{x}_{k-1})$$

Величина рабочего шага
в направлении градиента
зависит от **величины градиента**
и от **коэффициента**
пропорциональности шага h.

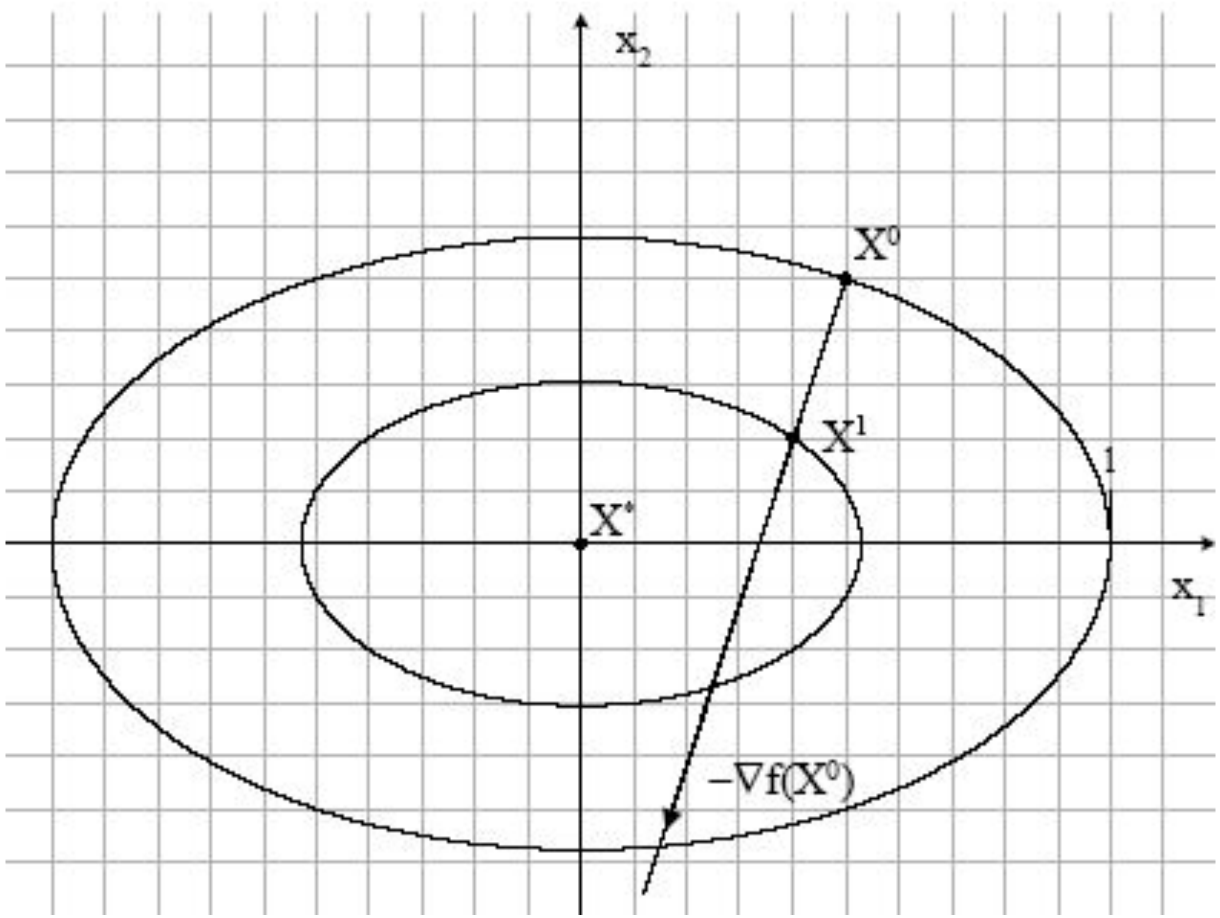
1. Задается $\vec{x}_0$ h ε

2. Вычисляется градиент $\nabla f(\vec{x}_0)$

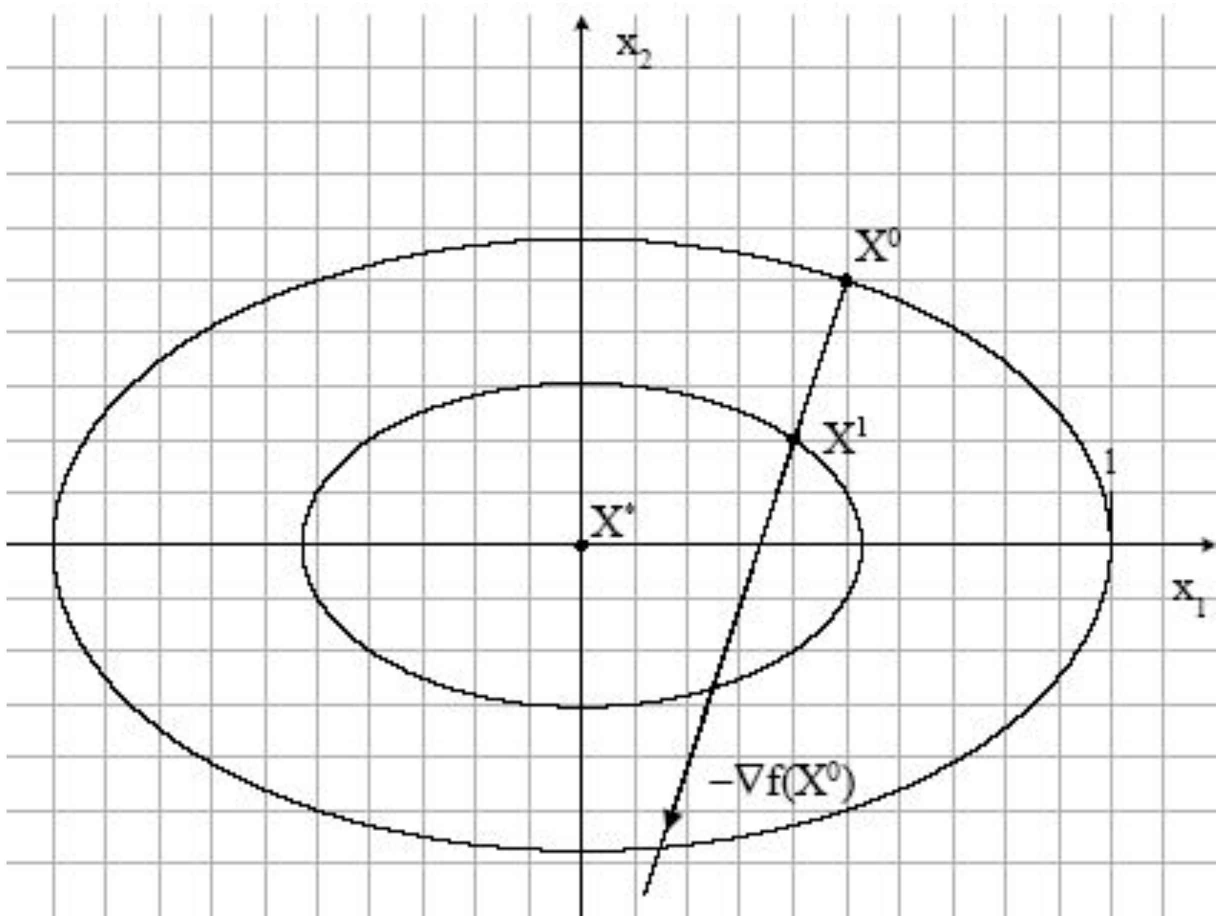
3. Определение длины шага z_m

Алгоритмы коррекции шага:

а) без коррекции Z_m=h=cons

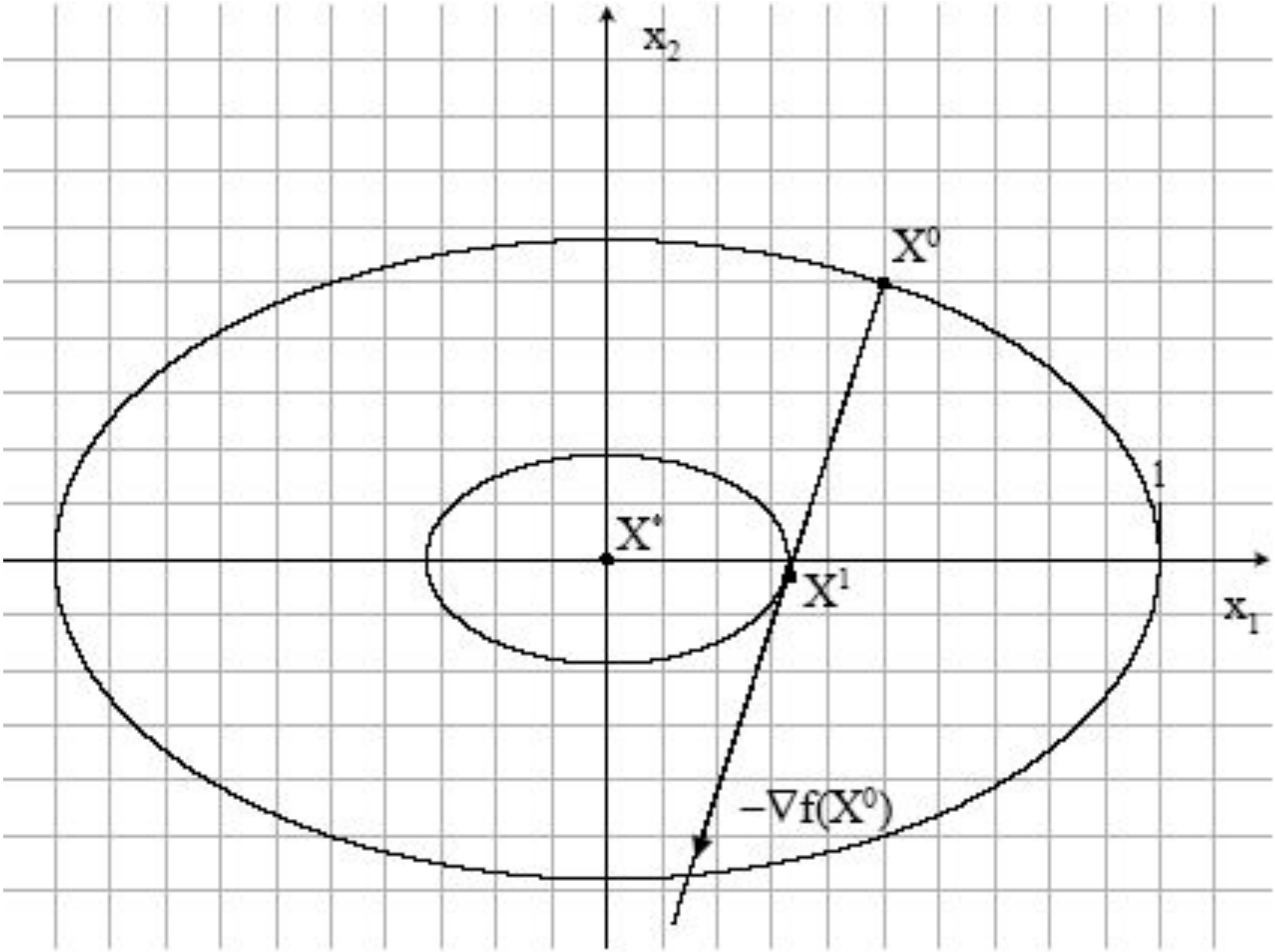


б) шаг *увеличивается*
вдали от минимума
и *уменьшается*
при подходе к минимуму.



б) с помощью метода одномерной оптимизации определяется значение z_m такое, что $\min \varphi(z) = \min_{z} f(\overset{\Delta}{x}_0 - z\nabla f(\overset{\Delta}{x}_0))$

Метод наискорейшего спуска



x2
X0
1
X*
X1
x1
−∇f(X0)

4. Переход в новую точку

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0 - z_m \nabla f(\vec{x}_0)$$

5. Вычисляется градиент

в новой точке $\nabla f(\vec{x}_0)$

6. Проверяются условия окончания.
Если они не выполняются,
то повтор с п. 3.

Критерии окончания спуска к минимуму

Основной: $\left\|\nabla f(\overset{\boxtimes}{x}_0)\right\| < \varepsilon$

Дополнительные:

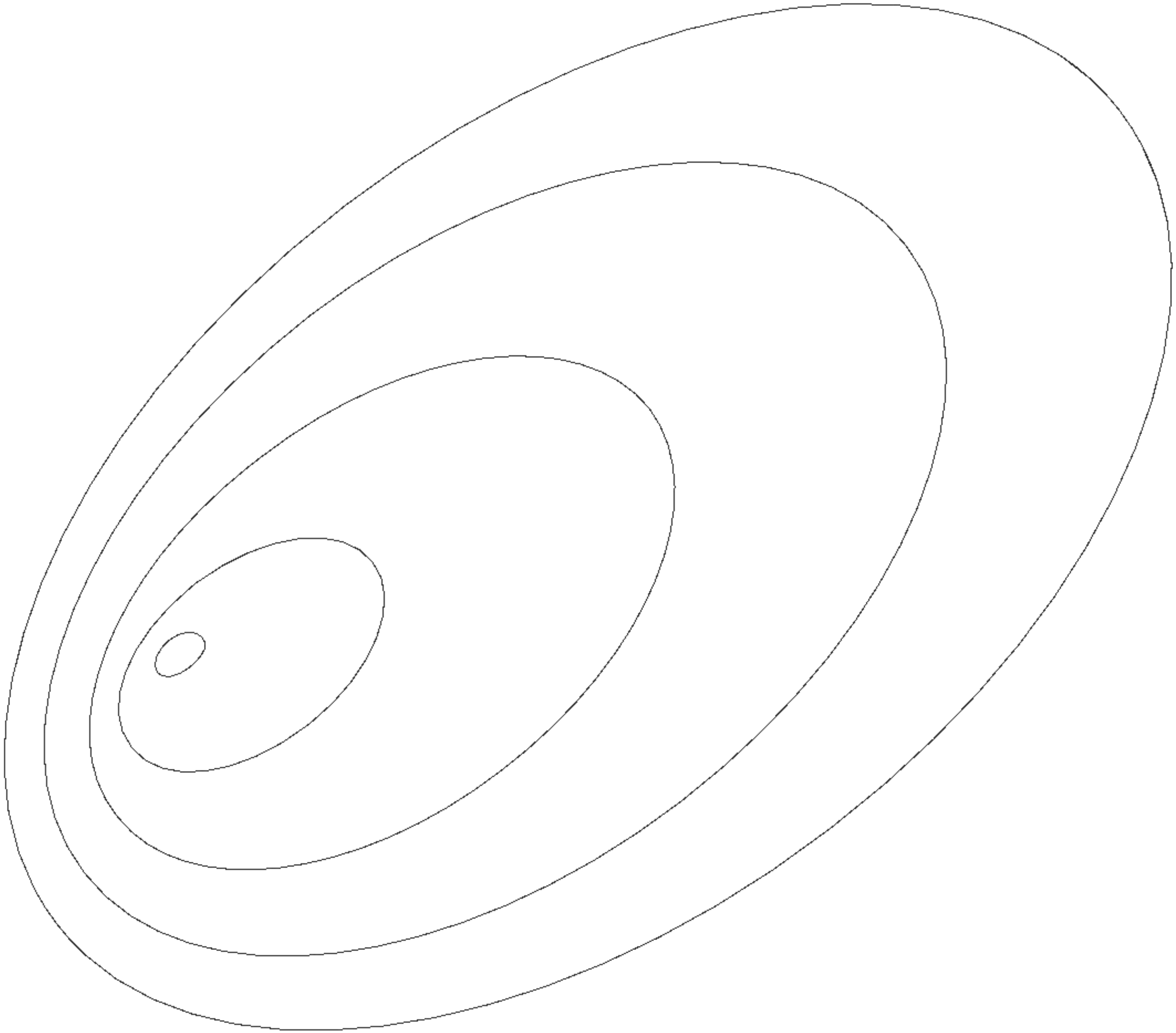
-- выполнение критического числа итераций n>M

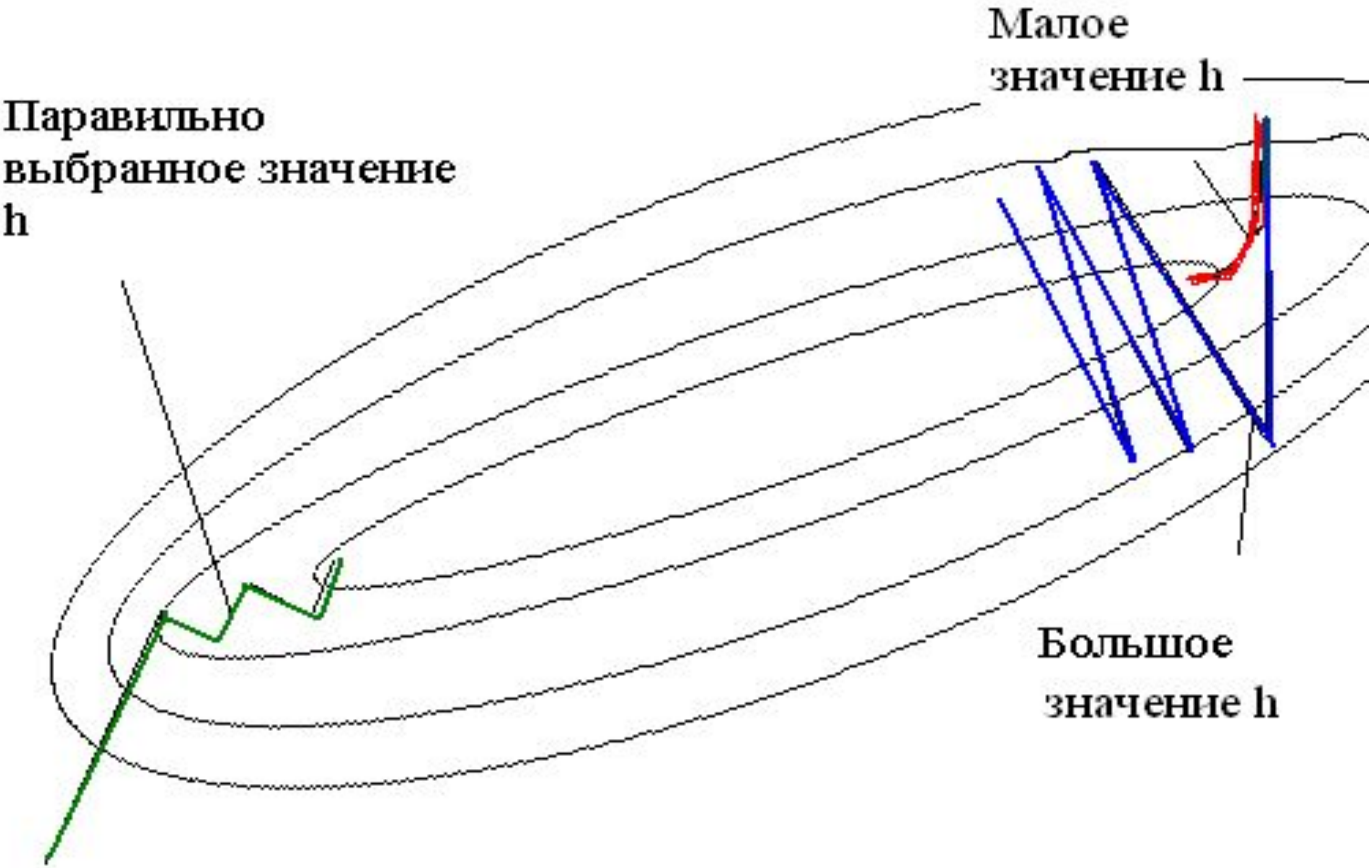
-- выполнение одного из условий

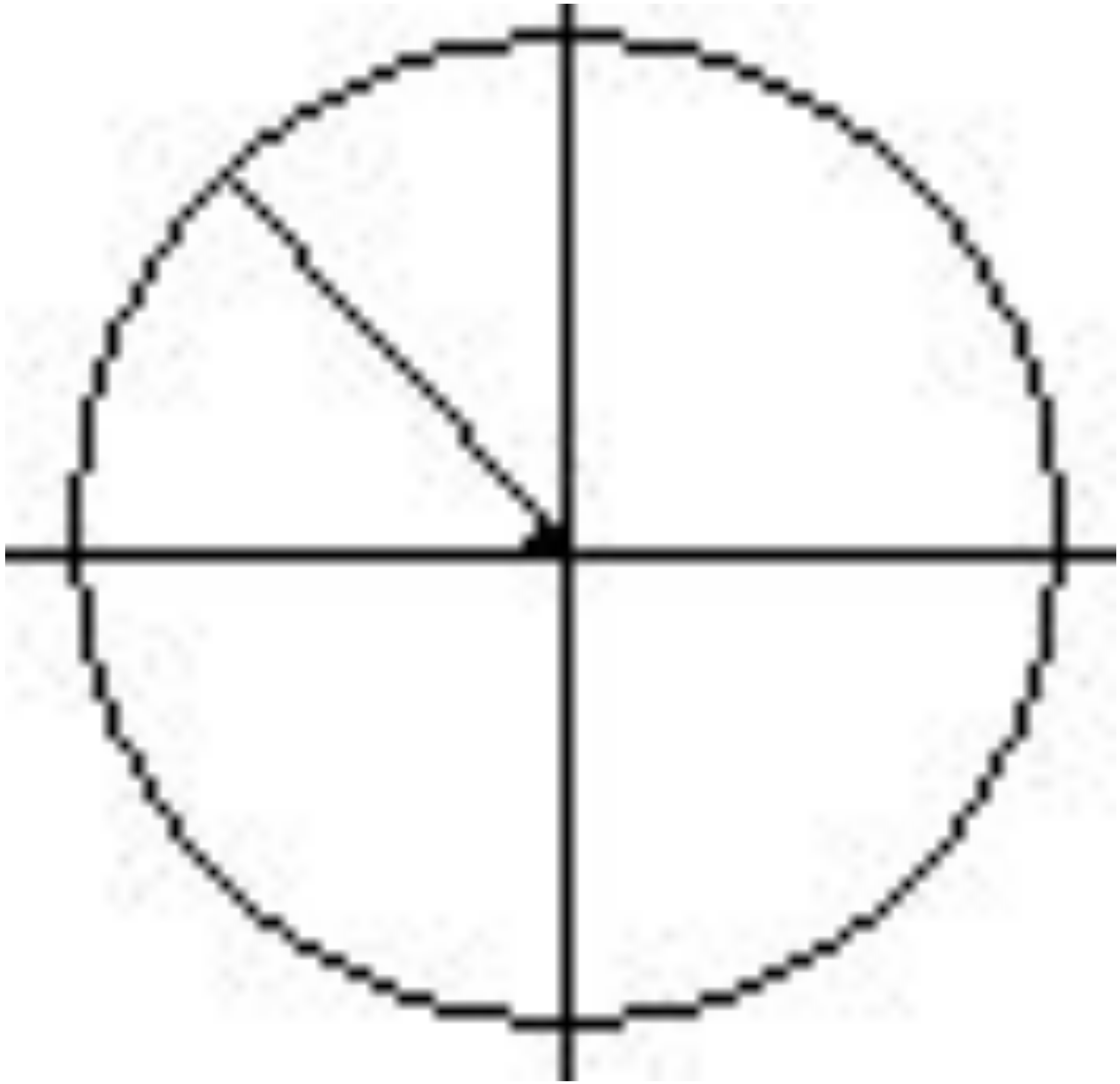
$$\left\|x_k - x_{k-1}\right\| < \varepsilon$$

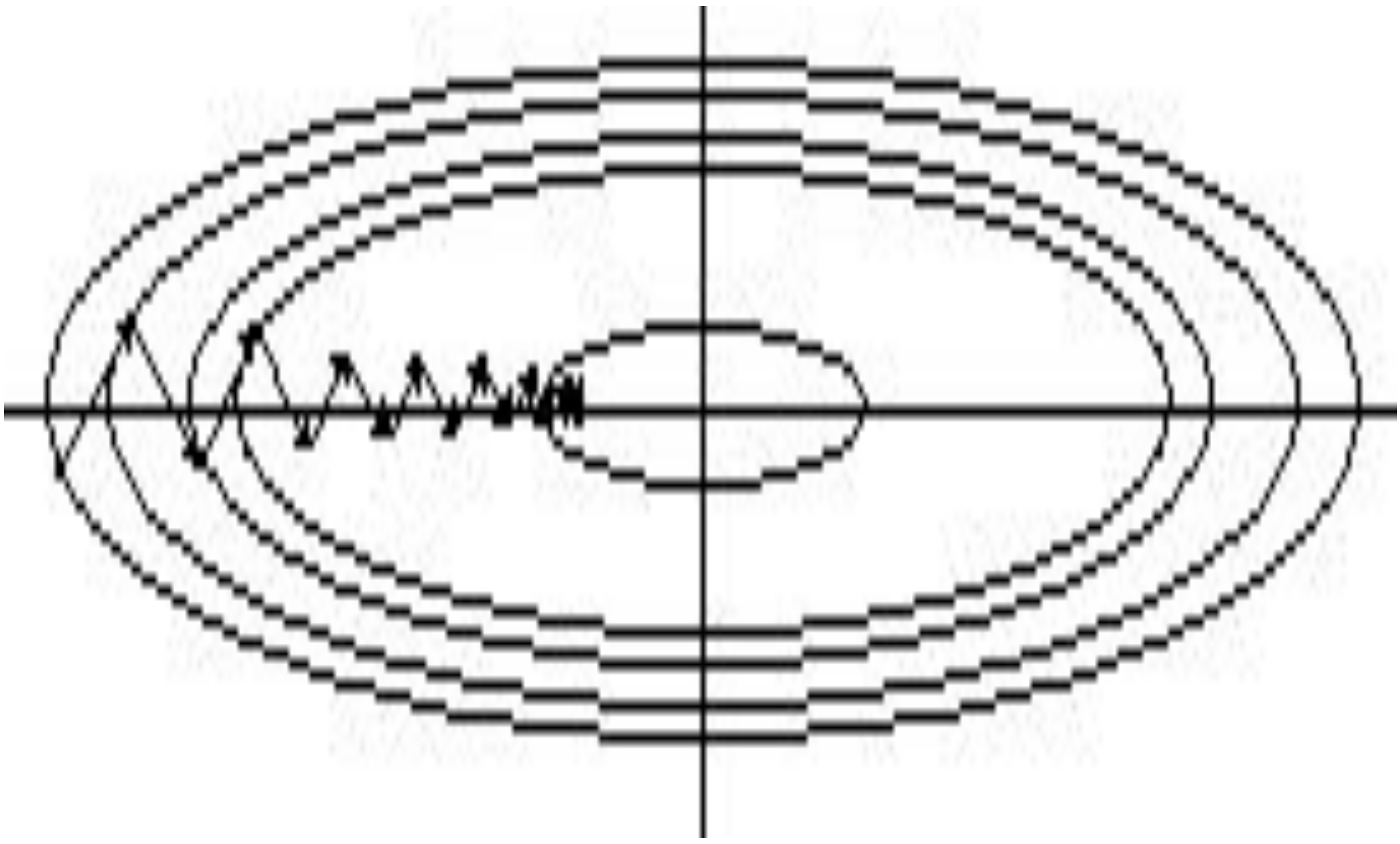
или

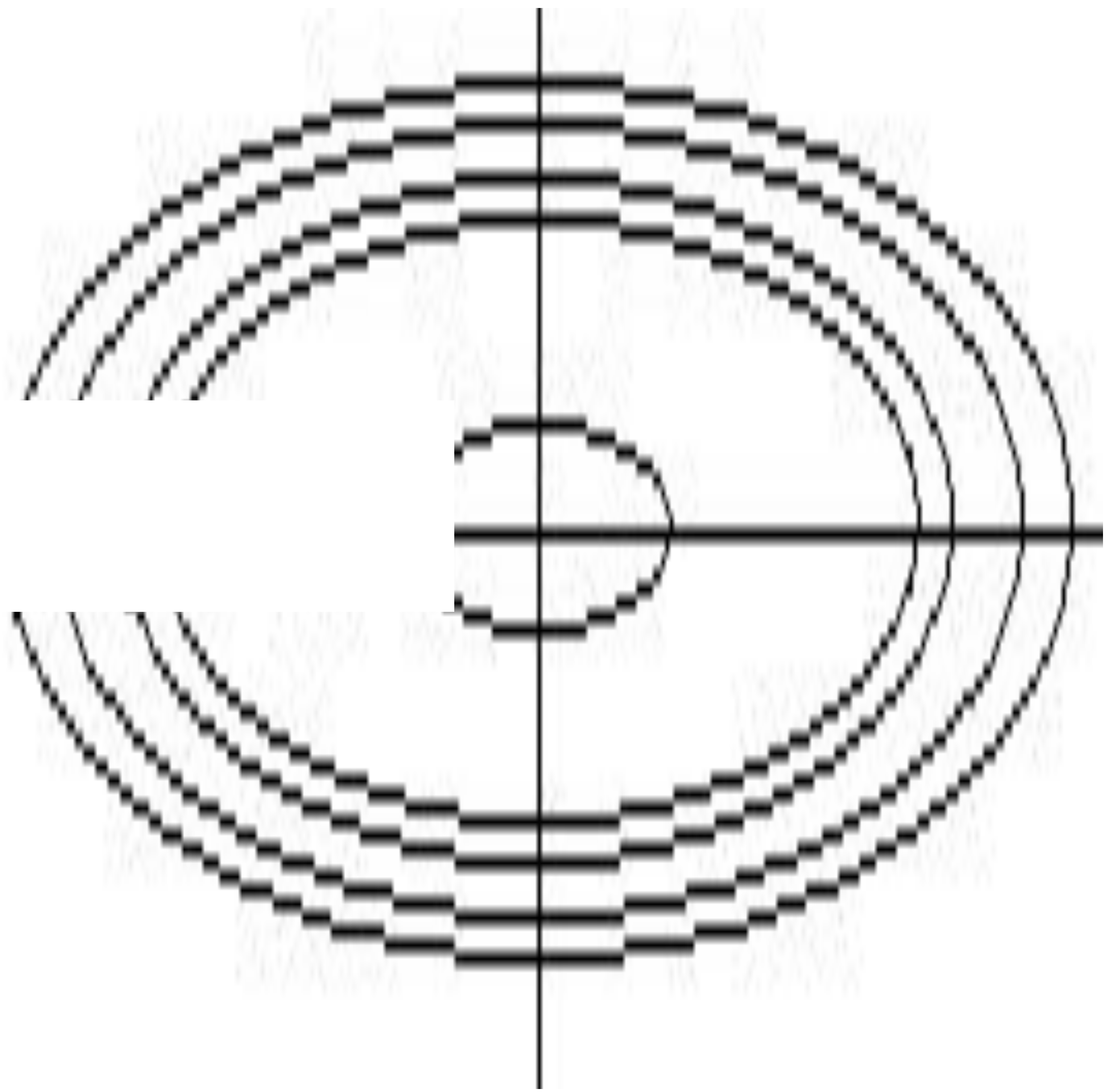
$$\left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| < \varepsilon$$




Малое
значение h
Паравильно
выбранное значение
h
Большое
значение h







МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ (ФЛЕТЧЕРА-РИВСА)

Направление поиска на текущем шаге строится как линейная комбинация наискорейшего спуска на данном шаге и направлений спуска на предыдущих шагах.

Векторы x_1 и x_2 называются ***сопряженными*** *(относительно положительно определенного самосопряженного оператора А), если (Ах, у) = 0. Сопряженность векторов x_1 и x_2 означает их ортогональность относительно скалярного произведения*

В методе ФЛЕТЧЕРА-РИВСА
при выборе
весов используется только
текущий градиент и градиент
в предыдущей точке

Первый шаг аналогичен первому шагу метода наискорейшего спуска, второй и следующий шаги выбираются каждый раз в направлении, образуемом в виде линейной комбинации векторов градиента в данной точке и предшествующего направления.

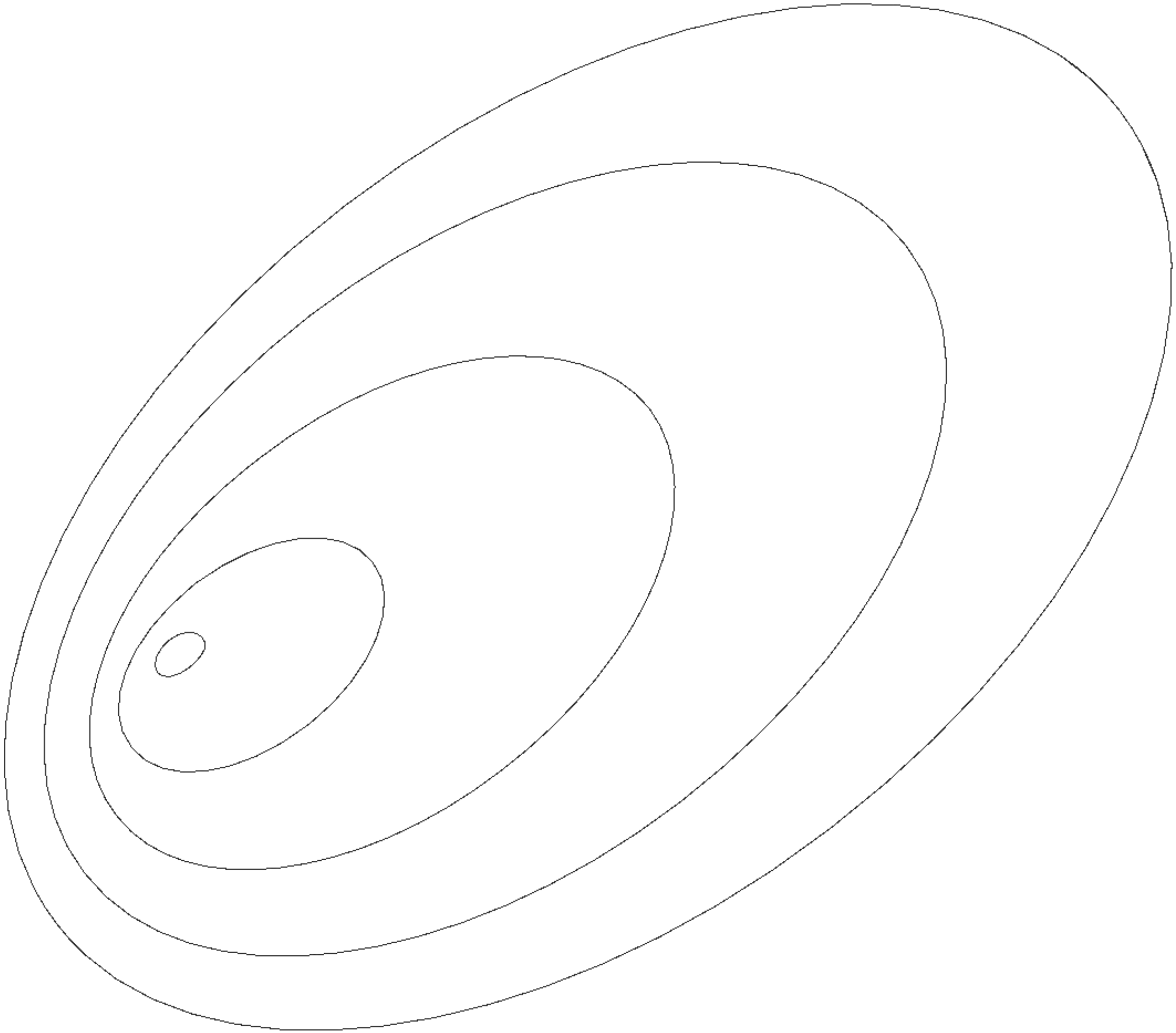
$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} - h_{k-1} \cdot d_{k-1}$$

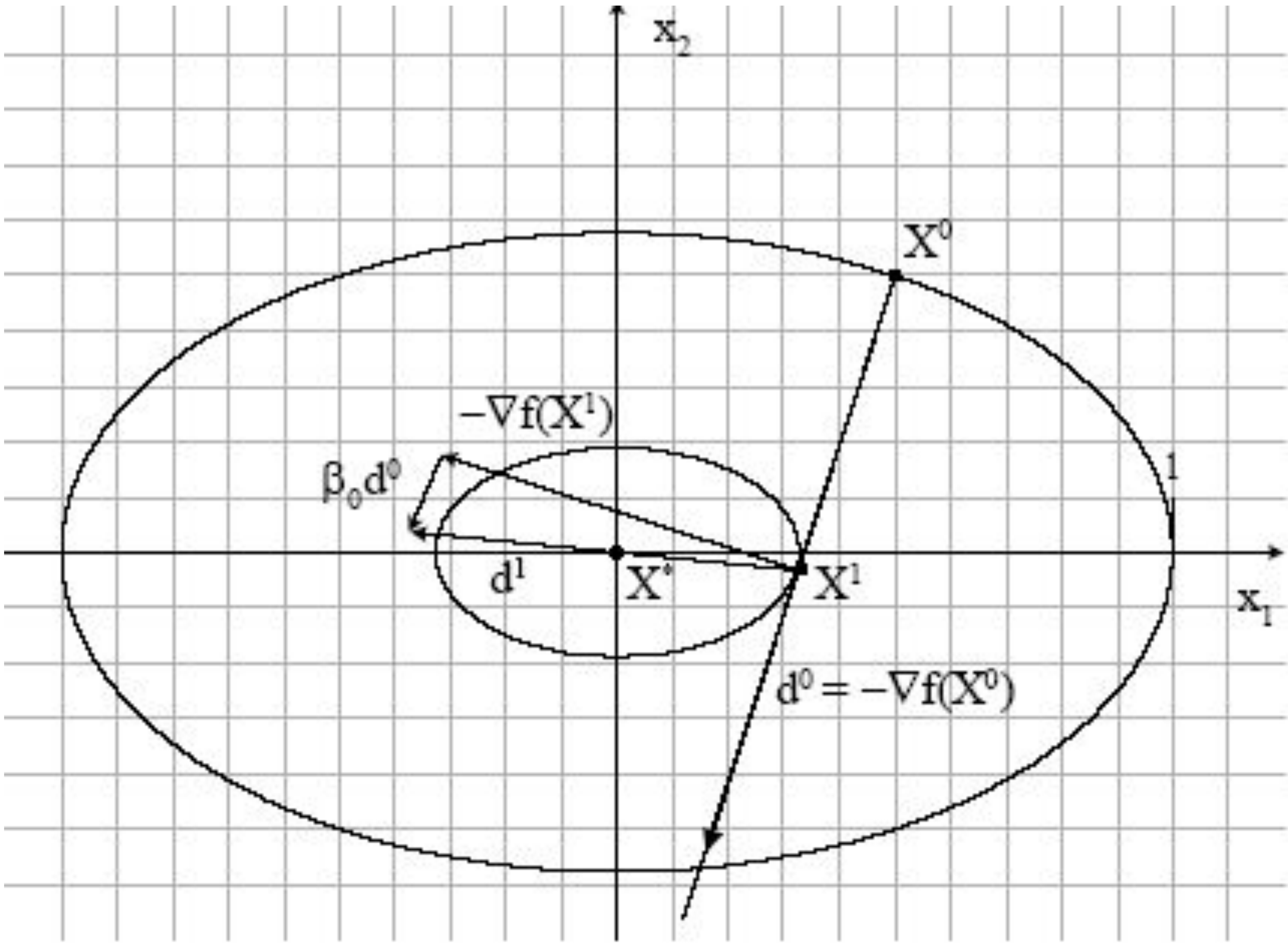
$$d_0 = \nabla f(\vec{x}_0);$$

$$d_k = \nabla f(\vec{x}_k) + \frac{\left\| \nabla f(\vec{x}_k) \right\|^2}{\left\| \nabla f(\vec{x}_{k-1}) \right\|^2} \cdot d_{k-1};$$

Шаг спуска

$$\min \varphi(z) = \min_{z} f(\vec{x}_0 - z\nabla f(\vec{x}_0))$$





x_2
X^0
$-\nabla f(X^1)$
$\beta_0 d^0$
1
d^1
X^*
X^1
x_1
$d^0 = -\nabla f(X^0)$

Доказано, что для функций,
имеющих минимум,
данный метод **сходится за конечное число итераций**, **не превышающее число переменных** функции f(x).